

International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering

**Международный журнал по расчету гражданских
и строительных конструкций**

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
Urban Planning Institute of Residential and Public
Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow,
Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy of
Architecture and Construction Sciences; National
Research Moscow State University of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow,
Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS, Professor, Dr.Sc., Russian
University of Transport (RUT - MIIT); Russian
University of Friendship of Peoples; Moscow Institute of
Architecture (State Academy); Perm National Research
Polytechnic University;
Kielce University of Technology (Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D,
Director of ASV Publishing House; National Research
Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO",
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center "STADYO";
Russian University of Transport (RUT - MIIT); Russian
University of Friendship of Peoples;
Perm National Research Polytechnic University;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systemes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W 02919 Johnston, RI,
United States

Mikhail Belyi, Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systemes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W 02919 Johnston, RI,
United States

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc.,
Parametric Technology Corp.;
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor, Dr.Sc., Systems
Research Institute Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University of Technology and
Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko, Professor, Dr.Sc., Equipe
d'Analyse Numerique NMR CNRS 5585 University Gean
Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

PUBLISHER

ООО «Издательство ACB»
(Publishing House ASV)
Yaroslavskoe sh. 19/1,12, 129337 Moscow, Russia
Tel. +7 (925) 084-74-24, iasv@iasv.ru

INDEXED IN:

CrossRef
Google Scholar
Index Copernicus
Russian Science Citation Index

ISSN 2587-9618

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University; 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI);
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University;
8 Suhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina; 1, Univerzitná,
Žilina, 010 26, Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering;
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Vladimir T. Erofeev, Professor
Ogarev Mordovia State University;
68 Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obratsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.;
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering;
1, Akademicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics; 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University; 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University; 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obratsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering;
29, Toraigyrov str., Almaty, Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University; 29, Ul.
Politechnicheskaya, St. Petersburg,
195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Rashid A. Mangushev, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering;
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Anatoly V. Perelmuter, Professor
SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University;
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obratsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education;
New Delhi, India

Wacław Szczęśniak, Professor
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka, Professor
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.
General Dynamics C4 Systems; 8201 E McDowell Rd, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obratsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Marina V. Shitikova, Professor, Dr.Sc.
Voronezh State Technical University; 14, Moscow Avenue, Voronezh, 394026, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal

for Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года. В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук. В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ). *Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science.* Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк). Партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН)* и *Научно-исследовательский центр СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО).*

Цели журнала – демонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

- предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности опубликовать результаты своих исследований;
- привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;
- обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взимается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (<http://raasn.ru>); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (<http://iasv.ru>); подраздел «Журнал IJCCSE»): с основной информацией о журнале, его целях и задачах, редакционной политикой, порядке рецензирования направляемых в журнал статей и пр.

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: <http://www.rospr.ru/>) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж, офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com, iasv@iasv.ru, sidorov@raasn.ru) или техническому редактору журнала *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: kaytukov@raasn.ru; tkaytukov@gmail.com). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

Журнал становится технологичнее. Издательство ACB с сентября 2016 года является членом Международной ассоциации издателей научной литературы (PILA), осуществляющей свою деятельность на платформе CrossRef. Оригинальным статьям, публикуемым в журнале, будут присваиваться уникальные номера (индексы DOI – Digital Object Identifier), что значительно облегчит поиск метаданных и местонахождение полнотекстового произведения. DOI – это система определения научного контента в сети Интернет.

CrossRef – независимая организация, образованная в 2000 году по инициативе группы научных издателей. Инициатором разработки технологии стало издательство Wiley. Технология использования ссылок (DOI) принадлежит агентству CrossRef.

Publishers International Linking Association (PILA) – Международная ассоциация по связям издателей – является управляющей структурой агентства CrossRef – агрегатора и регистратора DOI, а также международной базой научных статей и их метаданных (www.crossref.org). На настоящий момент в базе несколько десятков миллионов материалов.

Использование этой технологии позволит представить информацию о журнале на международной платформе издателей научной литературы CrossRef, обеспечит удобный и принятый в мировом научном сообществе доступ к полнотекстовой электронной версии. Это значительно облегчит поиск научной информации, что способствует повышению наукометрических показателей авторов статей, публикуемых в журнале. Если, например, у произведения российского автора есть DOI и если на его работу имеется ссылка в публикации зарубежного коллеги в журнале, включенном в Web of Science и Scopus, то такое произведение автоматически попадает в эти базы данных и получает в нем собственный индекс цитируемости.

Все журналы, индексируемые в международной базе научного цитирования Web of Science и большинство периодических изданий, индексируемых в международной базе Scopus, имеют DOI. Использование цифрового идентификатора говорит прежде всего о технологическом качестве научного издания и является неотъемлемым атрибутом системы научной коммуникации за счет эффективного обеспечения процессов обмена научной информацией.

С октября 2016 года стал возможным прием статей на рассмотрение и рецензирование через он-лайн систему приема статей Open Journal Systems на сайте журнала:

<http://ijccse.iasv.ru/index.php/IJCCSE>

Автор имеет возможность следить за продвижением статьи в редакции журнала в личном кабинете Open Journal Systems и получать соответствующие уведомления по электронной почте.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 13, Issue 2

2017

TABLE OF CONTENTS (СОДЕРЖАНИЕ)

Contemporary Problems of Numerical Modelling of Unique Structures and Buildings

Alexander M. Belostotsky, Pavel A. Akimov, Irina N. Afanasyeva, Taymuraz B. Kaytukov

9

The Modified Mohr - Coulomb and Drucker - Prager Models. Influence of Eccentricity on Hysteresis Loop and Energy Loss

Alexander V. Dudchenko, Sergey V. Kuznetsov

35

Formulation of Mathematical Problem Describing Physical and Chemical Processes at Concrete Corrosion

Sergey V. Fedosov, Varvara E. Roumyantseva, Igor V. Krasilnikov, Boris E. Narmania

45

Method of Compensating Loads for Solving of a Problem of Unsymmetric Bending of Infinite Ice Slab with Circular Opening

Elena B. Koreneva

50

Reliability Analysis of Existing Reinforced Concrete Beams on Normal Crack Length Criterion

Vladimir S. Utkin, Sergey A. Solovyev

56

The Reliability Analysis of Existing Reinforced Concrete Piles in Permafrost Regions

Vladimir S. Utkin, Leonid A. Sushev

64

Трехинвариантный критерий текучести в задаче пробивания пластины из алюминиевого сплава Д16(А)Т жестким телом

В.В. Вершинин, В.Л. Мондрус

Pressure- and lode-dependent yield criterion within the problem of 2024-t3(51) aluminum alloy plate perforation by a rigid projectile

Vladislav V. Vershinin, Vladimir L. Mondrus

73

Численное и экспериментальное моделирование жесткого стыка слоистых деревянных конструкций

М.А. Водяников, Г.Г. Кашеварова

Numerical and exerimental modeling of rigid joint of layered wooden structures

Mikhail A. Vodiannikov, Galina G. Kashevarova

84

Реализация TVD-схемы численного решения задачи фильтрации

Ю.П. Галагуз

Realization of the tvd-scheme for a numerical solution of the filtration problem <i>Yuri P. Galaguz</i>	<u>93</u>
О задачах поисках минимума и максимума в строительной механике <i>Л.С. Ляхович, П.А. Акимов, Б.А. Тухфатуллин</i> About hill-climbing problems in structural mechanics <i>Leonid S. Lyakhovich, Pavel A. Akimov, Boris A. Tukhfatullin</i>	<u>102</u>
О вычислительных признаках различия критических точек на кривой равновесий <i>Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев</i> On computational differences of critical points on equilibrium curve <i>Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev</i>	<u>125</u>
Статическое моделирование крановых нагрузок и расчетные сочетания усилий <i>А.В. Перельмутер</i> Crane load statistical modelling and design combinations of the internal forces <i>Anatoly V. Perelmuter</i>	<u>136</u>
Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении <i>А.А. Семенов</i> Methodology research of stability of shallow orthotropic shells of double curvature under dynamic loading <i>Alexey A. Semenov</i>	<u>145</u>
К задаче формирования треугольной сети на сфере с узлами на одном уровне <i>А.Д. Антошкин</i> He problem of emplacement of triangular geometric net on the sphere with nodes on the same level <i>Vasilij D. Antoshkin</i>	<u>154</u>
Об итогах выборов членов Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) в 2017 году	<u>161</u>
Итоговый документ научной части Общего собрания членов Российской академии архитектуры и строительных наук в 2017 году «Научные исследования - важнейший фактор инновационного развития архитектурно-строительного комплекса и градостроительной деятельности в России»	<u>163</u>
Предложения Российской академии архитектуры и строительных наук по приоритетным направлениям развития исследований в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук	<u>170</u>
Ушел из жизни Дмитрий Георгиевич Копаница	<u>175</u>
К Юбилею Александра Михайловича Белостоцкого	<u>177</u>

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-2-9-34

CONTEMPORARY PROBLEMS OF NUMERICAL MODELLING OF UNIQUE STRUCTURES AND BUILDINGS

*Alexander M. Belostotsky^{1,2,3,4}, Pavel A. Akimov^{1,2,4,5}, Irina N. Afanasyeva^{1,2},
Taymuraz B. Kaytukov^{2,5}*

¹ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

² National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

³ Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁵ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to contemporary problems of numerical modelling of unique structures, buildings and facilities and corresponding directions of activity of Scientific Research Center “StaDyO” including development, verification and use of corresponding software, development and refinement of methods of structural analysis, solution of scientific and technical problems, scientific and educational activity. Experience in theoretical and practical computational analysis is under consideration as well (26-year history).

Keywords: numerical modelling, computational analysis, structural analysis, structures, buildings, software

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ И КОМПЛЕКСОВ

*А.М. Белостоцкий^{1,2,3,4}, П.А. Акимов^{1,2,4,5}, И.Н. Афанасьева^{1,2},
Т.Б. Кайтуков^{2,5}*

¹ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

³ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии
архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁵ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются актуальные проблемы численного моделирования состояния зданий, сооружений и комплексов, а также соответствующие направления деятельности ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (НИЦ СтаДиО), включая вопросы разработки, верификации и апробации соответствующего программного обеспечения, реализации образовательных проектов, а также исследования и развития численных и численно-аналитических методов решения актуальных научно-технических задач. Кроме того, приводятся краткие сведения о 26-летнем опыте коллектива НИЦ СтаДиО в области расчетно-теоретических исследований пространственного температурного и напряженно-деформированного состояния, устойчивости, прочности и надежности трубопроводов, технологического, электротехнического и подъемно-транспортного оборудования, машин и механизмов, систем «оборудование – трубопроводы», строительных конструкций, систем «основание – наземное сооружение» и «основание – подземное сооружение» особо ответственных объектов при учете нормативно регламентированных и фактических сочетаний температурных, статических, ветровых, эксплуатационных (вибрации) и особых динамических (сейсмических, ударно-волновых, аварийных и других) воздействий.

Ключевые слова: численное моделирование, комплексы программ, здания и сооружения

1. INTRODUCTION

International and Russian experience, reflected in the numerous papers and monographs, well-known events in the recent years in various cities all over the world indicate that problem of technological safety of metropolis is rather actual, science-intensive and, unfortunately, still far from practical solution. An effective and economically justified solution of these problems is normally based on predictive mathematical modeling of state (static and dynamic stress-strain state, gas- and hydrodynamic state, thermal state, etc.) of structures, buildings and facilities with the use of corresponding universal and specialized software systems, realizing numerical methods of mechanics (fluid mechanics, gas dynamics, solid mechanics, structural mechanics) [11,12, 18-22,24-26]. In accordance with the state-of-the-art concept mathematical models must accompany objects at all stages of their life cycle (design and construction, operation, repair and reconstruction), providing an adequate and complete analysis and forecast of the state as part of computer-based structural health monitoring systems [13]. Scientific Research Center “StaDyO” (SRC “StaDyO”) was founded in Moscow in 1991 as one of the Russian pioneers offering and performing computer-oriented computation services for industrial purposes. Problems dealing with effects of static, temperature and dynamic loads on complex buildings, equipment and pipelines of nuclear and hydro power plants, wind structures, offshore structures etc. are under consideration. SRC “StaDyO” develops and distributes computer-aided design systems as well as the respective specialized software. Besides, SRC “StaDyO” distributes technical software in the area of structural mechanics and other related areas. During twenty six years SRC “StaDyO” worked in the field of design and numerical analysis of structures, equipment and pipe systems of nuclear power plants, hydro power stations and dam constructions, offshore structures and other complicated systems.

2. DIRECTIONS OF ACTIVITY OF SCIENTIFIC RESEARCH CENTER “STADYO”

2.1. Contemporary problems of mathematical modelling of unique structures, buildings and facilities.

Directions of activity of SRC “StaDyO” include the following contemporary problems of mathematical modelling of unique structures, buildings and facilities:

- modelling of interaction of buildings and structures with a foundation with allowance for real properties, stage-by-stage construction and actual operation history;
- structural analysis with allowance for physical, geometrical and other nonlinearities (plasticity of metal, creep and crack formation of reinforced concrete, nonlinear rheology of the foundation, large displacements, loss of stability, postbuckling behaviour, contact problems (friction separation, etc.)) [15-17];
- structural analysis with allowance for structural and technological specificity (structural (constructive) nonlinearity, genetic nonlinearity) of buildings and facilities (construction sequence, stage-by-stage construction, sensitivity of buildings and structures, assessment of the quality of the constructive solution from the position of the sensitivity of the stress-strain state to corresponding design deviations) [15-17];
- numerical modelling of wind flows and loads (average and pulsation components, loads on facade structures, pedestrian comfort, vortex resonance oscillations), experimental validations of wind load analysis;
- seismic analysis (with allowance for acceleration spectra (versions of the linear-spectral theory), accelerograms, platform models, wave effects) [14];
- progressive collapse analysis of buildings and facilities with allowance for real dynamic highly nonlinear effects of elastoviscoplasticity and large displacements;

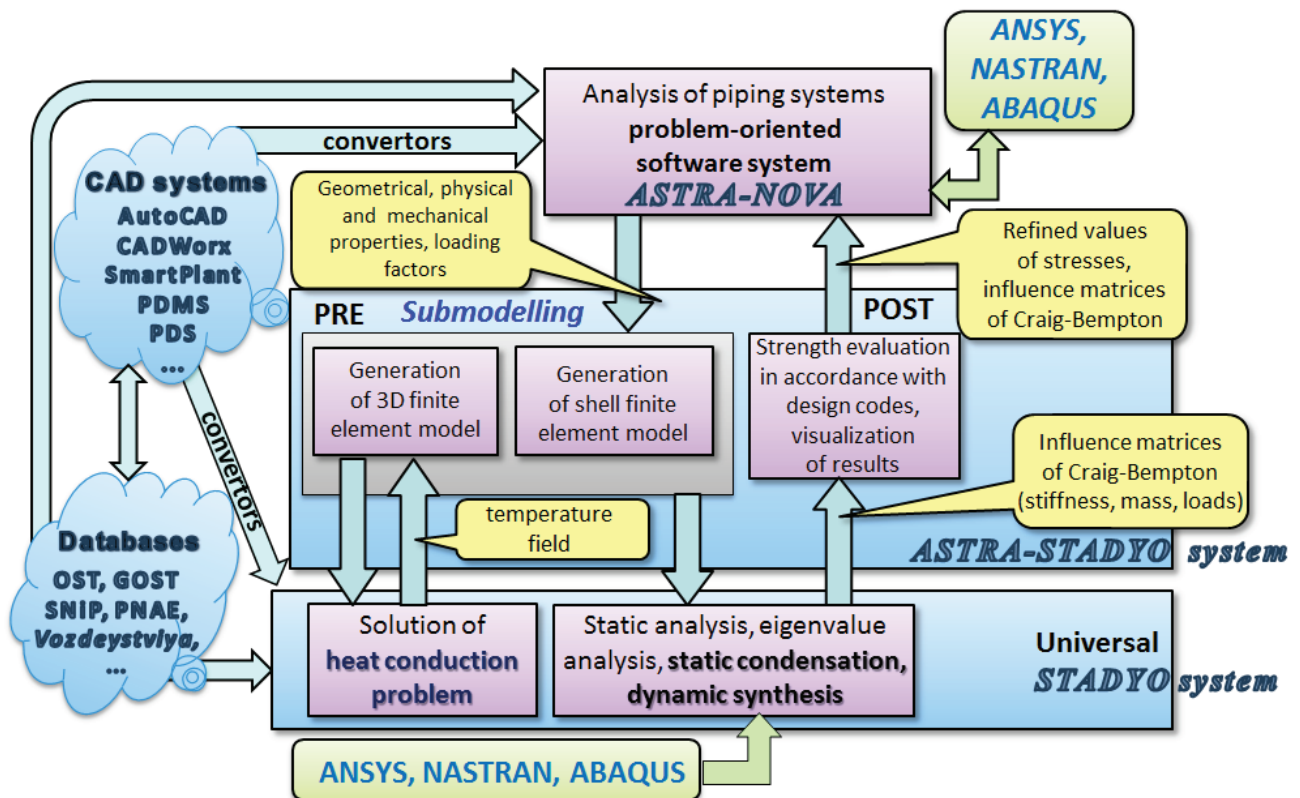


Figure 1. Proprietary software systems based on superelement method (substructuring method): universal (STADYO) and object-oriented (ASTRA-NOVA).

- development and refinement of methods and algorithms for solution of large-scale computational problems (direct and iterative solvers, superelement technology, adaptive schemes, parallelizing, etc.);
- development of calibratable mathematical and computer models as part of structural health monitoring systems at the stages of erection and operation of buildings and facilities;
- application of algorithms of aerodynamics for modelling of snow sedimentations, explosion loads and distribution of hazardous emissions;
- numerical modelling of three-dimensional non-stationary problems of fire resistance;
- solution of coupled problems of aerohydroelasticity.

2.2. Development and verification of software.

During twenty six years specialists from SRC “StaDyO” successfully worked in the field of

design, development and verification of proprietary software systems (Figure 1). STADYO is the universal software system providing temperature fields, static, stability and dynamic analysis (including response spectra and accelerations definition) as well as fracture mechanics and strength analysis and optimization of arbitrary combined 2-D and 3-D solid, shell, plate and beam mechanical systems by the finite elements, superelement and other modern numerical methods. STADYO is verified and certificated in Gosatomnadzor RF (State Nuclear Safety Commission of the Russian Federation), it is applied in the leading design and research institutes and plants (for instance, Atomenergoprojekt (Russia), Hydroporproject (Russia), Teploenergoprojekt (Russia), Energoprojekt (Bulgaria), Siemens AG (Germany), etc.)). ASTRA-NOVA is the software system for nuclear power plants, fuel power plants, which provides petroleum pipelines stress-strain analysis in accordance with existing Russian and international design codes (Figure 3).

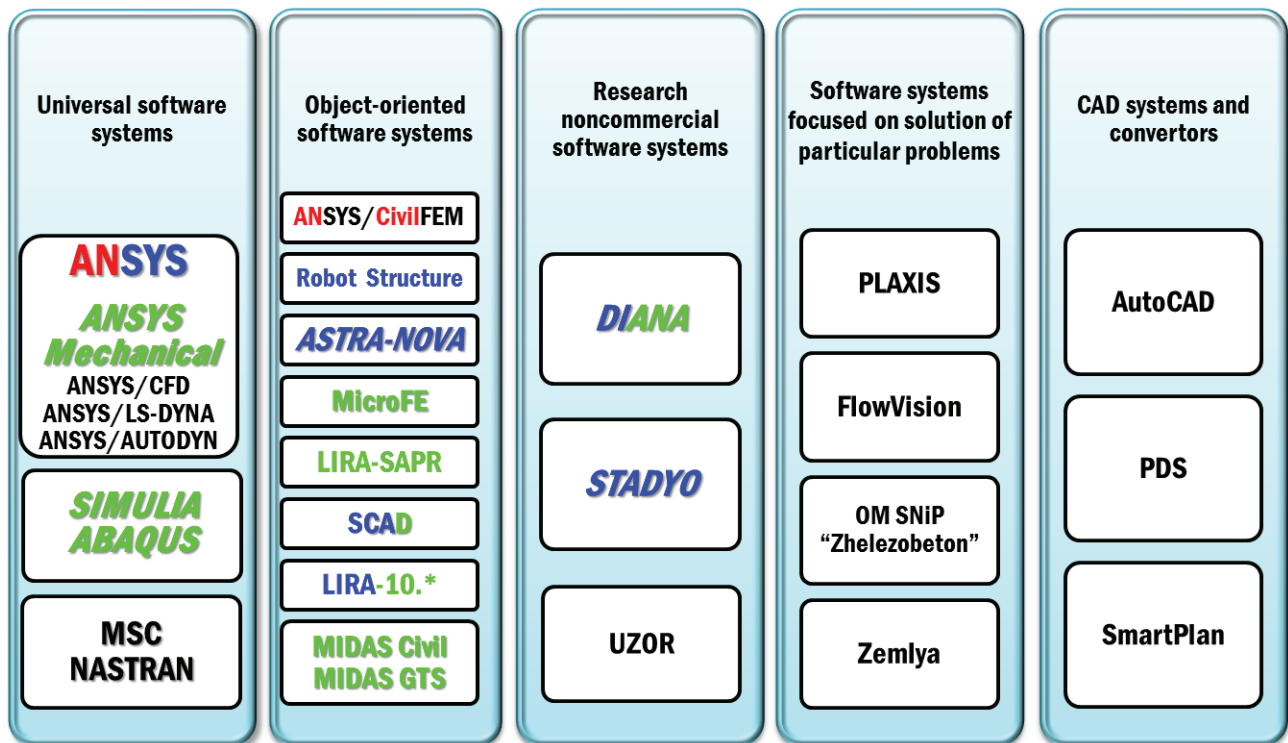


Figure 2. Software systems for analysis of loads and effects, strength and stability of structures, buildings and facilities.

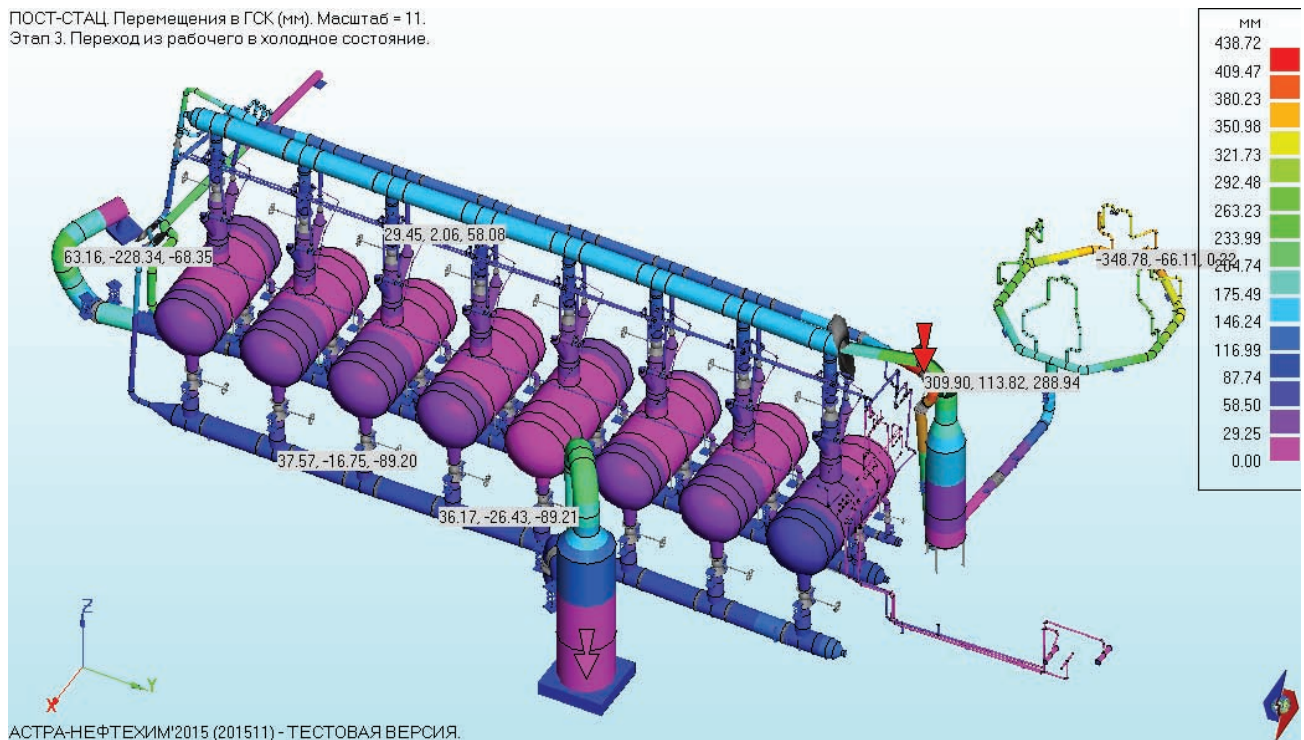


Figure 3. Modeling of complex supporting structures and equipment in the ASTRA-NOVA software system (sample).

SyMonEx is informational & diagnostic computer system of monitoring and expert safety evaluation of complicated power energetic structures. These software systems have powerful pre- and postprocessors, which allow to prepare input data and analyse results, correspond to world standards and can work together with various modern CAD/CAM systems and data bases. Besides, it is vital to specify the following activities:

- review of results of structural analysis with the use of verified software;
- training of specialists-users of software systems which provide mathematical modelling of structures, buildings and facilities;
- qualification tests and certification of specialists dealing with computational structural analysis and corresponding experts reports;
- verification of numerical methods and software used in design and structural analysis;
- construction and technical expertise of buildings and facilities (including cases of local destruction).

2.3 Development and refinement of methods of structural analysis.

Research and development of numerical (finite element method, boundary element method, variation-difference method, meshless method, finite volume method etc.) and semianalytical (discrete-continual) methods of structural analysis [1-10,23] are the most important aspects of ensuring safety of structures and buildings.

Particularly the field of application of discrete-continual methods (discrete-continual finite element method, discrete-continual boundary element method, discrete-continual variation-difference method), which are now becoming available for computer realization, comprises structures with regular (in particular, constant or piecewise constant) physical and geometrical parameters in some dimension (so-called “basic” direction (dimension)). Considering problems remain continual along “basic” direction while along other directions discrete-continual methods presuppose corresponding mesh approximation.

Analytical solution along basic direction is apparently preferable in all aspects for qualitative analysis of calculation data. It allows investigator to consider boundary effects when some components of solution are rapidly varying functions. Due to the abrupt decrease inside of mesh elements in many cases their rate of change can’t be adequately considered by conventional numerical methods while analytics enables study. Another feature of discrete-continual methods is the absence of limitations on lengths of structures. Hence it appears that in this context discrete-continual methods are peculiarly relevant.

Solution of corresponding resultant systems of equations with immense number of unknowns is the most time-consuming stage of the computing, especially if we take into account the limitation in performance of personal computers, contemporary software and necessity to obtain correct solution in a reasonable time. However, high-accuracy solution at all points of the model is not required normally, it is necessary to find only the most accurate solution in some pre-known domains. Generally the choice of these domains is a priori data with respect to the structure being modeled. Designers usually choose domains with the so-called edge effect (with the risk of significant stresses that could potentially lead to the destruction of structures, etc.) and regions which are subject to specific operational requirements. It is obvious that the stress-strain state in such domains is of paramount importance. Specified factors along with the obvious needs of the designer or researcher to reduce computational costs by application of sophisticated correct discrete and discrete-continual methods cause considerable urgency of constructing of special algorithms for obtaining local solutions (in some domains known in advance) of boundary problems. Wavelet analysis provides effective and popular tool for such researches. Solution of the considering problem within multilevel wavelet analysis is represented as a composition of local and global components.

2.4 Educational activities

Leading specialists of SRC “StaDyO” are closely involved in development, updating and realization of Master of Science programs (in the fields of “Applied Mathematics” and “Construction”) and PhD programs (in the fields of “Informatics and Computer Engineering” and “Engineering and technology of construction”). Besides, we should also mention here the following activities:

- “open lectures”, specialized training courses, seminars, counseling (including counseling in the preparation of graduate qualification works);
- training of specialists within the programs of supplementary vocational education in the fields of large-span and high-rise buildings, underground structures, nuclear, thermal and hydroelectric power stations, pipeline systems for various purposes etc);
- organization and development of scientific research & educational centers and laboratories in leading Russian universities;
- organization and participation in Russian and international scientific events (conferences, symposiums, seminars, etc.);
- preparation of textbooks, tutorials and monographs on topical problems of mathematical and computer simulation of the condition of buildings, structures and complexes.

3. EXPERIENCE IN THEORETICAL AND PRACTICAL COMPUTATIONAL ANALYSIS

The reliability of research results, methods, algorithms, software systems and results of analysis is provided by multilevel verification and great (more than 40-years) experience in theoretical and practical computational analysis including the following problems, specified below (Figures 4-21).

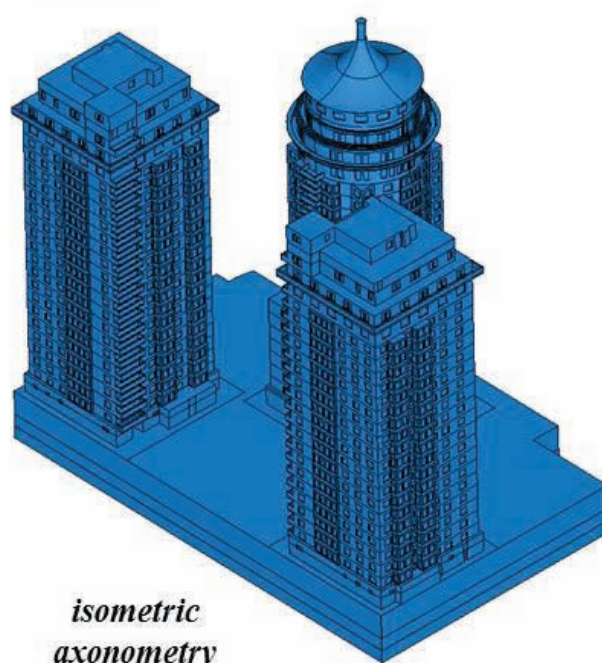
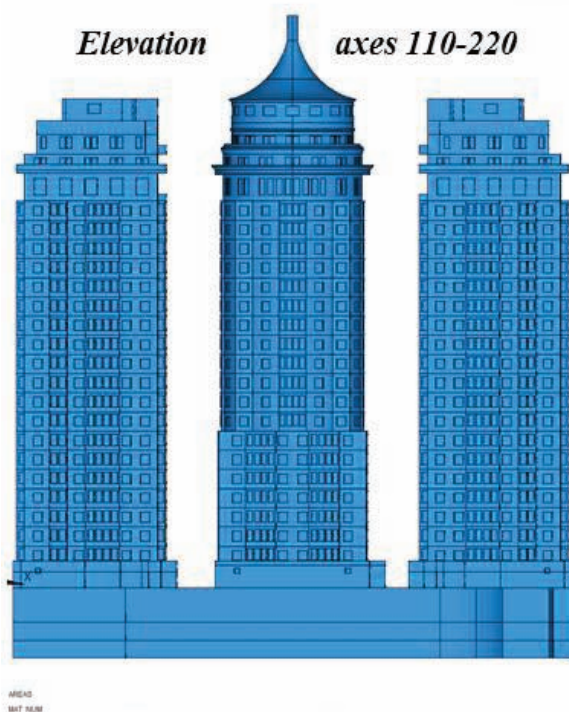
1. Three-dimensional thermal and stress-strain state, stability, strength and reliability of pipelines, technological, electrotechnical and lifting-transport equipment, machines

and mechanisms, structures, coupled systems “equipment – pipelines”, “foundation – overground structure”, “foundation – subground structure” of buildings, facilities and complexes, with allowance for design and actual load combinations (including temperature loads, static loads, wind loads, operational load (vibrations), special dynamic loads (seismic, shock-wave, emergency and other)):

- reactor compartments, engine rooms, generator halls, turbine buildings, reserve diesel power plants and cooling towers of nuclear power plants (NPP) and waste storages (Armenian, Kursk, Smolensk, Chernobyl, Leningrad, Ignalina, Bilibino, Novovoronezh, Kola, Balakovo, Volgodonsk, Kalinin, Zaporozhye, Beloyarsk, Lovisa, Kozloduy, Belene, Paksh, Temelin, Stendal, Kudankulam, Tianwan, Bushehr, new generation NPP (AS-NP 500, AS-NP 1000, NP 2006, NPP with WWER-TOI, etc.));
- arched, gravity and earth dams, underground structures and buildings of hydroelectric power stations (Sayano-Shushenskaya, Krasnoyarskaya, Bratskaya, Boguchanskaya, Zeyskaya, Bureyskaya, Vilyuyskaya, Katun, Chirkeiskaya, Volzhskaya, Kamskaya, Inguri, Khudoni, Namakhvani, Kurpsai, Nurek, Rogun, Plyavinskaya, Gekhi, Hoabin, Kapanda, Teri, Tang-E-Duk, etc.), hydroelectric pumped storage power stations (Zagorskaya), tidal hydroelectric stations, coast protection structures, other hydraulic structures;
- unique and typical buildings and structures of civil engineering (roof of Grand Sports Arena of Luzhniki Olympic Complex (Moscow), the monument to the 300th anniversary of the Russian fleet (Moscow), underground parking of shopping and entertainment mall “Manezhnaya Square” (Moscow), sports and fitness complex “Aquadrom”, ice stadium “Megasport” located on Kho-

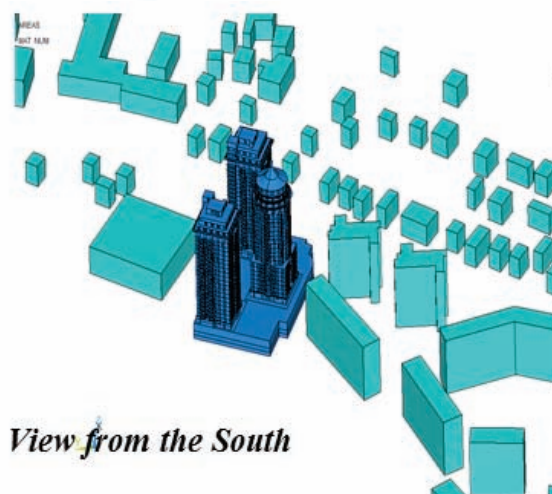
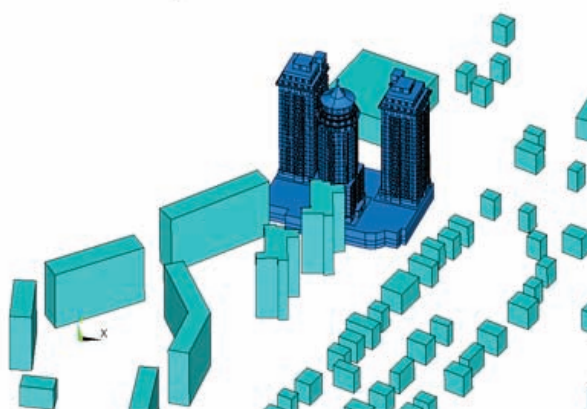


Geometrical model



AREAS:
WAT FLUM

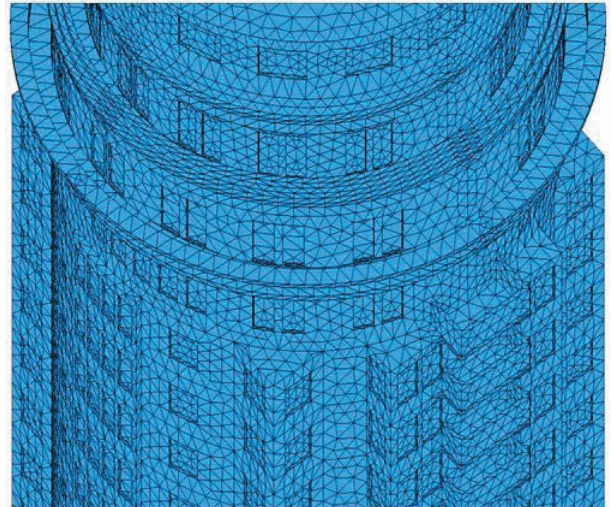
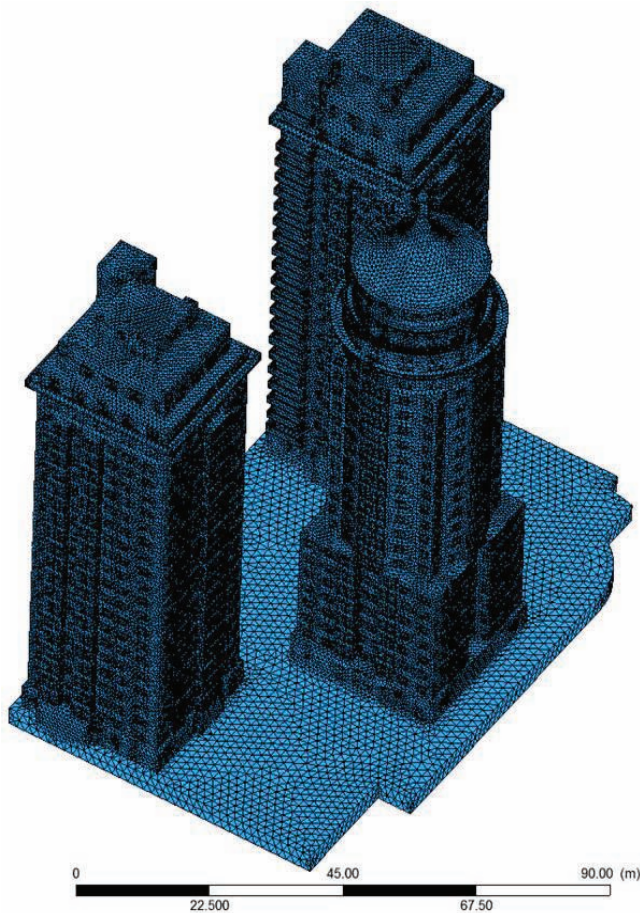
View from the West



View from the South

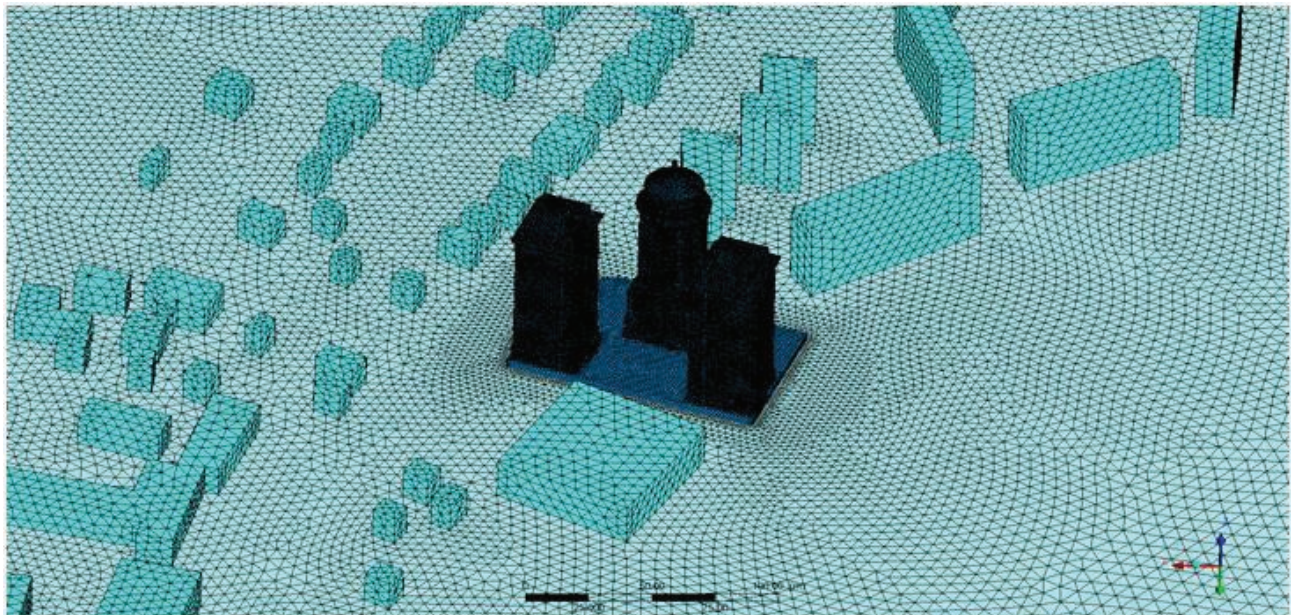
Complex and existing buildings (fragment)

Figure 4. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex, located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).



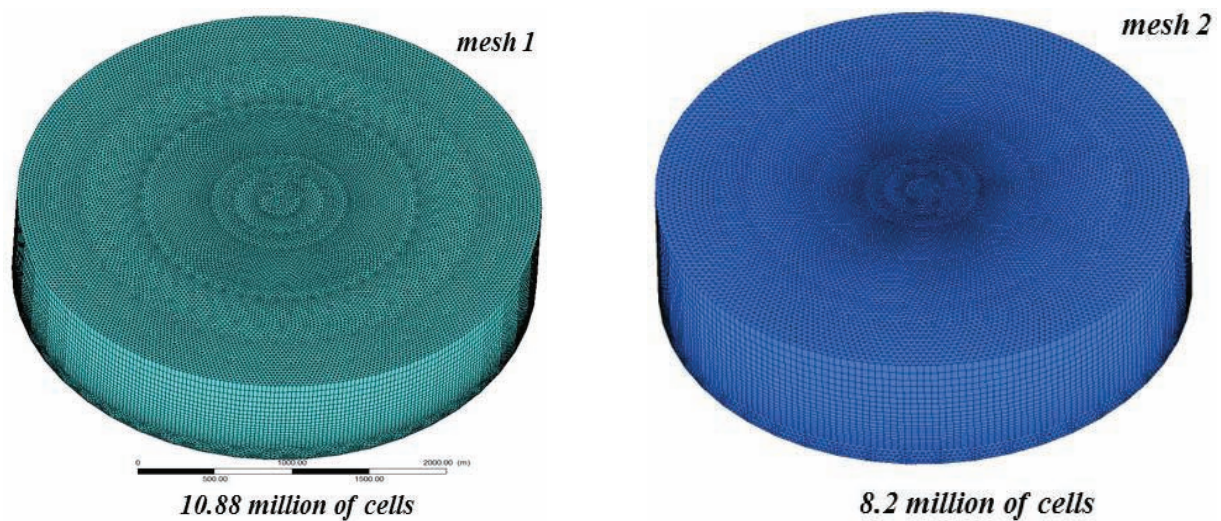
Finite element mesh (Building 3 of Complex)

Finite element mesh



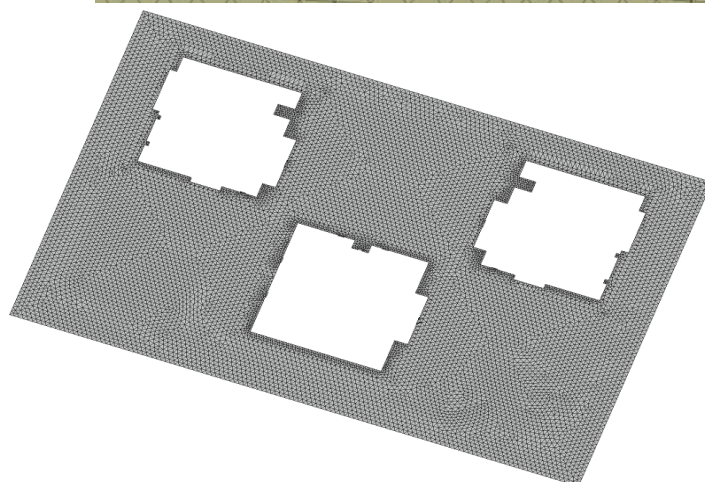
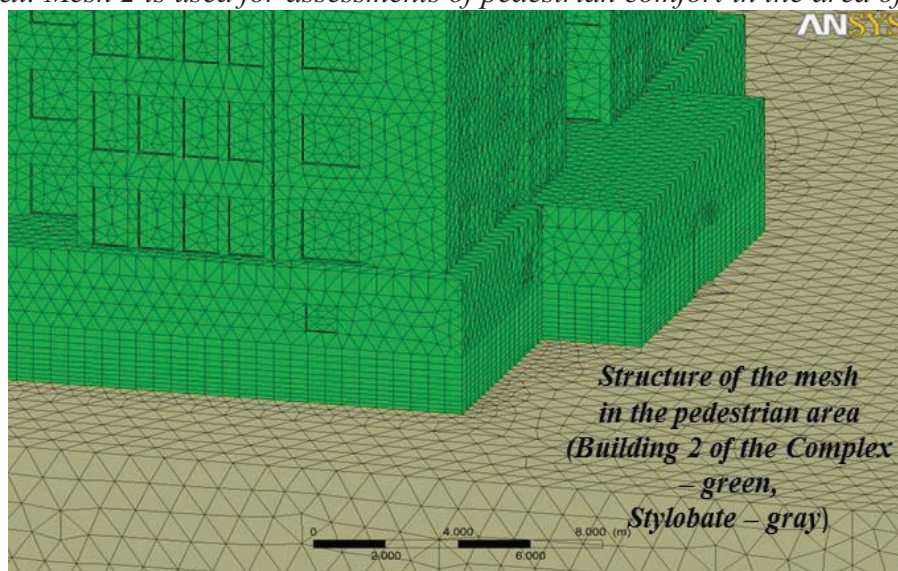
Approximation mesh on the surrounding buildings and ground

Figure 5. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex , located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).



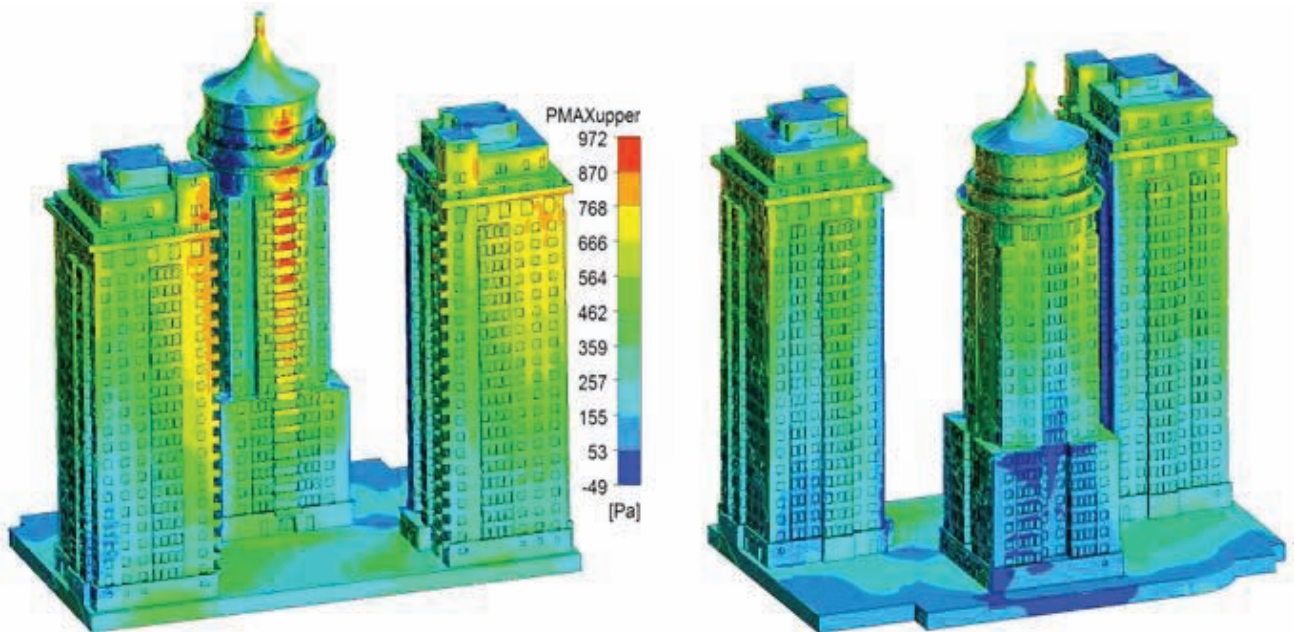
Finite element meshes of the computational domain.

Mesh 1 is used for computing of wind loads on façade and load-bearing structures of the Complex. Mesh 2 is used for assessments of pedestrian comfort in the area of the Complex.

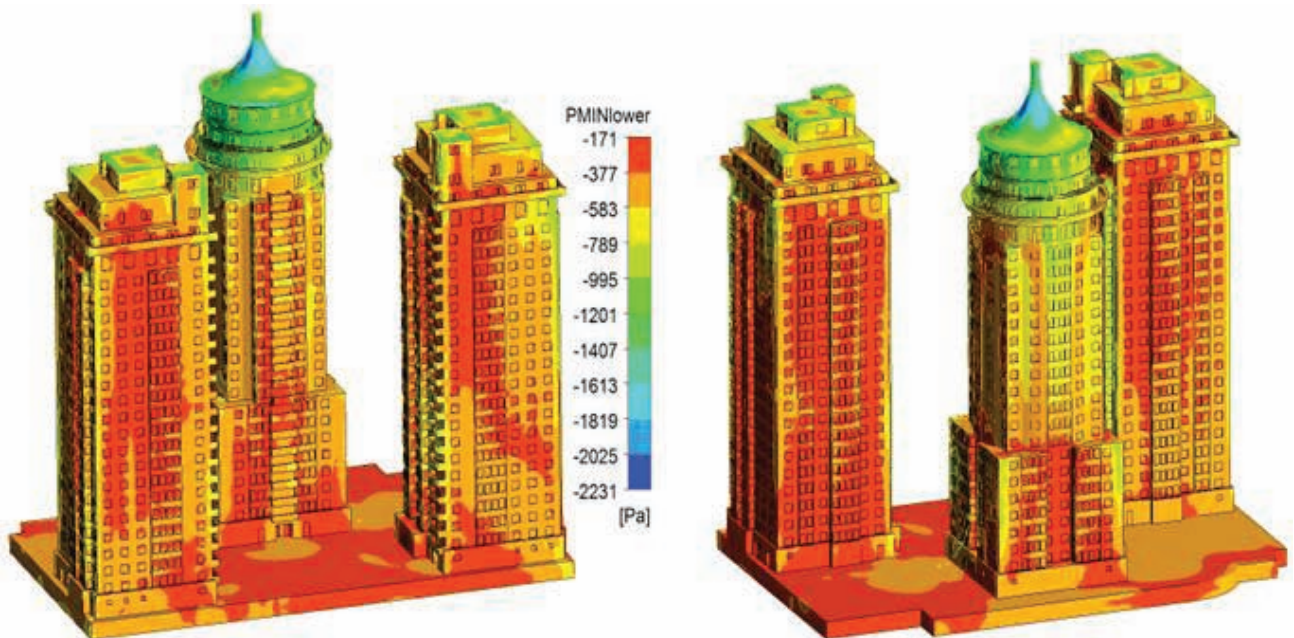


*Structure of the mesh
in the pedestrian area
 $h=1.5$ m
from the upper level of the
stylobate*

Figure 6. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex, located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).

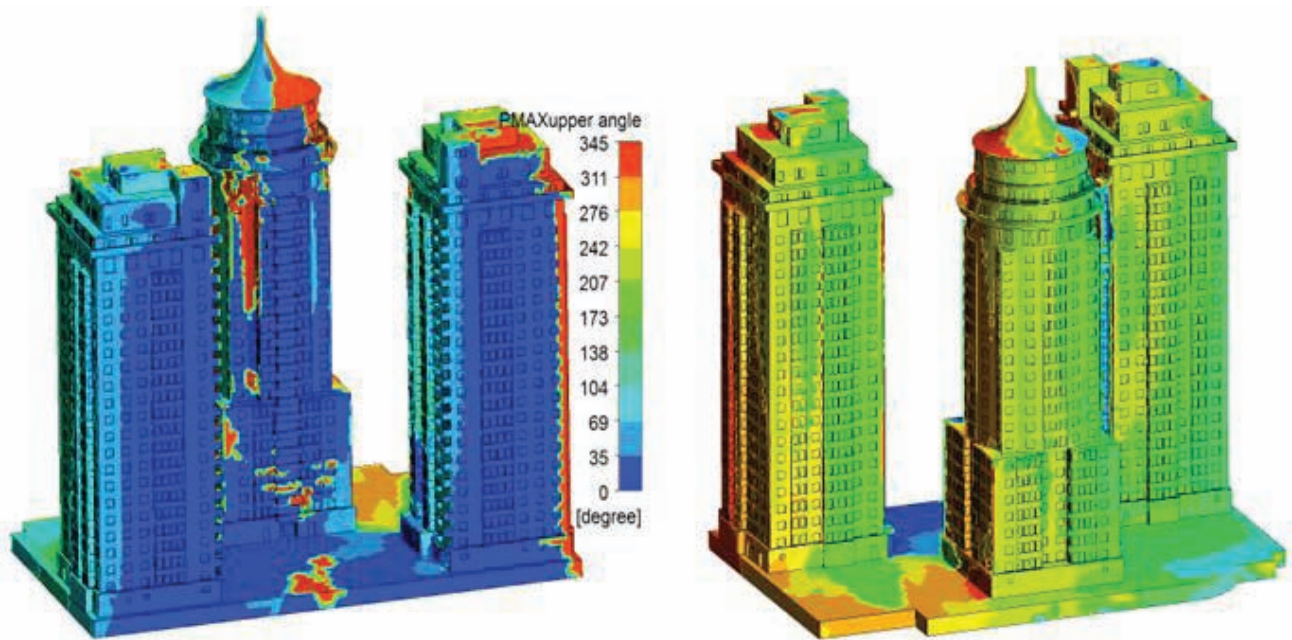


*The upper envelope of the maximum values of wind pressure (Pa)
on facade structures of the Complex
(Maximum - 972 Pa, Minimum – -49 Pa).*

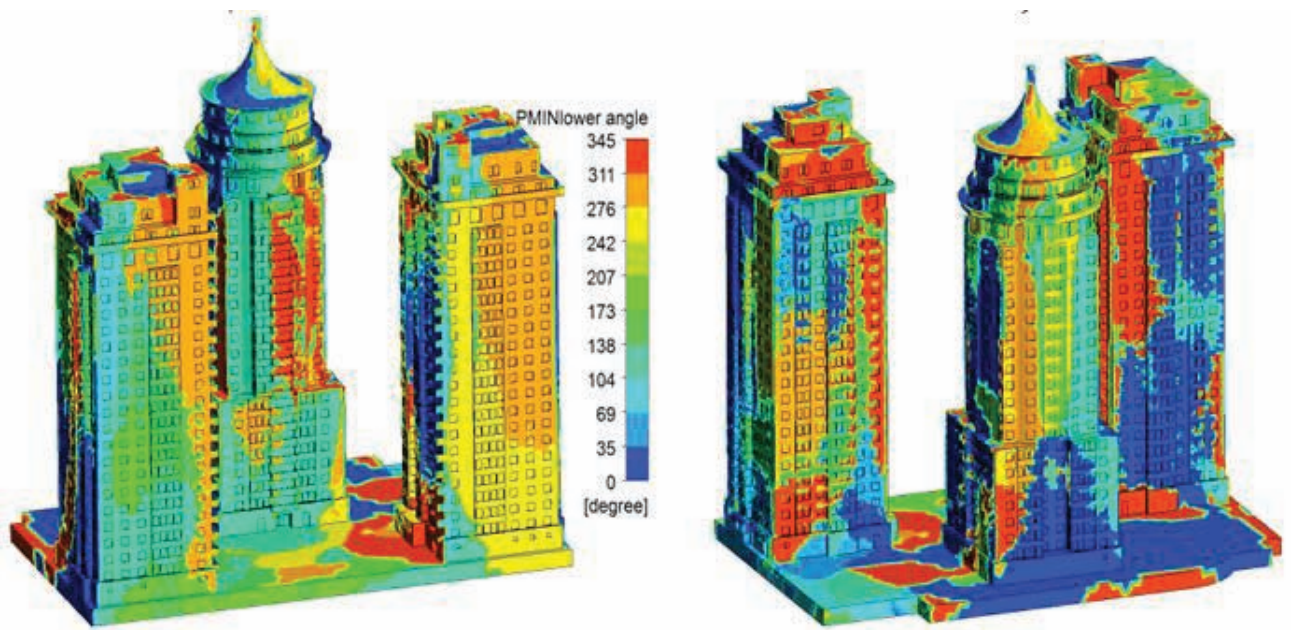


*The lower envelope of the maximum values of wind pressure (Pa)
on facade structures of the Complex
(Maximum - -171 Pa, Minimum – -2231 Pa).*

Figure 7. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex , located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).



Angle of wind impact ($^{\circ}$), at which the upper envelope of the maximum values of wind pressure is realized on the facade structures of the Complex



Angle of wind impact ($^{\circ}$), at which the lower envelope of the minimum values of wind pressure is realized on the facade structures of the Complex

Figure 8. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex, located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).

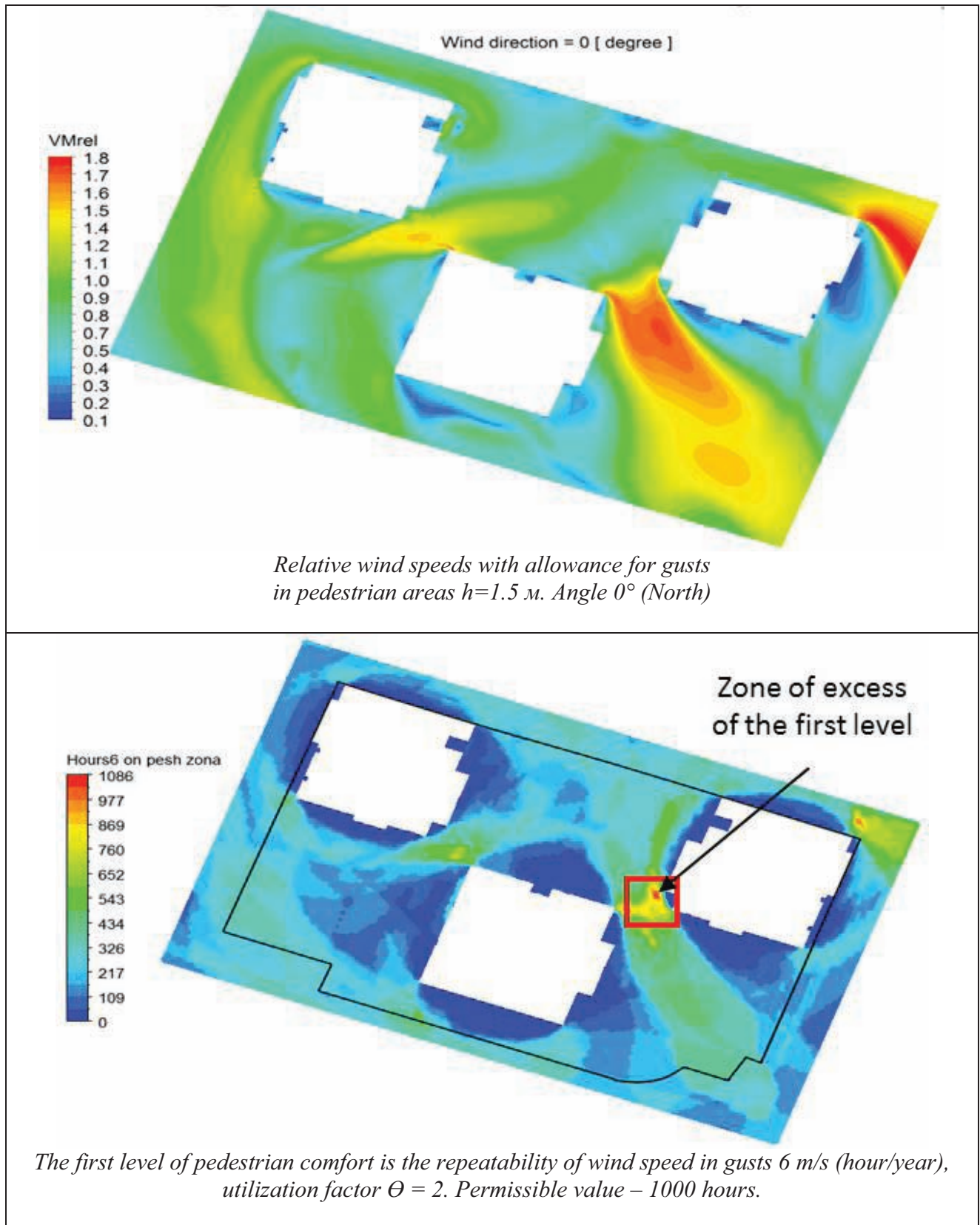
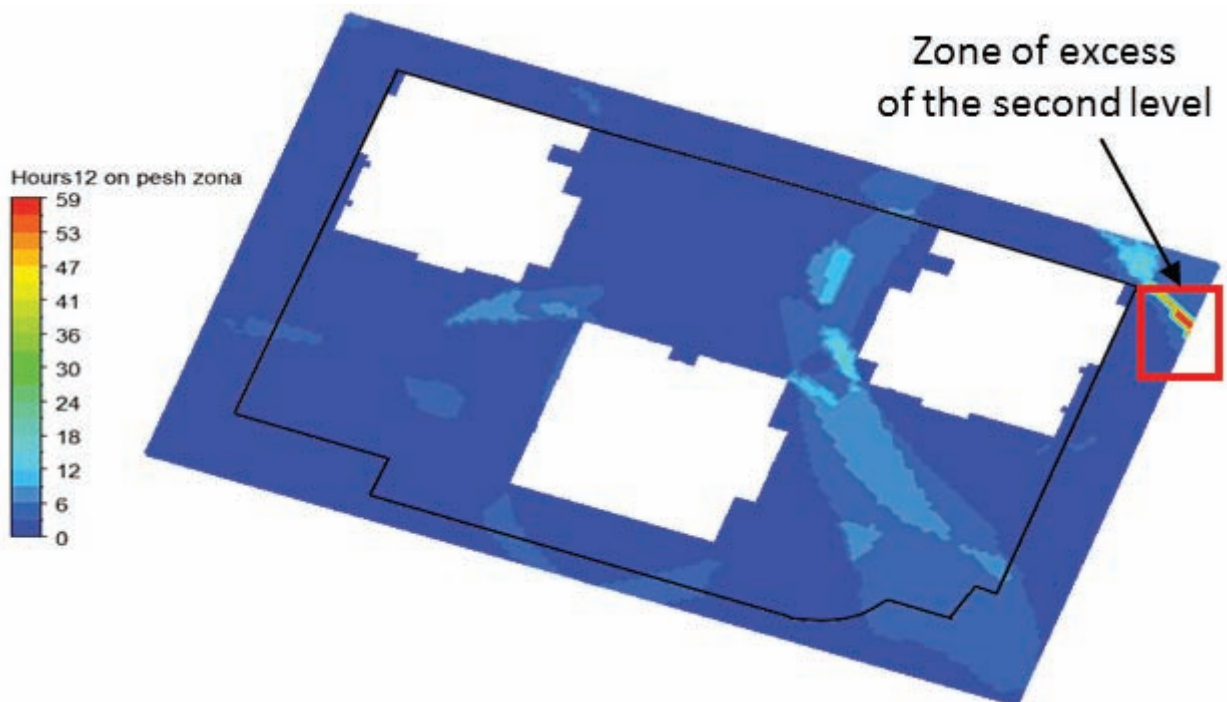
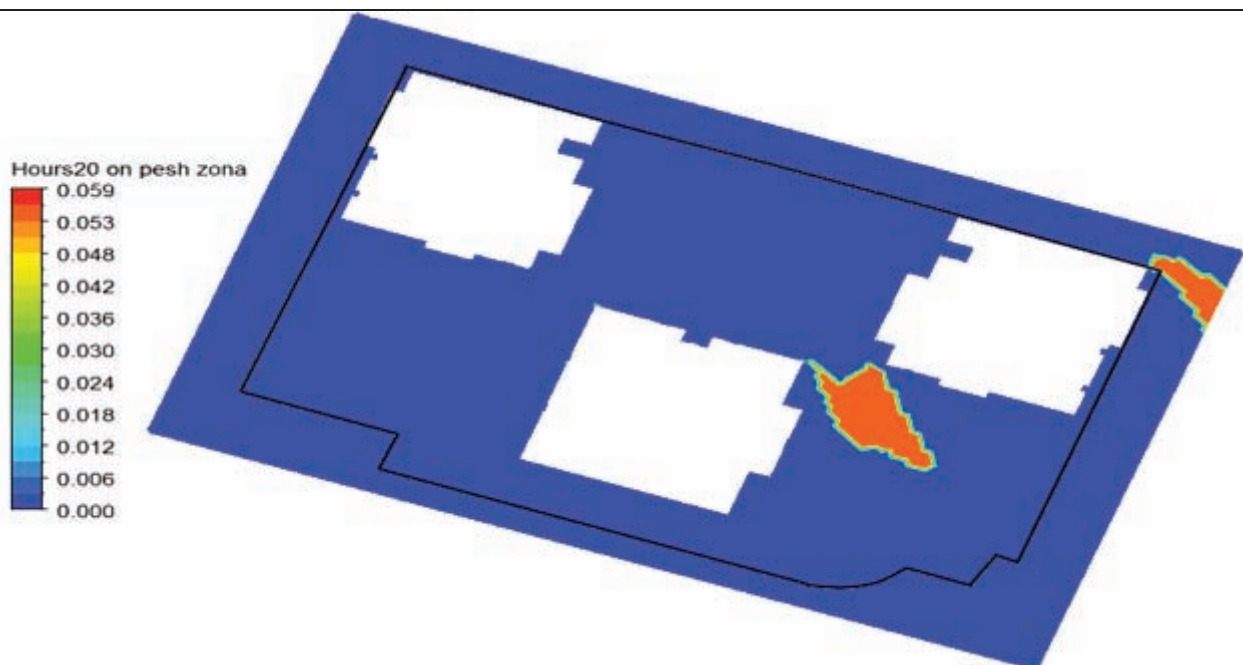


Figure 9. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex , located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).

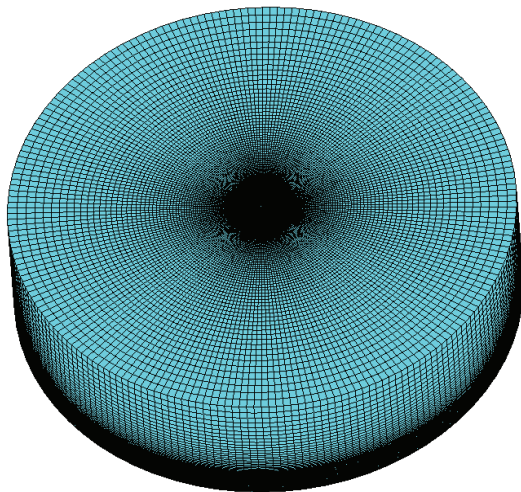
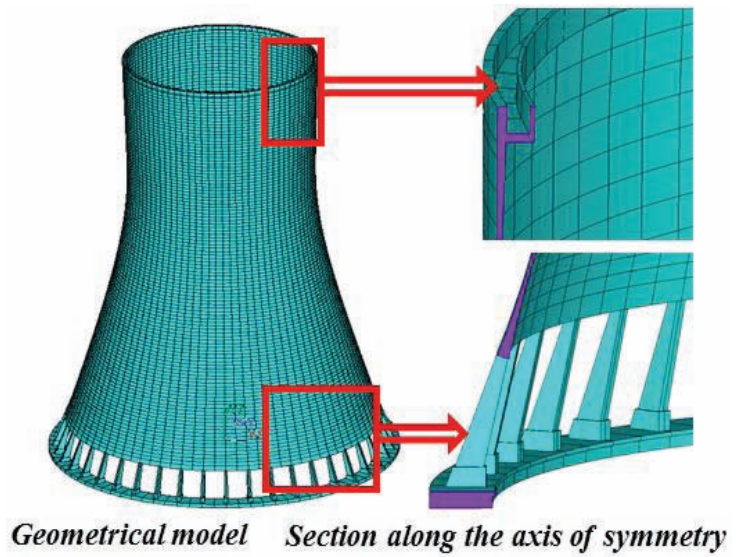
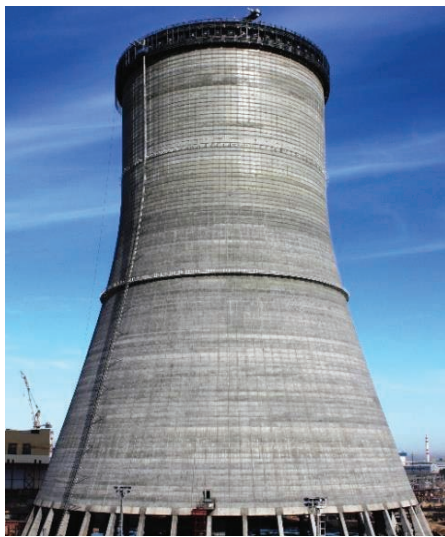


The second level of pedestrian comfort is the repeatability of wind speed in gusts 12 m/s (hour/year), utilization factor $\Theta = 2$. Permissible value – 50 hours.

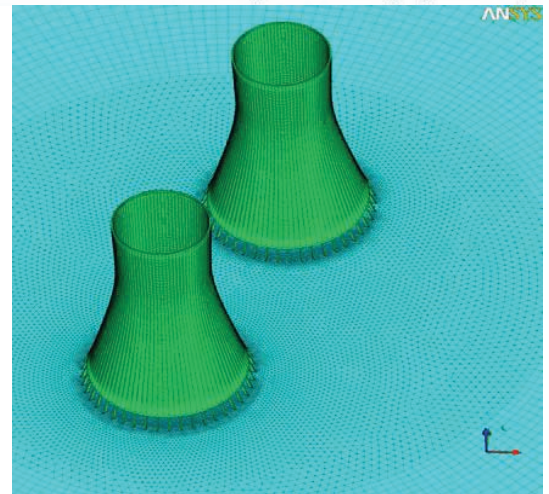


The third level of pedestrian comfort is the repeatability of wind speed in gusts 20 m/s (hour/year), utilization factor $\Theta = 2$. Permissible value – 5 hours

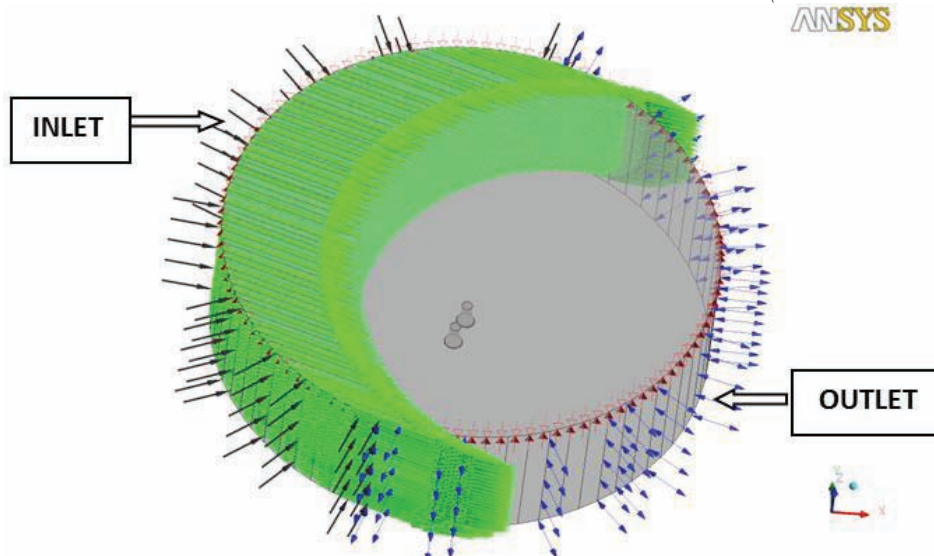
Figure 10. Sample of computing of wind loads on load-bearing and facade structures and pedestrian comfort of buildings of a residential complex, located at Pushkino, Moscow Region (ANSYS CFD).



Computational domain(5.28 millions of elements)

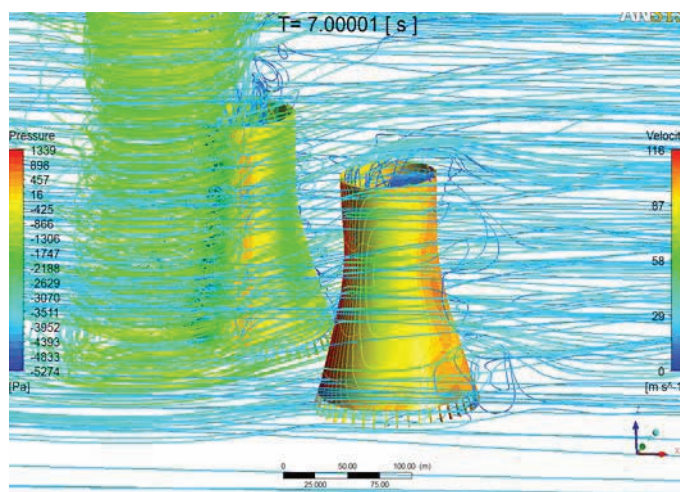
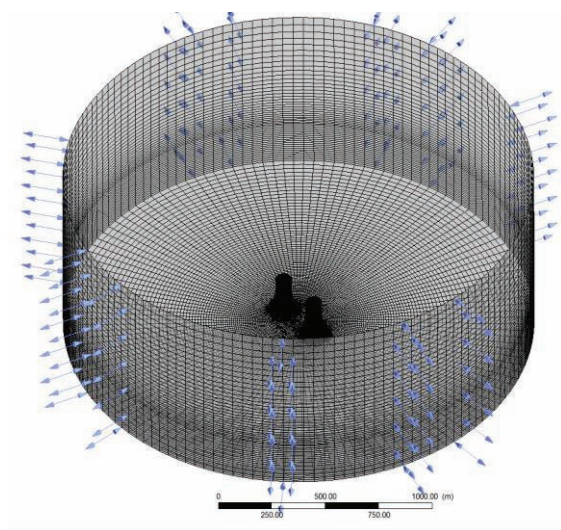


*Surface mesh on cooling towers
(model with 5.28 million of elements)*

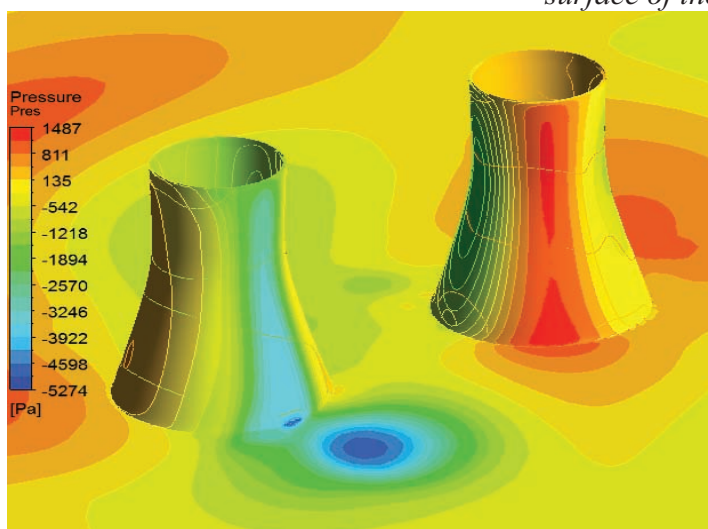


*Computational domain
with the indicated
boundary conditions.
Angle of wind impact
 0°*

Figure 11. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).

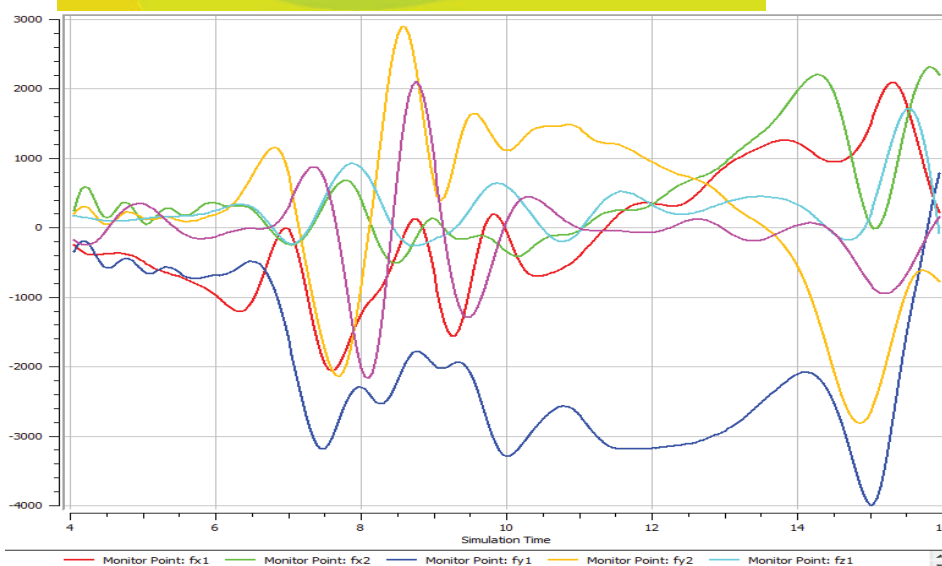


The time is 7 seconds after the start of the “movement” of the tornado. Pressure (Pa) on the surface of the cooling towers, streamline pattern.



The time is 7 seconds after the start of the “movement” of the tornado.

Pressure (Pa) on the surface of the cooling towers and on the plane $z = 10$ m.



Total loads (ton-force) FX and FY on the first and the second cooling towers caused by tornado (s).

Figure 12. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).

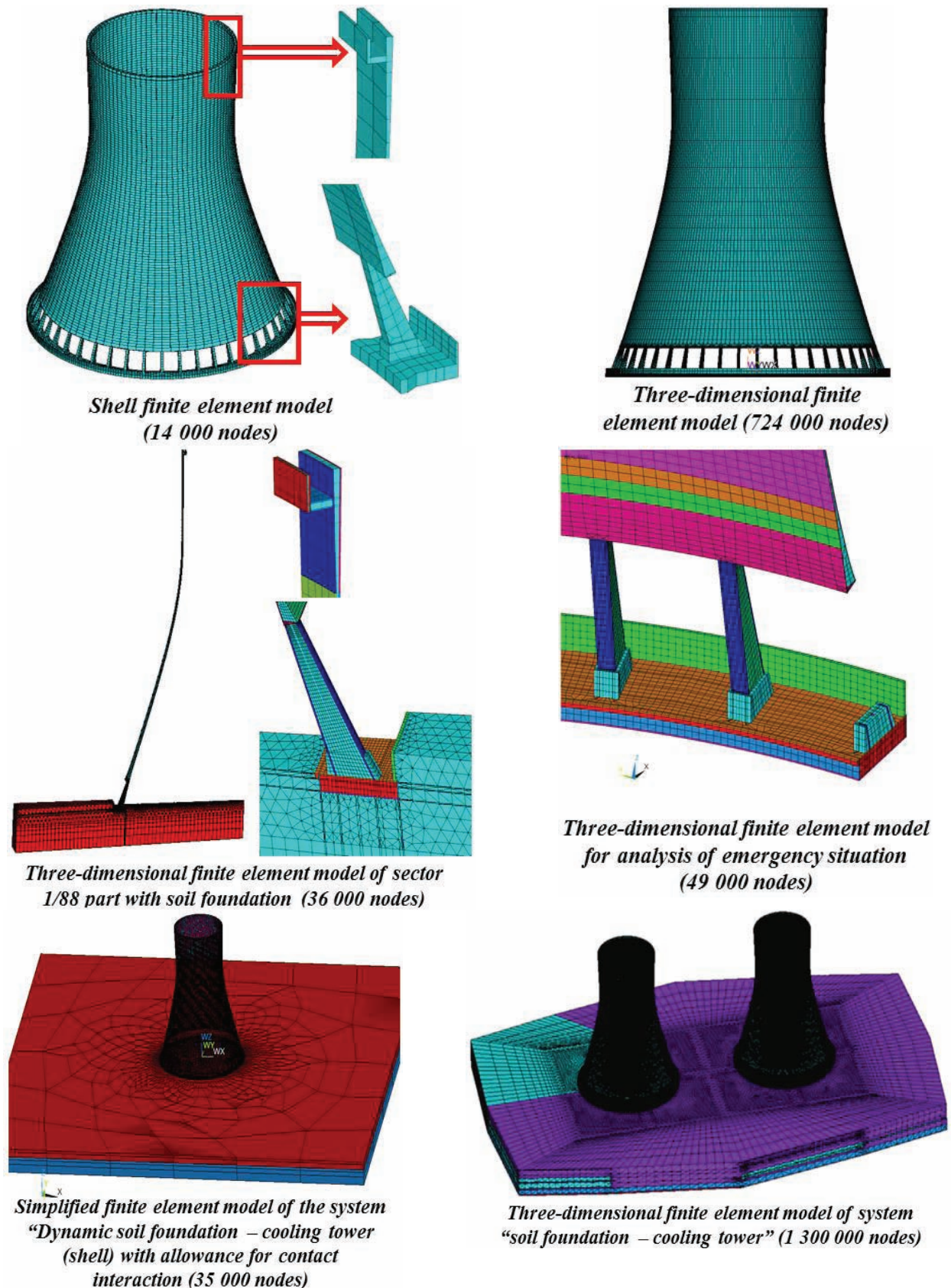


Figure 13. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).

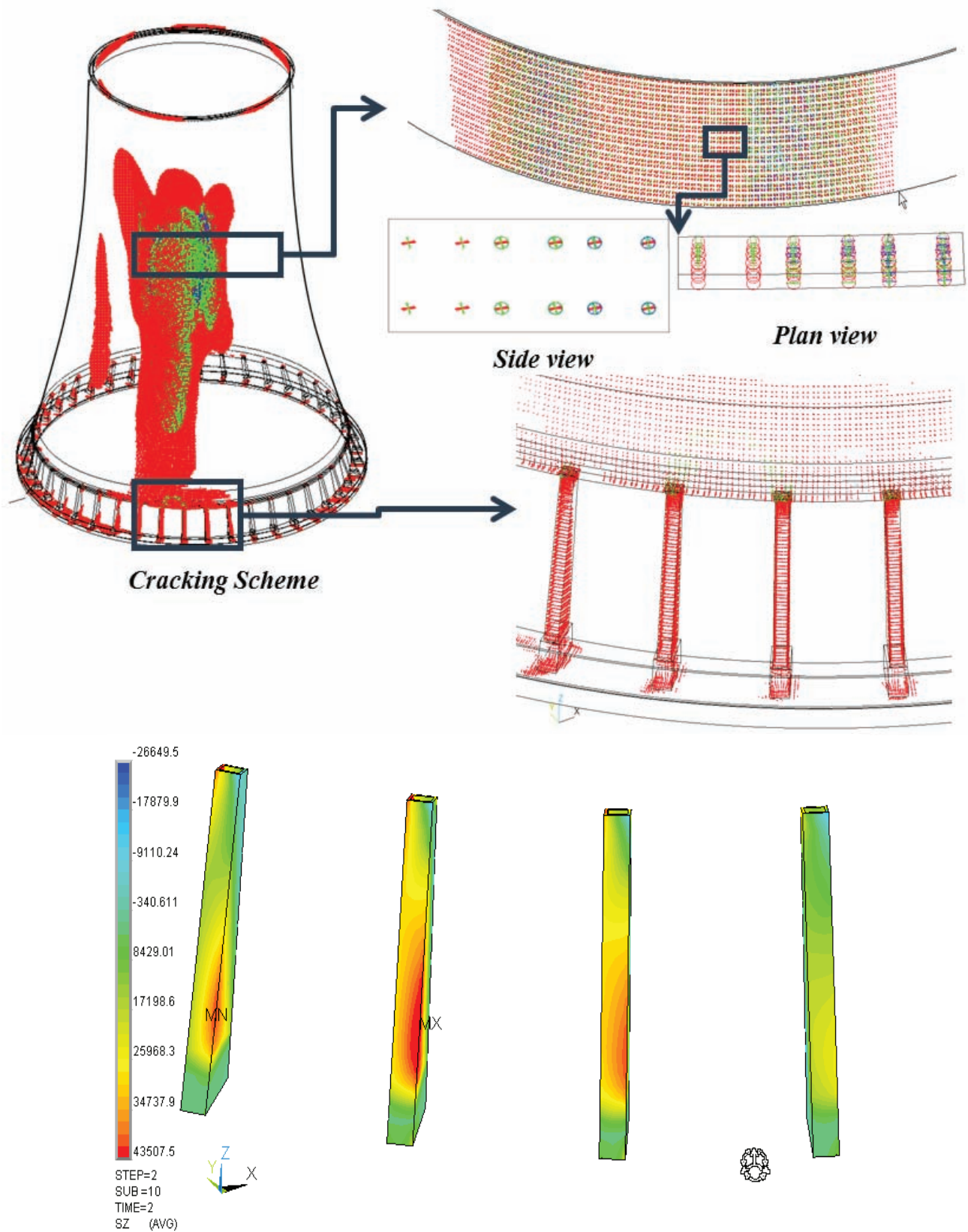
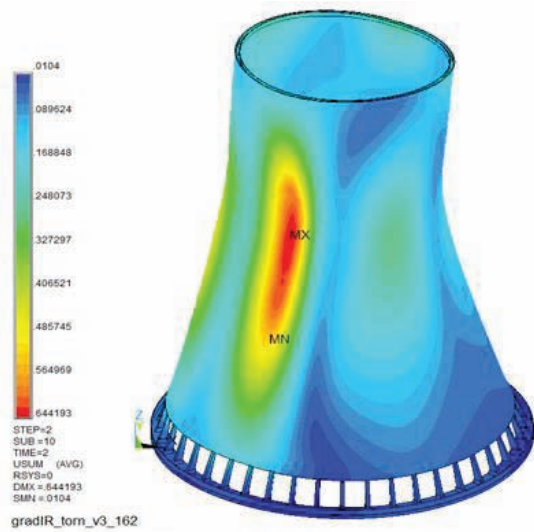
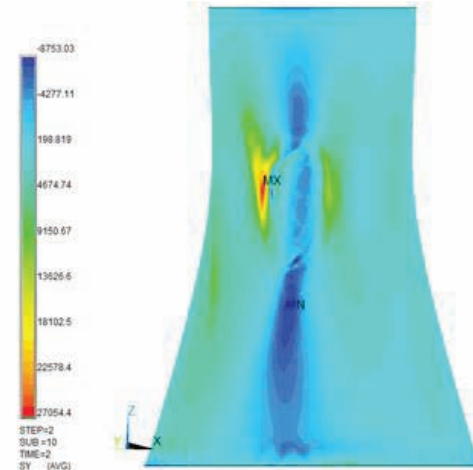


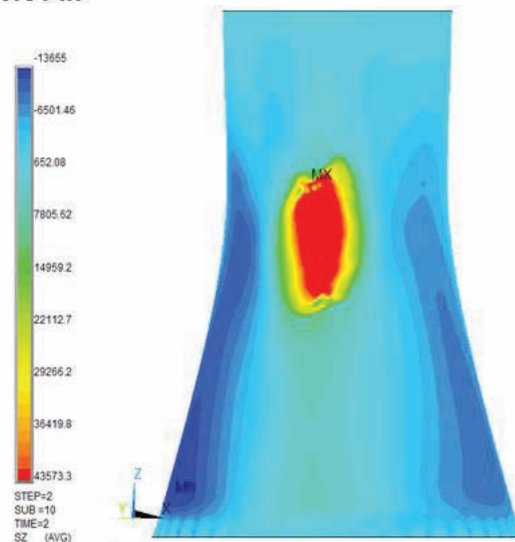
Figure 14. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).



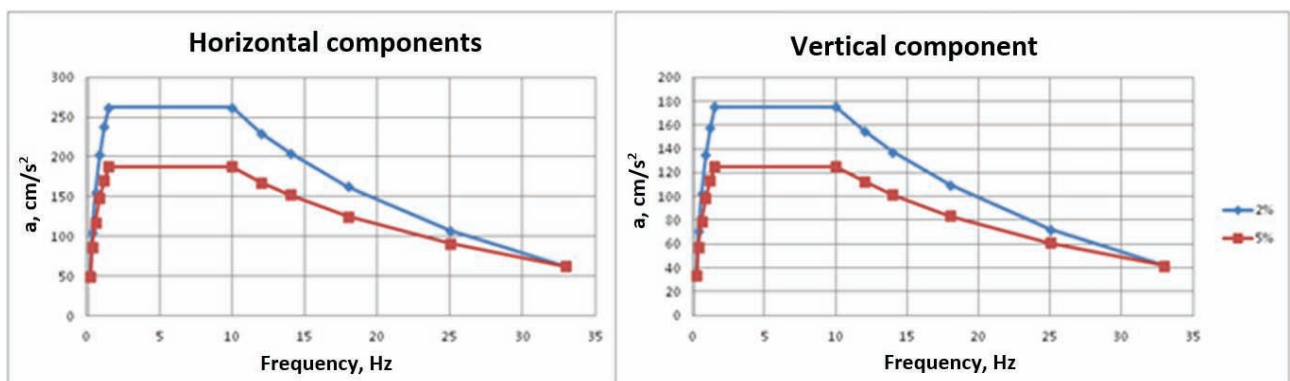
*The total displacement,
Maximum value 0.64 m*



*Stress (tnf/m²) in lateral reinforcement of shell.
From -8753 to 27054 tnf/m²*



*Stress (tnf/m²) in meridional reinforcement of shell.
From -13655 to 43573 tnf/m²*



Response spectra (cm/s²) for the Basic NPP-2006 Project, intensity 6 on the MSK-64 scale

Figure 15. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).

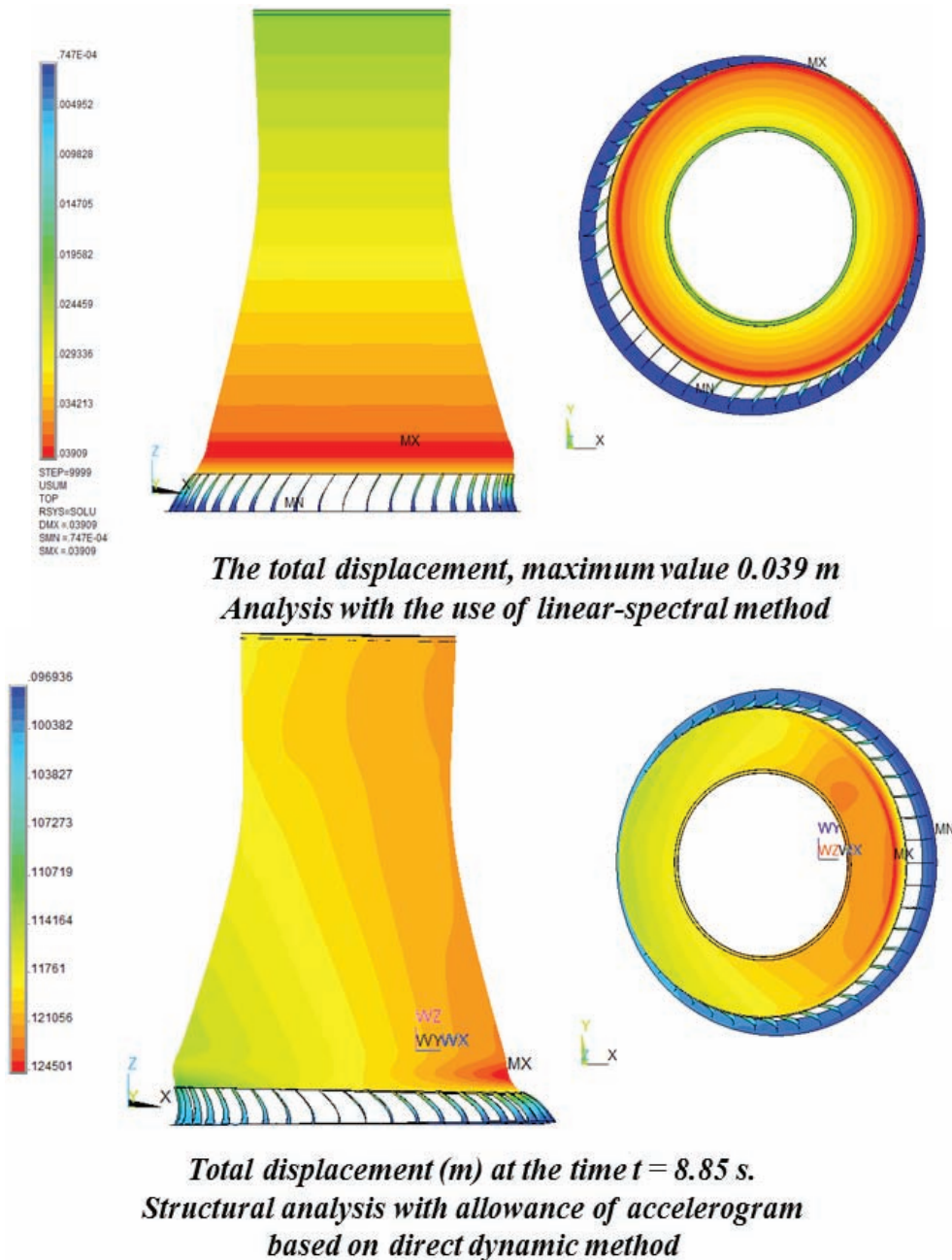
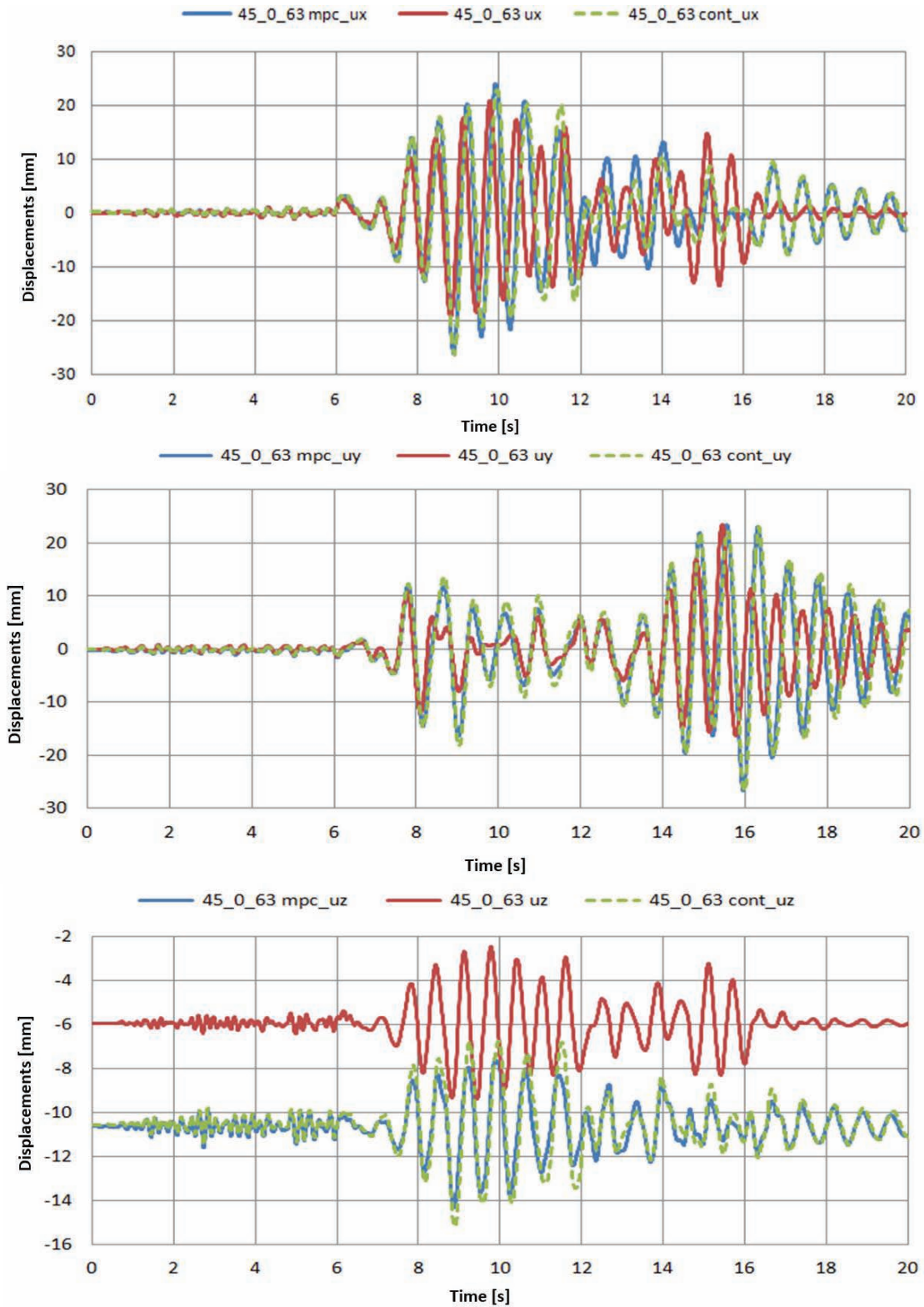


Figure 16. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).

dynka (Moscow), sports complex “Moskvich” (Moscow), indoor swimming pool of the “Iskra” sanatorium (Sochi), ice palace “Bolshoi” (Sochi), bobsleigh track “Sanki” and the ski complex “Gorki” (Sochi, Winter Olympic Games – 2014), football stadiums of the World Cup 2018 (“Zenit” (Saint-Petersburg), “Spartak” (Moscow), stadiums located at

Volgograd, Samara, Nizhny Novgorod and Rostov-on-Don); multifunctional high-rise complexes (including Moscow International Business Center “Moscow-City”, Poklonnaya (Moscow), Profsoyuznaya (Moscow), Leningradskaya (Moscow), building located at Volgograd, Omsk, Vladivostok, Krasnodar, Kiev, Astana), multi-block shopping and



Nodal displacements UX, UY, UZ (mm) at a height of 63 m relative to base (for three formulations): blue line – “continuous” MPC contact, red line – rigid foundation, green dashed line – standard contact

Figure 17. Wind aerodynamics. Evaporative cooling towers of Novovoronezh nuclear power plant – 2 (sample). Three-dimensional CFD-model (ANSYS CFD).



Figure 18. Analysis of stress-strain state, strength and stability of load-bearing structures of football stadiums of the World Cup 2018 (ANSYS). Samples.

entertainment centers, multi-storey panel block sections and monolithic buildings, schools and polyclinics, banners with allowance for initial tension of ropes, wind loads and other factors);

- overground and underground pipelines of heating systems, main oil and gas pipelines, petrochemical and gas pipelines and equipment (analysis of “Sakhalin – Khabarovsk – Vladivostok” gas pipeline system is among the last comprehensive and “breakthrough” researches);
- wind power plants of various types and capacities;
- loading structures and platforms for the offshore extraction of oil and gas;

- arious bio- and nanostructures (for example, double linear and closed DNA (deoxyribonucleic acid) helices).
- – complex mechanical engineering structures, machines and mechanisms including aerospace systems, transport, ship-building, power engineering, ferrous and non-ferrous metallurgy, consumer electronics, etc. (analysis of stress-strain state, dynamic response and strength of the coupled system “Science power platform – drive unit – solar batteries” and subsystems of the International Space Station (ISS) “Alpha” at the stages of launch and orbital activity.

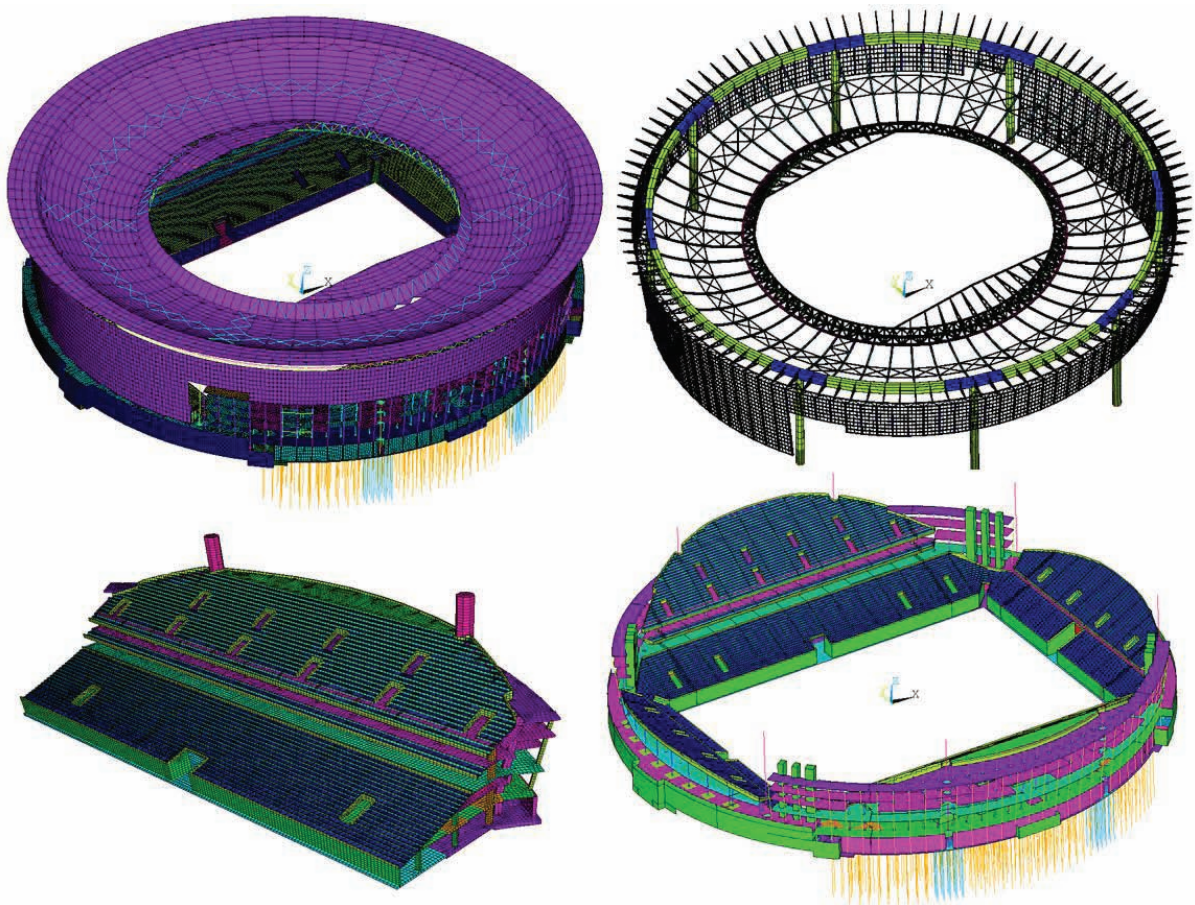


Figure 19. Analysis of stress-strain state, strength and stability of load-bearing structures of football stadiums of the World Cup 2018 (ANSYS). Samples.

2. Complex, including record-sized (up to 200 million unknowns) three-dimensional stationary and non-stationary problems of building aerodynamics dealing with computing of average and pulsating components of wind loads, wind loads on facade and enclosing structures, pedestrian comfort of numerous unique objects:
 - high-rise buildings, structures and complexes (Moscow International Business Center “Moscow-City”, “Gazoil City” (Moscow), “Zodiac” (Moscow), “Sky Fort” (Moscow), “Dirigible” (Moscow), “Rublevsky Lights” (Moscow), “Aqua-marine” (Vladivostok), group of buildings of National Research Moscow State University of Civil Engineering, Ostankino TV Tower in Moscow, buildings located at Saint-Petersburg, Kiev, Astana, etc.);
 - large-span buildings and structures (stadiums “Moskvich” (Moscow), “Zenit” (Saint-Petersburg), railway station in Adler, a ski jumping complex of Winter Olympic Games – 2014, etc.);
 - monuments (monument on Poklonnaya Hill (Moscow), monuments “Conquerors of the Cosmos” and “Worker and Collective Farm Girl” at the Exhibition of Economic Achievements (VDNKh, Moscow), etc.);
 - complex of basic structures of nuclear power plant with WWER (reactor compartments, engine rooms, evaporative cooling towers, etc.) with allowance for extreme (hurricane) wind and tornado.

Besides, contemporary problems of refined numerical modelling and aircraft crashes are considered for the basic structures of nuclear power plants of various types (WWER, RBMK and BN).

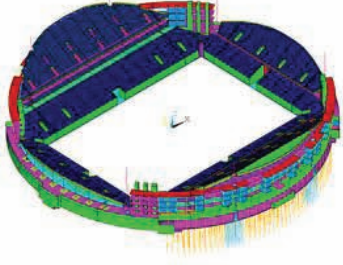
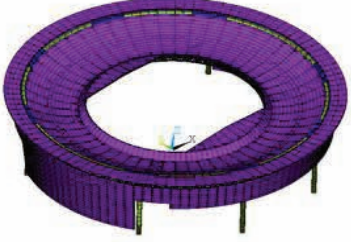

No.	Finite element models of system / subsystem	Visualization	Number of nodes	Number of elements	Types of finite elements	File name
1	“foundation – reinforced concrete structures of stadium bowl”		275 437	329 204	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14	EKB_bowl.db
2	“steel structures of roof”		37 660	21 662	BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14	EKB_roof.db
3	“foundation – reinforced concrete structures of stadium bowl – steel structures of roof”		312 636	350 382	SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14	EKB_all.db

Figure 20. Analysis of stress-strain state, strength and stability of load-bearing structures of football stadiums of the World Cup 2018 (ANSYS). Samples.

ACKNOWLEDGMENT

The Reported study was Funded by Government Program of the Russian Federation “Development of science and technology” (2013-2020) within Program of Fundamental Researches of Ministry of Construction, Housing and Utilities of the Russian Federation and Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, the Research Project 7.1.1”.

REFERENCES

1. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
2. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // MATEC Web Conferences, Vol. 86 (2016) 8 pages.

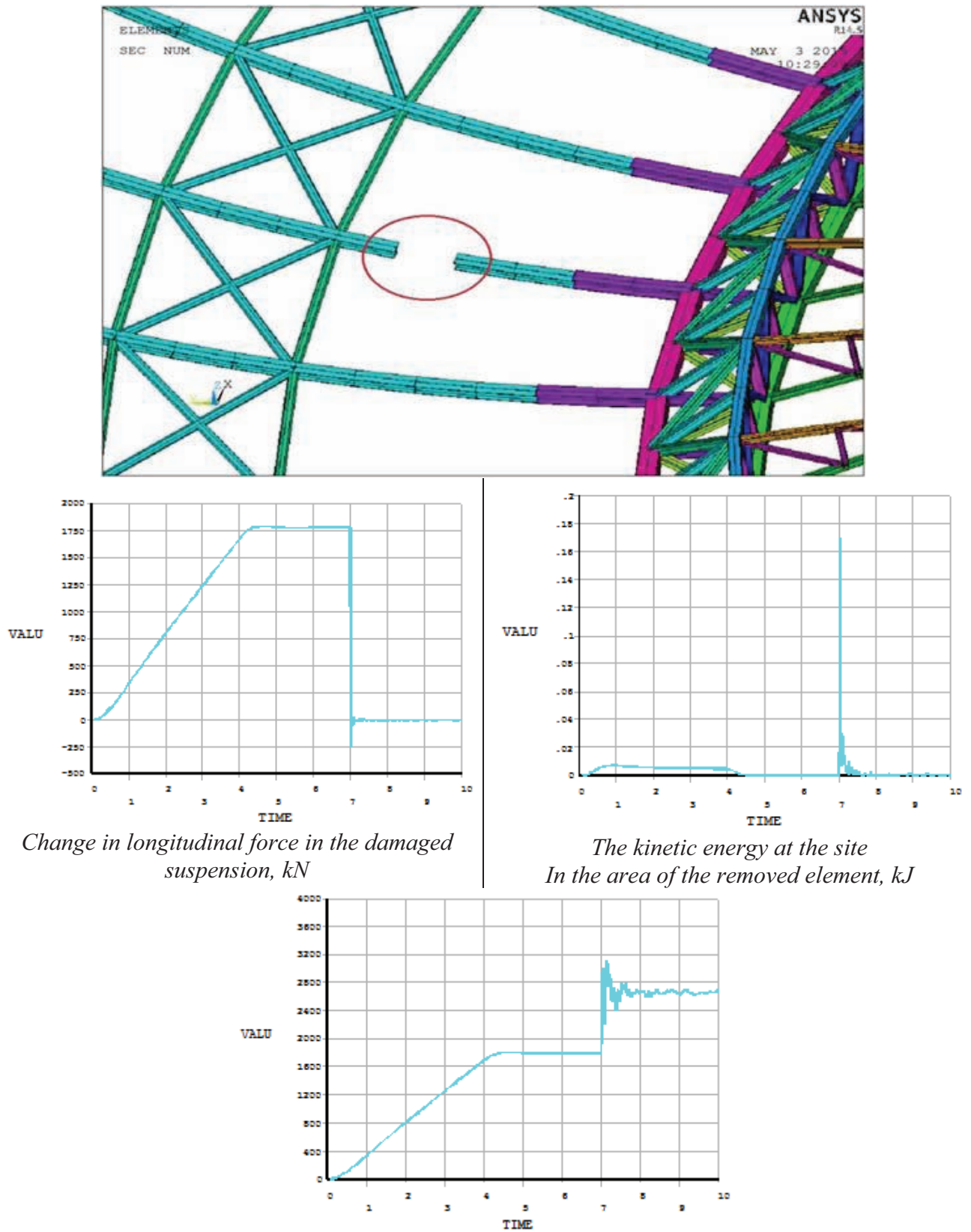


Figure 21. Analysis of stress-strain state, strength and stability of load-bearing structures of football stadiums of the World Cup 2018 (ANSYS). Samples.

3. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // MATEC Web Conferences, Vol. 86 (2016) 8 pages.
4. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
5. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
6. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // Procedia Engineering, Vol. 91 (2014), pp. 2-7.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 89-94.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 95-103.
9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // Procedia Engineering, Vol. 91 (2014), pp.14-19.
10. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
11. **Alawadhi E.M.** Finite Element Simulations Using ANSYS, CRC Press, 2009, 416 p.
12. **Barbero E.J.** Finite Element Analysis of Composite Materials Using ANSYS, CRC Press, 2013, 366 p.
13. **Belostosky A.M., Akimov P.A.** Adaptive Finite Element Models Coupled with Structural Health Monitoring Systems for Unique Buildings. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 83-88.
14. **Belostosky A.M., Akimov P.A., Afanasyeva I.N.** Multilevel Methodology of Numerical Seismic Analysis of Coupled Systems "Foundation – Shell – Pontoon (Floating Roof) –Column(s) – Fluid". // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 89-94.
15. **Belostosky A.M., Akimov P.A., Kaytukov T.B., Petryashev N.O., Petryashev S.O., Negrozov O.A.** Strength and Stability Analysis of Load-bearing Structures of Evolution Tower with Allowance for Actual Positions of Reinforced Concrete Structural Members. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 95-102.
16. **Belostosky A.M., Penkovoy S.B., Scherbina S.V., Akimov P.A., Kaytukov T.B.** Correct Numerical Methods of Analysis of Structural Strength and Stability of High-Rise Panel Buildings – Part 1: Theoretical Foundations of Modelling, Key Engineering Materials, Vol. 685 (2016) pp. 217-220.
17. **Belostosky A.M., Penkovoy S.B., Scherbina S.V., Akimov P.A., Kaytukov T.B.** Correct Numerical Methods of Analysis of Structural Strength and Stability of High-Rise Panel Buildings – Part 2: Results of Modelling. // Key Engineering Materials, Vol. 685 (2016) pp. 221-224.
18. **Dill E.H.** The Finite Element Method for Mechanics of Solids with ANSYS Applications, CRC Press, 2011, 508 p.

19. **Hanson R.J., Hopkins T.** Numerical Computing With Modern Fortran (Applied Mathematics), SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013, 260 p.
20. **Lee H.H.** Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 16, SDC Publications, 2015, 610 p.
21. **Madenci E., Guven I.** The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS, Springer, 2015, 657 p.
22. **Moaveni S.** Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS, Prentice Hall, 2014, 936 p.
23. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 926-932.
24. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** Finite Elements and Approximation. Dover Publications, 2006, 352 p.
25. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Volume 2. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 p.
26. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 p.

Irina N Afanasyeva, Ph.D., Applied Mathematics and Computer Sciences; Director of Research & Education Center of Computation Simulation; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, YaroslavskoeShosse, 129337, Moscow, Russia; tel./fax: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Taymuraz B. Kaytukov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Vice Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: tkaytukov@gmail.com.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ), заместитель директора научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов НИУ МГСУ; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, StaDyO Research & Engineering Center; Deputy Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Афанасьева Ирина Николаевна, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики, директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; Национальный исследовательский университет Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, заместитель главного ученого секретаря Российской академии архитектуры и строительных наук; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; e-mail: tkaytukov@gmail.com.

THE MODIFIED MOHR – COULOMB AND DRUCKER – PRAGER MODELS. INFLUENCE OF ECCENTRICITY ON HYSTERESIS LOOP AND ENERGY LOSS

Alexander V. Dudchenko^{1,2}, Sergey V. Kuznetsov^{1,3}

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² LLC “Podzemproekt”, Moscow, RUSSIA

³ Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

Annotation: The eccentricity parameters appearing in the modified Mohr-Coulomb and Drucker-Prager models are studied. The influence of the eccentricity on shape and size of the hysteretic loop and plastic dissipation energy are analyzed. Both kinematic and force loadings are considered.

Keywords: Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, eccentricity, hysteresis, plastic dissipation energy

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ МОРА – КУЛОНА И ДРАКЕРА – ПРАГЕРА. ВЛИЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ НА ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ПЕТЛИ И ДИССИПАЦИЮ ЭНЕРГИИ

А.В. Дудченко^{1,2}, С.В. Кузнецов^{1,3}

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² ООО «Подземпроект», г. Москва, РОССИЯ

³ Институт проблем механики Российской академии наук, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Изучены параметры эксцентриситета, появляющиеся в модифицированных моделях Мора – Кулона и Дракера – Прагера. Проанализировано влияние эксцентриситетов на форму и размер гистерезисной петли, и диссипацию энергии при работе модели в пластическом состоянии.

Ключевые слова: Мор – Кулон, Дракер – Прагер, эксцентриситет, гистерезис, пластическая диссипация энергии

1. INTRODUCTION

The analyzed modified Mohr-Coulomb [1] and modified Drucker-Prager [2] models differ from the original plasticity models [3] by introducing the eccentricity parameters allowing to avoid the loss of smoothness at the apex points of the corresponding yield surfaces (meridional eccentricity), and, for a Mohr-Coulomb model, to eliminate losses of smoothness at the pyramid edges (deviatoric eccentricity). Thus, the modified Mohr-Coulomb model is characterized by the two eccentricity parameters: meridional and deviatoric eccentricities, while the modified

Drucker-Prager is characterized by the deviatoric eccentricity only.

Both the original Mohr-Coulomb and Drucker-Prager models can be characterized by the following equation

$$f(p, q_\sigma, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) \equiv R(\Theta, \varphi) q_\sigma - c(\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) - p \tan \varphi = 0 \quad (1.1)$$

where c is the cohesion, possibly depending on the plastic strain measure $\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|$ in a case of

plastic hardening; φ is the angle of internal friction; the pressure p is defined by

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.2)$$

the deviatoric stress measure takes the form

$$q_{\sigma} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \\ \text{Mohr-Coulomb} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{II_{\sigma} - 3p^2} \\ \text{Drucker-Prager} \end{cases} \quad (1.3)$$

in (1.3) σ_{\max} , σ_{\min} are maximum and minimum principle stresses, respectively, and

$$II_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma};$$

$R(\Theta, \varphi)$ is the dimensionless parameter depending on φ and the angle Θ between the meridional plane and the axis of one of the principle stresses, the pressure. In the Mohr-Coulomb model the coefficient $R(\Theta, \varphi)$ takes the form

$$R(\Theta, \varphi) = \frac{\sin\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3} \cos \varphi} + \frac{1}{3} \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right) \tan \varphi \quad (1.4)$$

Similar formula for the coefficient $R(\Theta, \varphi)$ can be introduced for the Drucker-Prager model.

1.1. Deviatoric eccentricity. The deviatoric eccentricity is introduced by the following equation that modifies the original Mohr-Coulomb model:

$$R_e(\Theta, \varphi) = \frac{\left[4(1-e^2)\cos^2\Theta + (2e-1)^2\right](3-\sin\varphi)}{6\cos\varphi \left[2(1-e^2)\cos\Theta + (2e-1)\sqrt{4(1-e^2)\cos^2\Theta + 5e^2 - 4e}\right]} \quad (1.5)$$

The smoothing parameter e varies in the interval $\frac{1}{2} < e \leq 1$, and while at $e=1$ the coefficient $R_1(\Theta, \varphi)$ becomes independent upon Θ

$$R_1(\Theta, \varphi) = \frac{3 - \sin \varphi}{6 \cos \varphi + 1} \quad (1.6)$$

at $e \rightarrow \frac{1}{2}$ the smoothed curve tends to Rankine's triangle corresponding to the friction angle $\varphi = 90^\circ$.

1.2. Meridional eccentricity. In the meridional plane both the Mohr-Coulomb and the Drucker-Prager model admit the following smoothness that can be characterized by the hyperbolic potential

$$g(p, q_{\sigma}, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) \equiv \sqrt{(R_e(\Theta, \varphi) q_{\sigma})^2 + (\varepsilon c(0) \tan \varphi)^2} - p \tan \varphi = 0 \quad (1.7)$$

where ε is the smoothing parameter varied in the interval $0 < \varepsilon < 1$. At $\varepsilon \rightarrow 0$ the hyperbolic approximation tends to the initial curve (1.1), (for a modified Mohr-Coulomb model the coefficient $R(\Theta, \varphi)$ should be replaced by the smoothed coefficient $R_e(\Theta, \varphi)$). At $\varepsilon \rightarrow 1$ the smoothed curve in the meridional plane becomes a hyperbola with locus at $p = c(0)$.

2. FE SIMULATIONS

Herein, some results based on numerical simulation of behavior of elastoplastic media are

presented. The given results were carried out by FE code using Drucker-Prager and Mohr-Coulomb models of plasticity (yield criteria).

2.1 Finite element model. The model is a cube with the size of one finite element. The displacements along the x axis on the face of the cube which is parallel to YOZ are fixed, while on the opposite face cyclic loading is applied, Figure 1. This loading can be given as a kinematic or force factor with the frequency ν . Other faces of the model are free. In addition, volumetric kinematic loading will be also considered. In that case, the displacements along the Z, X and Y axis are fixed on the three faces which are parallel to XOY, YOZ and XOZ respectively. On the opposite faces cyclic kinematic loading are applied.

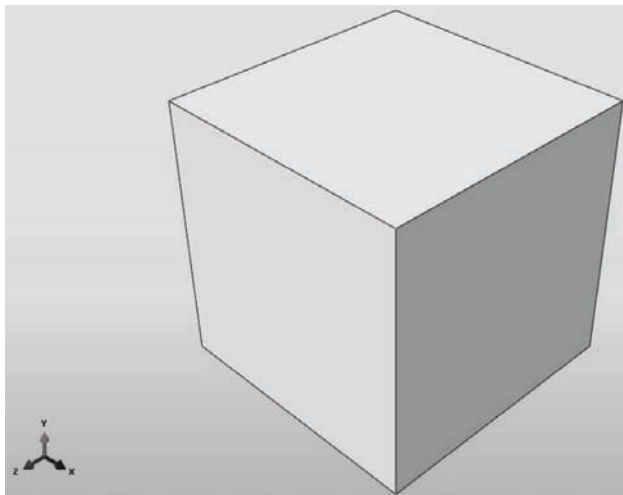


Figure 1. Finite element model.

Comparing the energy dissipated by plastic deformation (2.1) as well as strain-stress curves gives the information on the influence of variables included in the mathematical models of plastic media (damping factor and eccentricities).

$$A^p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (2.1)$$

2.2 The influence of damping factor. Damping factor is used for automatic stabilization of static problems during the non-linear quasi-

static solution procedure. Viscous forces are added to the global equilibrium equations in the form:

$$F = dM\mathbf{v}, \quad (2.2)$$

where d is the damping factor, M is the mass matrix,

$$\mathbf{v} = \Delta \mathbf{u} / \Delta t$$

is vector of nodal velocities (in the context of this problem it does not have a physical meaning). This value is used to ensure the convergence of the solution. Nevertheless, there is no guarantee that the value of damping will be suitable for the problem. Therefore, it is important to estimate whether the quantity is appropriate for the convergence of the solution.

a. Hardening plasticity. The hardening, as a result of the influence of symmetric and asymmetric cyclic loading, was simulated using Mohr-Coulomb plasticity model.

Variation of the character of stress-strain curves, due to variation of the damping factor at other fixed parameters in the model, subjected to cyclic loading is presented in Figures 2 and 3.

The charts in figures 2 and 3 are plotted at $\varphi = \psi = 0$, $decc = 1$, $mecc = 0.1$ and $c = 0.001$, where φ (phi) is the angle of internal friction, ψ (psi) is the dilation angle, c is cohesion, $decc$ and $mecc$ are deviatoric and meridional eccentricities respectively.

As can be seen from the charts above, even large values of the damping factor can ensure the convergence of the solution procedure. However, the large values are not suitable because a further decline in the damping factor affects the solution significantly. Thus, the maximum value for damping is $1e-6$, as further decreases do not cause any substantial changes. Similar results were obtained for asymmetric loading (Figures 4 and 5). The charts in Figures 4 and 5 are plotted at $\varphi = \psi = 0$, $c = 0.001$, $decc = 1$ and $mecc = 1$.

Thus, to be suitable for the problem, the value of the damping factor should not affect the character of stress-strain curves when it decreases.

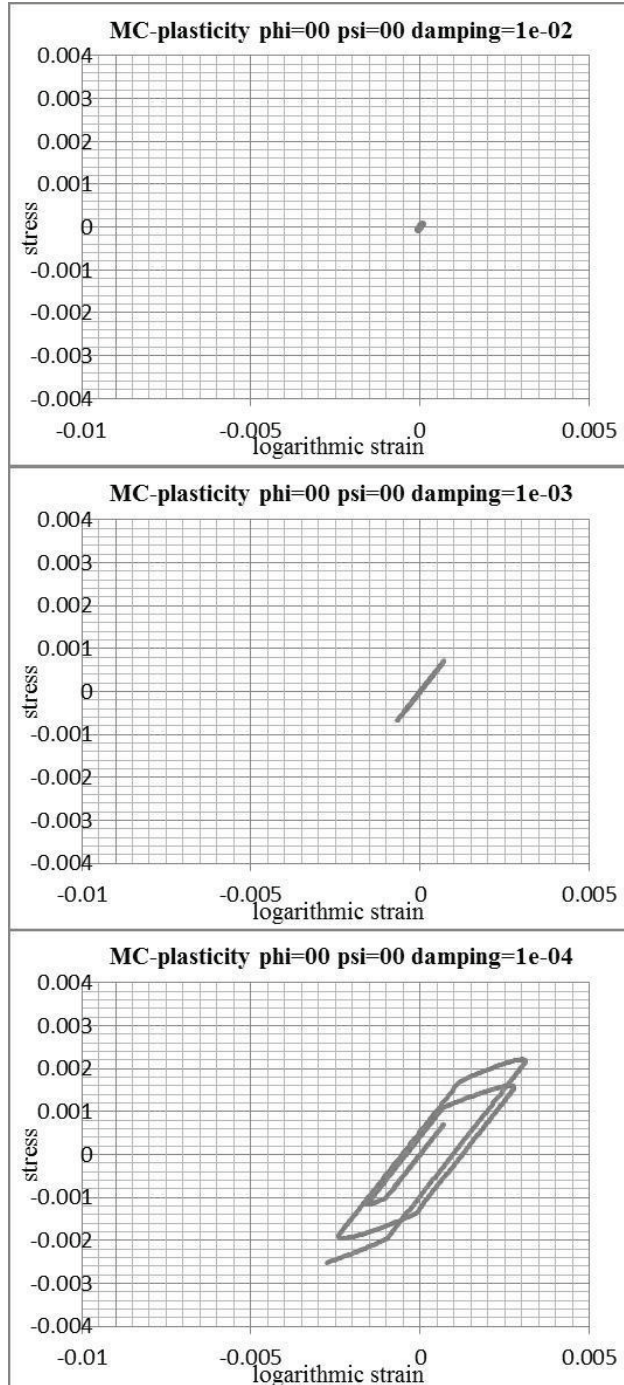


Figure 2. Stress-strain curves for symmetric cycle loading at different values of damping.

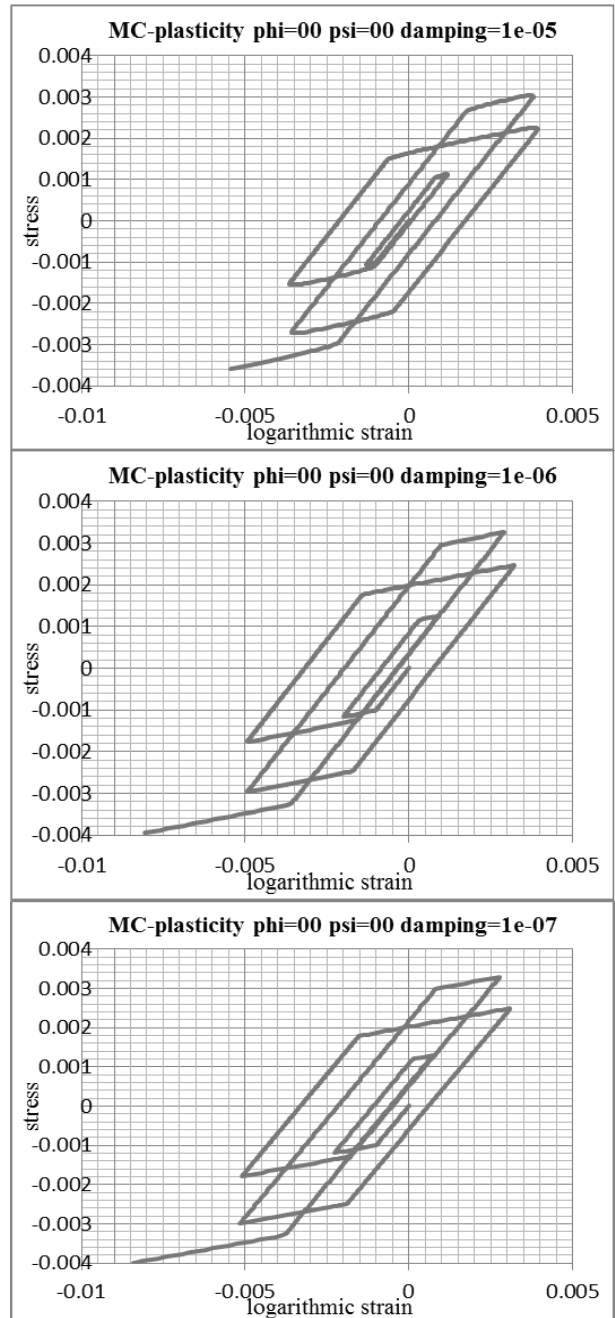


Figure 3. Stress-strain curves for symmetric cycle loading at different values of damping.

As can be seen from the charts above, even large values of the damping factor can ensure the convergence of the solution procedure. However, the large values are not suitable because a further decline in the damping factor affects the solution significantly. Thus, the maximum value for damping is $1e-6$, as further decreases do not cause any substantial changes.

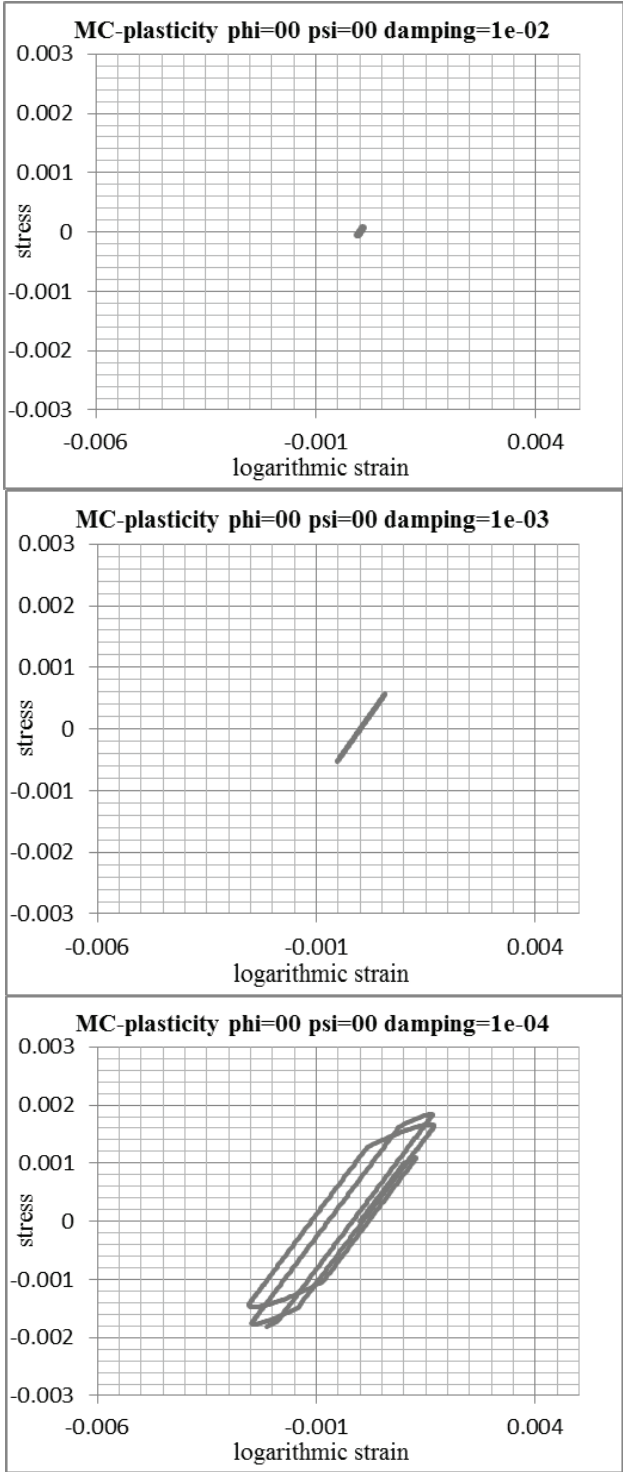


Figure 4. Stress-strain curves for asymmetric cycle loading at different values of damping.

Similar results were obtained for asymmetric loading (Figures 4 and 5). The charts in Figures 4 and 5 are plotted at $\varphi = \psi = 0$, $c = 0.001$, $decc = 1$ and $mecc = 1$.

Thus, to be suitable for the problem, the value of the damping factor should not affect the character of stress-strain curves when it decreases.

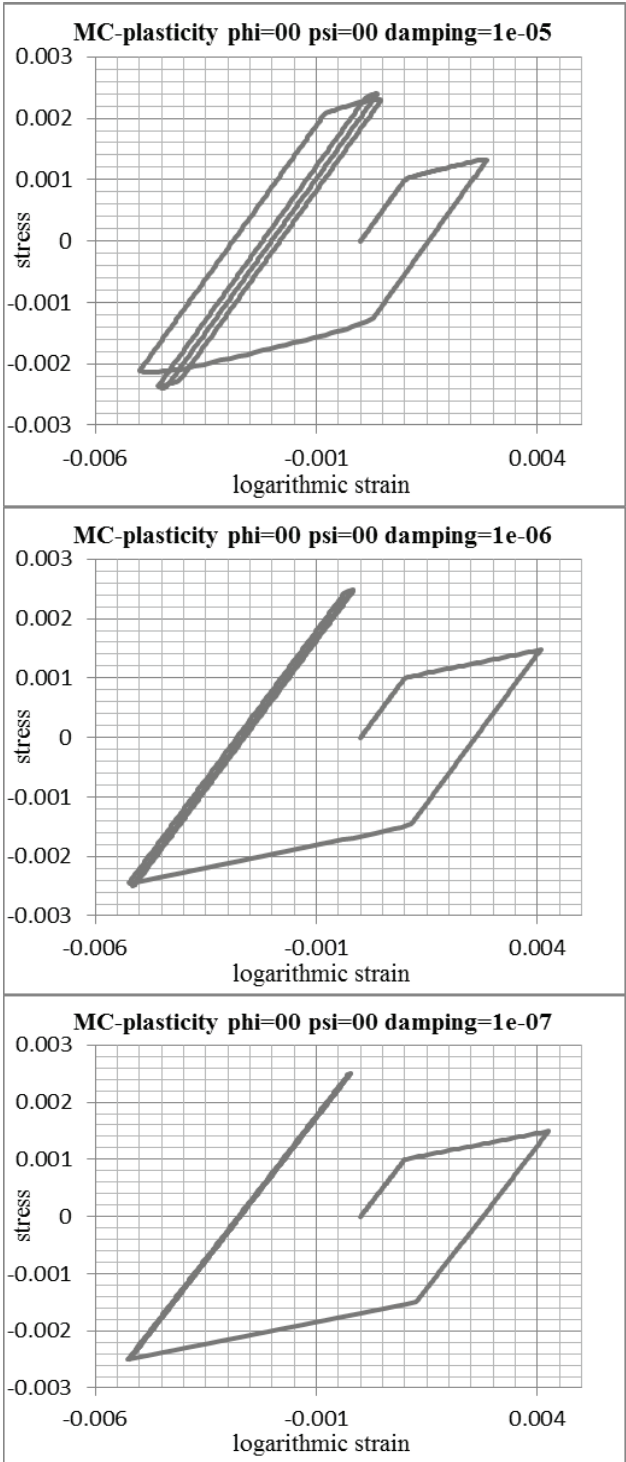


Figure 5. Stress-strain curves for asymmetric cycle loading at different values of damping.

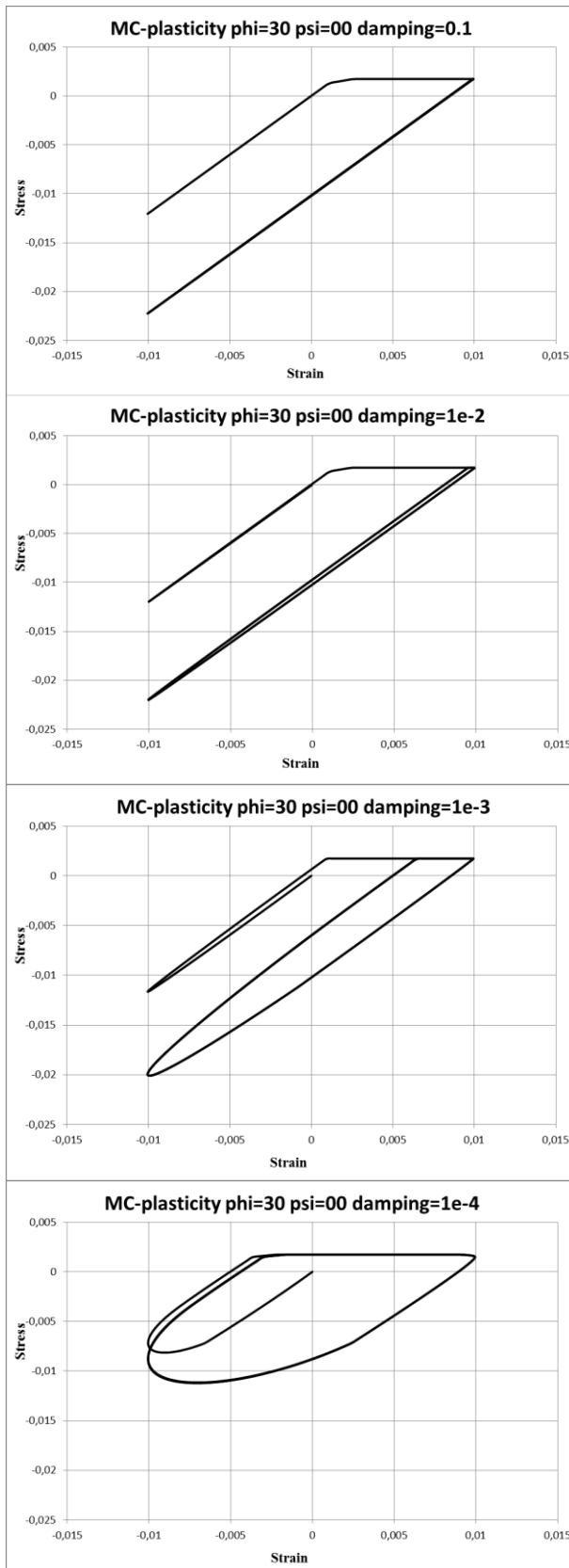


Figure 6. Stress-strain curves for Mohr – Coulomb model at different values of damping.

b. Non-hardening plasticity. Figures 6 and 7 demonstrate the variation of the character of stress-strain curves due to variation of damping factor for Mohr-Coulomb model at fixed other parameters. The charts in Figures 6 and 7 are plotted at $\varphi = 30$, $\psi = 0$, $c = 0.001$, $decc = 0.56$, $mecc = 0.005$ and $\nu = 5\text{Hz}$.

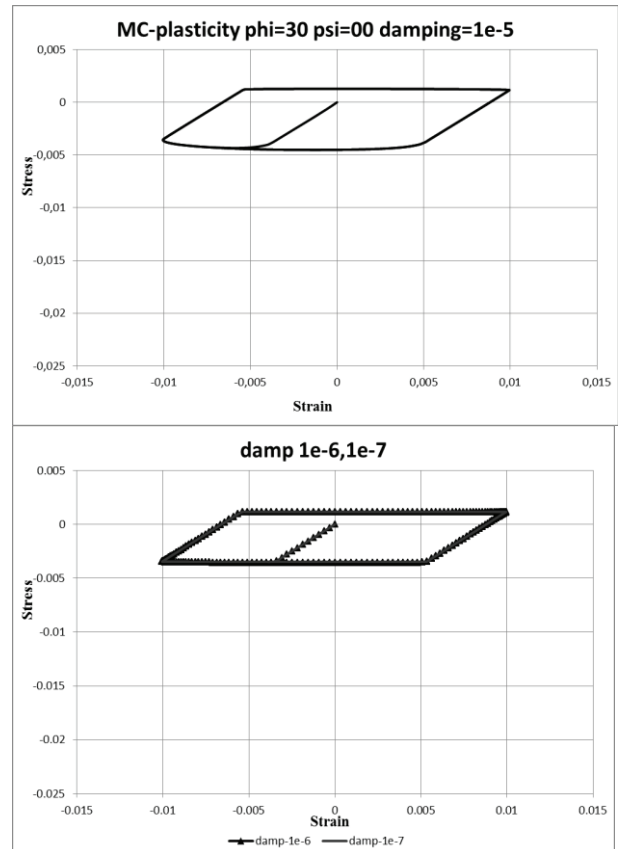


Figure 7. Stress-strain curves for Mohr – Coulomb model at different values of damping.

Variation of the character of stress-strain curves due to variation of damping factor for Drucker-Prager model at fixed other parameters is presented in (Figures 8 and 9). The charts in Figures 8 and 9 are plotted at $\varphi = 30$, $\psi = 0$, $c = 0.001$, $f_{ecc} = 0.05$, $f_{rat} = 0.778$ and $\nu = 5\text{Hz}$. Here f_{ecc} is flow eccentricity and f_{rat} is flow ratio.

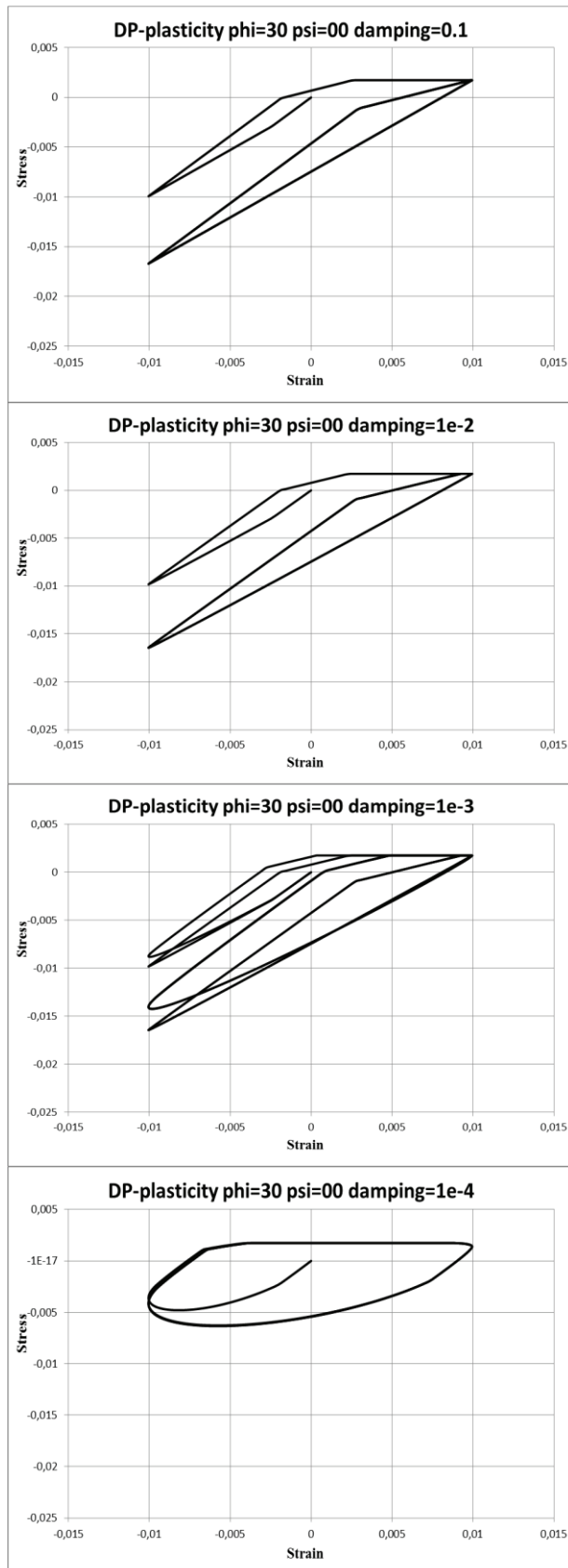


Figure 8. Stress-strain curves for Drucker – Prager model at different values of damping.

The obtained results revealed that for both hardening and non –hardening types of plasticity models, the damping ratio affects the result of the solution dramatically. Any increase causes substantial changes in the character of stress- strain curves, while a damping factor equal to or less than 10^{-5} may ensure the convergence of the solution, meanwhile negligibly influencing the final results.

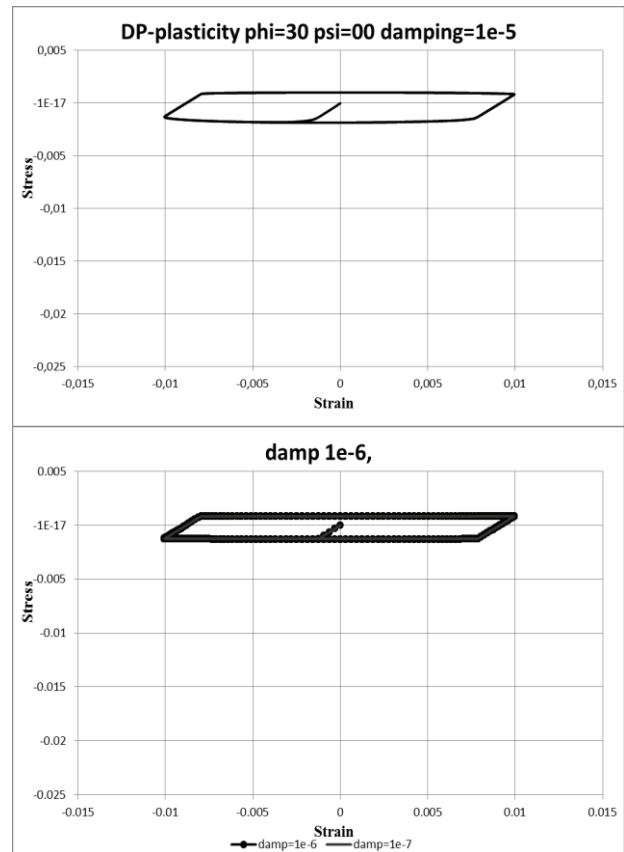


Figure 9. Stress-strain curves for Drucker – Prager model at different values of damping.

2.2 The influence of eccentricities in Mohr-Coulomb and Drucker-Prager models.

The influence of deviatoric and meridional eccentricities on the result can be estimated by varying the energy dissipated by plastic deformation.

Variation of the energy dissipated by plastic deformation in the Mohr-Coulomb model due to the variations of both meridional and deviatoric eccentricities is shown in (Figure 10). The

surface in (Figure 10) is plotted at $t\varphi=30$, $\psi=0$, $c=0.001$ $\nu=5Hz$.

As can be seen from the chart above, the influence of deviatoric eccentricity on the energy of plastic deformation is insignificant. In addition, the variation of meridional eccentricity does not cause the change in the energy of plastic deformation, except in the case of numerical errors. These effects can be observed when the value of deviatoric eccentricity is greater than 0.75. One possible reason behind the energy independence from the value of meridional eccentricity is that this eccentricity may be fixed in the program complex. In this case we can define it by comparing the stress-strain curve with the yield surface.

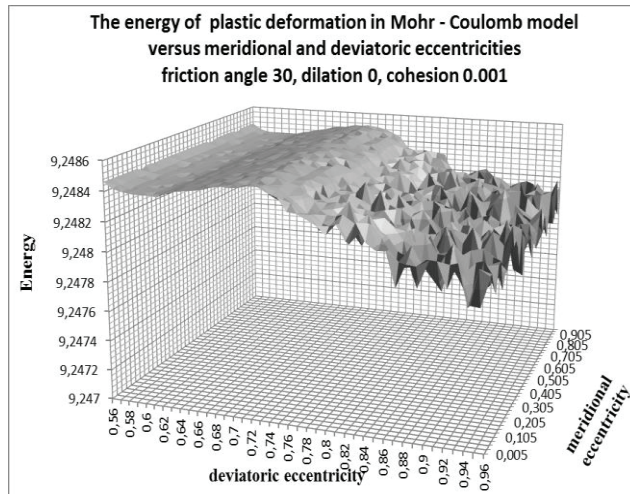


Figure 10. Variation of energy dissipated by plastic deformation due to the variations of meridional and deviatoric eccentricities.

Similarly to Mohr-Coulomb model, we can estimate the influence of the flow eccentricity and flow rate in Drucker-Pruger model. The variation of the energy dissipated by plastic deformation in Drucker-Pruger model due to the variations of flow eccentricity and flow rate is shown in (Figure 11). The surface in (Figure 11) is plotted at $\varphi=30$, $\psi=0$, $c=0.001$ $\nu=5Hz$. According to Figure 11, the variation of flow potential eccentricity does not change the energy of plastic deformation, while the flow rate affects this quantity significantly.

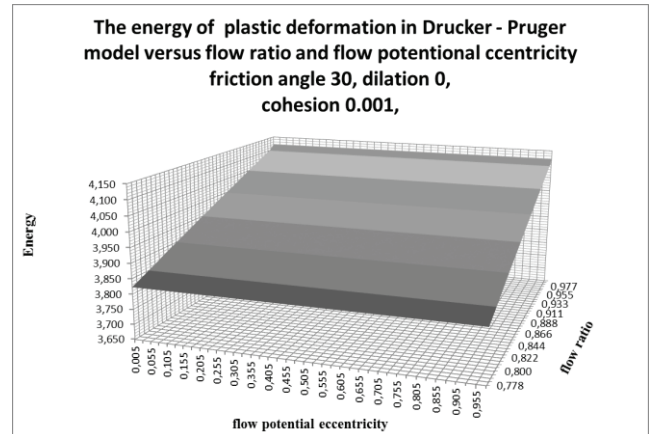


Figure 11. The variation of energy dissipated by plastic deformation due to the variations of flow eccentricity and flow rate.

In contrast to Mohr-Coulomb model there are no such deviations from the mean energy in Drucker-Pruger model. In addition, the value of flow potential eccentricity may be estimated by comparing the stress-strain curve and the yield surface.

2.3 Yield surface.

The Mohr-Coulomb yield surface and the loading in meridional plane are shown in (Figure 12). The curves in Figure 12 are plotted at $\varphi=30$, $\psi=0$, $c=0.001$, $decc=0.56$, $mecc=0.005$ and $\nu=5Hz$. The strain stress curve for these parameters of the model and loading is plotted in (Figure 13).

Meridional eccentricity can be solved by equation (2.3):

$$mecc = \frac{p_yield}{c} \tan \varphi, \quad (2.3)$$

where p_yield is the stress corresponding to the beginning of the plastic flow.

Drucker-Pruger yield surface and the loading in meridional plane are shown in (Figure 14). The curves in Figure 14 are plotted at $\varphi=30$, $\psi=0$, $c=0.001$ $\nu=5Hz$. The strain stress curve for these parameters of the model and loading is plotted in (Figure 15).

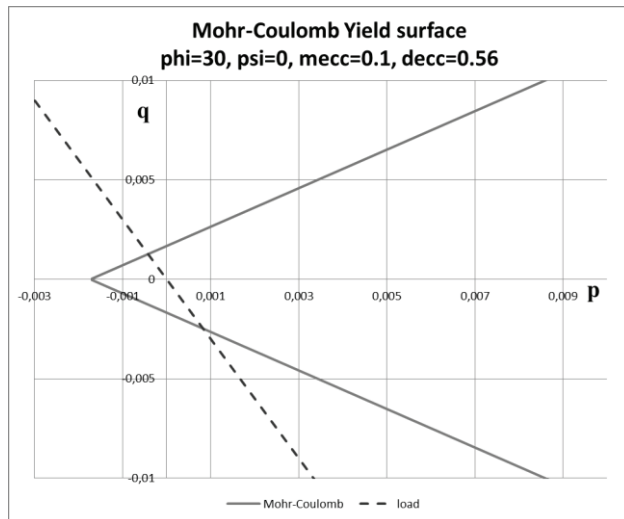


Figure 12. Yield surface for Mohr – Coulomb model.

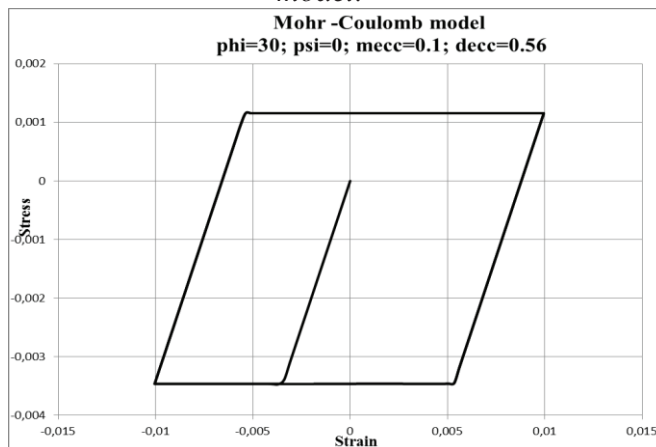


Figure 13. Stress-strain curve for Mohr – Coulomb model.

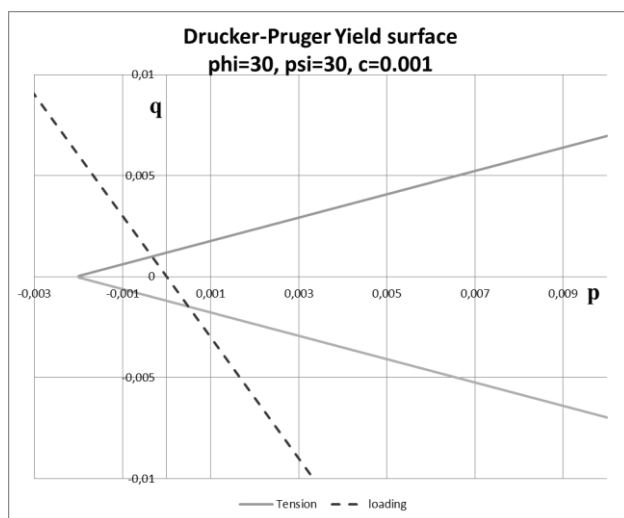


Figure 14. Yield surfaces for Drucker – Prager model.

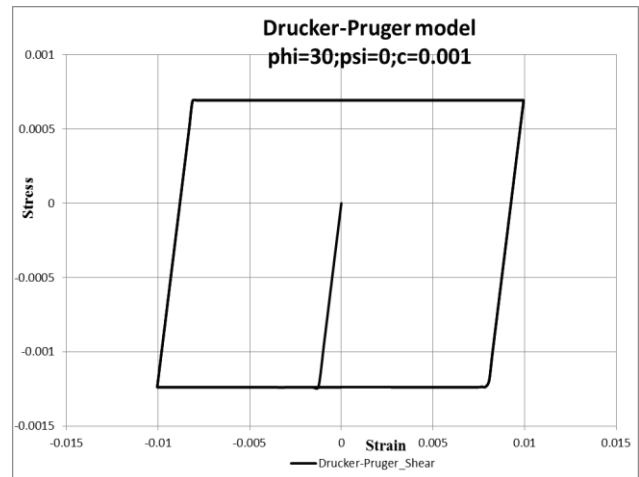


Figure 15. Stress-strain curve for Drucker – Prager model.

Similarly to Mohr-Coulomb, flow eccentricity in Drucker-Prager model can be solved by the following equation:

$$f_{ecc} = \frac{p_{-yield}}{c} \tan \varphi. \quad (2.4)$$

3. CONCLUDING REMARKS

According to the obtained results, the value of the damping factor ensures the convergence of the solution procedure (the solution was obtained for all almost values of this quantity). However, a large damping factor dramatically affects the final results. Therefore, we should decrease the damping factor to determine its optimal quantity. In case this reduction does not change the final results, the value of the damping factor is suitable.

Deviatoric eccentricity in Mohr-Coulomb model of plasticity does not affect the energy dissipated by plastic deformation significantly. Hence, it does not matter whether or not we select this value for calculations. In addition, the value of meridional eccentricity remained constant for all the calculations carried out by the authors.

In Drucker-Prager model of plasticity, the value of flow affects the yield stress as well as the energy dissipated by plastic deformation.

Therefore, the tuning is important for calculations and may change the final results. As with the meridional eccentricity in Mohr-Coulom model, the value of flow potential eccentricity remained fixed in program despite the attempts to change it. Thus, we can only estimate these values, comparing the stress-strain curves and the yield surfaces in the models.

Кузнецов Сергей Владимирович, профессор, доктор физико-математических наук; профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; Институт проблем механики Российской академии наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)183-85-59, +7(499)183-43-29; e-mail: sopromat@mgsu.ru.

REFERENCES

1. **Menétrey Ph., William K.J.** Triaxial Failure Criterion for Concrete and its Generalization. *ACI Structural Journal*, 1995, Vol. 92, pp. 311-318.
2. **Krenk S.** Characteristic state plasticity for granular materials part I: Basic Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, Vol. 37, pp. 6343-6360.
3. **Ahadi A., Krenk S.** Characteristic state plasticity for granular materials part II: model calibration and results. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, Vol. 37, pp. 6361-6380.

Alexander V. Dudchenko, Ph.D. Student; Department of Strength of Materials, National Research Moscow State University of Civil Engineering; LLC "Podzemproekt"; 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; tel. +7(499)183-85-59, +7(499)183-43-29; +7(926)069-88-12; e-mail: sopromat@mgsu.ru, aleks_dud@mail.ru.

Sergey V. Kuznetsov, Professor, Dr.Sc., Department of Strength of Materials, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences; 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; tel. +7(499)183-85-59, +7(499)183-43-29; e-mail: sopromat@mgsu.ru.

Дудченко Александр Владимирович, аспирант кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; ООО «Подземпроект»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)183-85-59, +7(499)183-43-29; +7(926)069-88-12; e-mail: sopromat@mgsu.ru, aleks_dud@mail.ru.

FORMULATION OF MATHEMATICAL PROBLEM DESCRIBING PHYSICAL AND CHEMICAL PROCESSES AT CONCRETE CORROSION

*Sergey V. Fedosov, Varvara E. Roumyantseva, Igor V. Krasilnikov,
Boris E. Narmania*

Ivanovo State Politechnical University, Ivanovo, RUSSIA

Abstract: The article deals with the relevance of new scientific research focused on modeling of physical and chemical processes occurring in the cement concrete at their exploitation. The basic types of concrete corrosion are described. The problem of mass transfer processes in a flat reinforced concrete wall at concrete corrosion of the first and the second types has been mathematically formulated.

Keywords: cement concrete, concentration of calcium hydroxide, corrosion, mass transfer, liquid environment, mass conductivity, mass output

ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПИСАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОРРОЗИИ БЕТОНА

С.В. Федосов, В.Е. Румянцева, И.В. Красильников, Б.Е. Нармания

Ивановский государственный политехнический университет, г. Иваново, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье отмечается актуальность новых научных исследований, ориентированных на моделирование физических и химических процессов, происходящих в бетоне на цементе в условиях эксплуатации. Рассмотрены и описаны основные типы коррозии бетона. Математически сформулирована проблема процессов массопереноса в плоской железобетонной стене в условиях коррозии бетона первого и второго типов.

Ключевые слова: бетон на цементе, концентрация гидроксида кальция, коррозия, массоперенос, жидкая среда, массовая проводимость, массовая выработка

Concrete is a building material known to man from the depth of centuries at the turn of the third and fourth millennia BC, swiftly broke into the 19th century and was named by the contemporaries the building material of the 20th century. And in the beginning of the 21-st century it remains the most popular material for construction of unique structures and typical buildings for industrial and civil purposes [1]. However, as a man-made synthetic composite, concrete (reinforced concrete) remains the subject of close attention of researchers. And along with the solution of technological problems of creating and life cycle of exploitation of reinforced concrete structures,

researchers' attention to the problem of the durability of concrete persists. Carrying out of such researches will preserve unique building structures for future generations, ensure the safety of human life activity, as well as save a lot of money for national economy.

Predicting the durability of construction is rather complex analytical process, requiring diverse system knowledge of several sciences: physical chemistry, electrochemistry, thermodynamics, theory and kinetics of heterogeneous chemical processes, mass transfer in capillary-porous bodies [2].

For 150 years of studying corrosion destruction processes of concrete scientists have

accumulated a large amount of scientific knowledge about corrosion processes in concrete and reinforced concrete: basic schemes of chemical reactions have been identified and studied; mathematical description of certain corrosion processes has been given; a system of normative documents regulating corrosion in the construction industry has been created.

The cumulative theoretical and practical material makes it possible to describe concrete corrosion processes in the form of mathematical models that allow calculating with the required accuracy the durability of concrete and reinforced concrete structures.

According to generally classification proposed by Professor V.M. Moskvina [3], corrosive effects of any environment on concrete is divided into three main types:

- corrosion of the 1st type includes processes that occur in concrete under the influence of low hardness water when the components of cement stone are dissolved, washed out and carried away by moving water environment;
- corrosion of the 2nd type includes processes that develop in concrete when exposed to liquids containing chemical substances that come into exchange reactions with components of cement stone to form easily water-soluble products or amorphous, non-binding mass in reaction zone;
- corrosion of the 3d type includes all the processes of concrete corrosion under the influence of liquid aggressive environment, the development of which results in accumulation in pores, capillaries and other concrete voids of poorly soluble salts, crystallization of which gives rise to considerable stress in cement stone structure, limiting the growth of crystal formations.

It should be noted that corrosion of any type is rarely found in nature separately from the others, but usually one type is predominant and it is always possible to trace and consider the role of the secondary in this case types of corrosion.

It is known that the stability of highly basic compounds of concrete (alite, belite, tricalcium

aluminate, tetracalcium aluminoferrite) is due to contained in concrete pores «free calcium hydroxide», so it would be logical to predict the service life of product in terms of its amount in the body structure [4].

Herewith in terms of heat and mass transfer theory [5, 6] transfer of calcium hydroxide occurs in three stages:

- mass conductivity (diffusion) of calcium hydroxide from the inner layers of concrete to «concrete – liquid» phase boundary;
- mass transfer through the phase boundary;
- mass transfer from the phase boundary to the volume of liquid medium.

The simulated system is schematically shown in Figure 1, which also shows characteristic profiles of transferred component concentrations in concrete (dynamics of mass transfer in solid phase) and component concentration change in liquid phase (kinetics of mass transfer).

According to the theory of mass transfer of academician Lykov A.V. [6,7], in general, for corrosion of the first and second types, calcium hydroxide diffusion in the porous structure of concrete is described by the nonlinear second order mass transfer equation:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \operatorname{div} [k(x, \tau) \operatorname{grad} C(x, \tau)] + q_v(x, \tau) / \rho_{\text{concrete}}, \quad (1)$$

in which: $k(x, \tau)$ – coefficient of mass conductivity (diffusion), m^2/s ; $C(x, \tau)$ – concentration of «free calcium hydroxide» in concrete at time τ at an arbitrary point with coordinate x , $\text{kg CaO} / \text{kg of concrete}$; $q_v(x, \tau)$ – power of volume source of mass due to chemical or phase transformations, $\text{kg CaO} / (\text{m}^3 \cdot \text{s})$; ρ concrete – density of concrete, kg / m^3 .

To obtain a correct solution of equation (1), it must be supplemented with initial and boundary conditions.

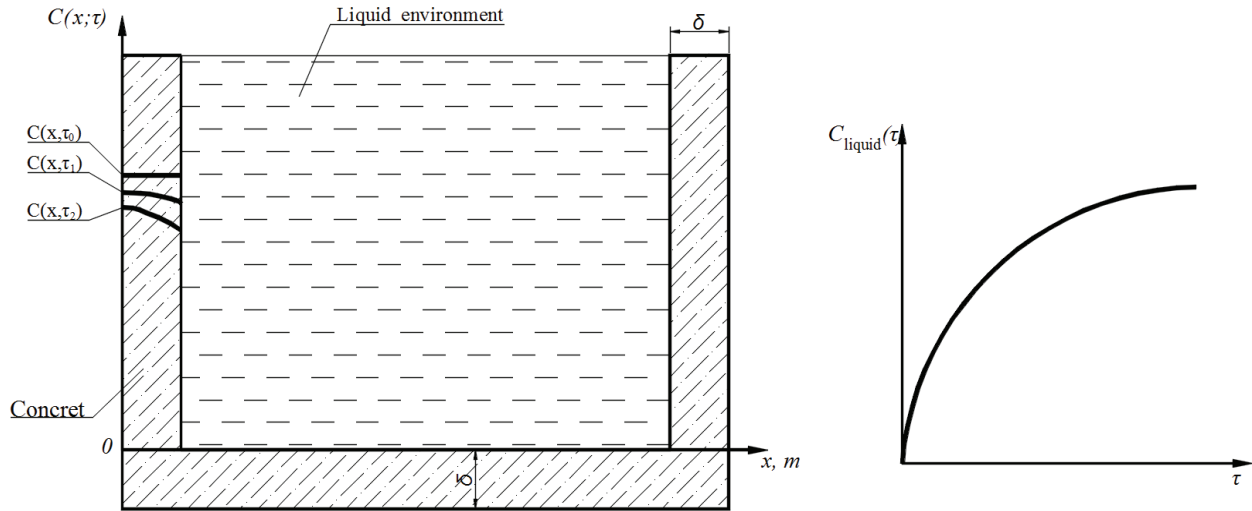


Figure 1. Scheme of liquid storage tank with characteristic profiles of transferred component concentrations in concrete and in liquid phase.

Initial distribution of «free calcium hydroxide» concentrations through the thickness of concrete wall $C_0(x)$ is assumed to be uniform:

$$C(x, \tau)|_{\tau=0} = C(x, 0) = C_0(x). \quad (2)$$

Considering the fact that there is no substance flow at the left boundary of concrete wall, we write down the boundary condition at the point with the coordinate $x = 0$:

$$\frac{\partial C(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

To describe the regularity of concrete and liquid interaction process on the surface of phase boundary, i.e. on the right side of the concrete wall, we assume that the amount of «free calcium hydroxide» supplied from the inner layers of concrete to its surface due to mass conductivity is equal to the amount of substance diverted from the surface of the body to the outer phase by means of convective diffusion:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{concrete}} k \frac{\partial C(\delta, \tau)}{\partial x} = \\ = \beta_c [C_{\text{liquid}}(\tau) - C_{\text{liquid}}(\tau)] \rho_{\text{liquid}}. \end{aligned} \quad (4)$$

in which: β_c – coefficient of mass transfer in liquid medium, m/s; $C_{\text{liquid}}(\tau)$, $C_{\text{liquid}}(\tau)$ – concentration of calcium hydroxide in the liquid near the surface of phase boundary and in stream core, respectively, at time τ , in terms of CaO , kg CaO / kg of liquid; ρ_{concrete} , ρ_{liquid} – density of concrete and water, kg / m^3 .

Expression (4) is a boundary condition of the third type, its mathematical notation can be modified by assuming that concentration of calcium hydroxide varies proportionally in the liquid near the surface phase boundary, in stream core, as well as in concrete body at phase boundary. For this we apply the approach proposed in [8]:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{concrete}} k \frac{\partial C(\delta, \tau)}{\partial x} = \beta_c \rho_{\text{concrete}} [C_p(\tau) - C(\delta, \tau)] \\ \rho_{\text{liquid}} \frac{[C_{\text{liquid}}(\tau) - C_{\text{liquid}}(\tau)]}{\rho_{\text{concrete}} [C_p(\tau) - C(\delta, \tau)]}. \end{aligned} \quad (5)$$

having designated:

$$\beta^* = \frac{\rho_{\text{liquid}} [C_{\text{liquid}}(\tau) - C_{\text{liquid}}(\tau)]}{\rho_{\text{concrete}} [C_p(\tau) - C(\delta, \tau)]}, \quad (6)$$

we obtain a modified form of the third type boundary condition:

$$k \frac{\partial C(\delta, \tau)}{\partial x} = \beta^* [C_{\text{subjected}}(\tau) - C(\delta, \tau)]. \quad (7)$$

here: $C_{\text{subjected}}(\tau)$ – is the equilibrium concentration of the transferred component on the surface of a solid body, kg CaO / kg of concrete; β^* – the modified mass transfer coefficient in a liquid medium, m / s.

The balance of transferred component mass («free calcium hydroxide») between the solid and liquid phases is determined by the relation [8]:

$$-S \cdot \rho_{\text{concrete}} \cdot k \cdot \frac{\partial C(\delta, \tau)}{\partial x} = V_{\text{liquid}} \cdot \rho_{\text{liquid}} \cdot \frac{\partial C_{\text{liquid}}(\tau)}{\partial \tau}. \quad (8)$$

In this equation, the left part is the amount of the transferred component through the inner surface of the tank S , m^2 per unit of time; the right part is the mass increment of the component in the liquid volume V_{liquid} of the reservoir, m^3 per unit of time; $C_{\text{liquid}}(\tau)$ is the concentration of calcium hydroxide in the liquid at time τ , in terms of CaO , kg CaO / kg of liquid; ρ_{concrete} , ρ_{liquid} – density of concrete and liquid, respectively, kg / m^3 . The «–» sign indicates decrease in the hydroxide calcium concentration in concrete.

Up to a certain «bound» concentration of C_{liquid}^* , the equilibrium is subjected to Henry's linear law:

$$C_{\text{subjected}}(\tau) = m C_{\text{liquid}}(\tau). \quad (9)$$

in which: m is Henry's equilibrium constant, kg of liquid / kg of concrete.

Thus, the formulated above system of differential equations of mass transfer, together with the initial and boundary conditions, is a mathematical model of the real process of mass transfer during cement concrete corrosion of the first type for a closed "liquid-tank" system. The solu-

tion of this system allows to obtain a complete picture of the distribution of substance in time and to analyze the kinetics and dynamics of the process.

REFERENCES

1. **Nikolaev S.V., Travush V.I., Tabunshchikov Yu.A., Kolubkov A.N., Solomanidin G.G., Magay A.A., Dubynin N.V.** Normativnaja baza vysotnogo stroitel'stva v Rossii [Regulatory Framework of high-rise construction in Russia]. Zhilishchnoe Stroitel'stvo, 2016, No. 1-2, pp. 3-7.
2. **Stepanova V.F., Rosental N.K.** Zashhita ot korrozii v uslovijah nehvatki finansirovanija nauki [Protection against corrosion in the conditions of science financing shortage]. Stroitel'naya Gazeta, 2013, No. 19 (10238), pp. 1,3.
3. **Moskvin V.M.** Korrozija betona [Corrosion of concrete]. Moscow, Gosstroizdat, 1952, 344 p.
4. **Mchedlov-Petrosyan O.P.** Himija neorganicheskikh stroitel'nyh materialov [Chemistry of inorganic building materials]. Moscow, Stroyizdat, 1988, 303 p.
5. **Fedosov S.V.** Teplomassoperenos v tehnologicheskikh processah v stroitel'noj otrasli [Heat and mass transfer in technological processes in construction industry]. Ivanovo, IPC PresSto, 2010, 364 p.
6. **Lykov A.V., Mikhailov Yu.A.** Teorija teplomassoperenosa [Theory of heat and mass transfer]. Moscow, Leningrad, Gosenergoizdat, 1963, 536 p.
7. **Lykov A.V.** Javlenija perenosa v kapillarno-poristyh telah [Phenomena of transfer in capillary-porous bodies]. Moscow, Gostekhzdat, 1954, 296 p.
8. **Akselrud G.A., Lysyansky V.M.** Jekstragirovanie. Sistema tverdoe telo – zhidkost' [Extraction (solid-liquid system)]. Moscow, Himija, 1974, 256 p.
9. **Rudobashta S.P.** Massoperenos v sistemah

s tvjordoј fazoj [Mass transfer in systems with solid phase]. Moscow, Himija, 1980, 248 p.

Sergey V. Fedosov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, President of Ivanovo State Polytechnical University; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; tel. +7(4932) 32-97-55; e-mail: prezident@ivgpu.com.

Varvara E. Roumyantseva, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Director of the Institute of Social and Humanitarian and Natural Sciences, Ivanovo State Polytechnical University; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; tel. +7(4932) 41-75-09; e-mail: yzsgen@ivgpu.com.

Igor V. Krasilnikov, Associate Professor, Ph.D., Head of the Center for Scientific Research and Technical Expertise in Construction, Ivanovo State Polytechnical University; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; tel. +7(4932) 38-01-81, 37-34-14; e-mail: kc037@mail.ru.

Boris E. Narmania, Student, Ivanovo State Polytechnical University; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; tel. +7(4932) 32-85-40; e-mail: yzsgen@ivgpu.com.

Федосов Сергей Викторович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, президент Ивановского государственного политехнического университета; 153037, Россия, г. Иваново, ул. 8 Марта, д. 20; тел. +7(4932) 32-97-55; e-mail: prezident@ivgpu.com.

Румянцева Варвара Евгеньевна, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, директор Института социально-гуманитарных и естественных наук, Ивановский государственный политехнический университет; 153037, Россия, г. Иваново, ул. 8 Марта, д. 20; тел. +7(4932) 32-97-55; e-mail: yzsgen@ivgpu.com.

Красильников Игорь Викторович, доцент, кандидат технических наук, руководитель Центра научно-исследовательских работ и технической экспертизы в строительстве, Ивановский государственный политехнический университет; 153037, Россия, г. Иваново, ул. 8 Марта, д. 20; тел. +7(4932) 38-01-81, 37-34-14; e-mail: kc037@mail.ru.

Нармания Борис Евгеньевич, студент, Ивановский государственный политехнический университет; 153037, Россия, г. Иваново, ул. 8 Марта, д. 20; тел. +7(4932) 32-85-40; e-mail: yzsgen@ivgpu.com.

METHOD OF COMPENSATING LOADS FOR SOLVING OF A PROBLEM OF UNSYMMETRIC BENDING OF INFINITE ICE SLAB WITH CIRCULAR OPENING

Elena B. Koreneva

Moscow Higher Combined-Arms Command Academy, Moscow, RUSSIA

Abstract: Unsymmetric flexure of an infinite ice slab with circular opening is under examination. The mentioned construction is considered as an infinite plate of constant thickness resting on an elastic subgrade which properties are described by Winkler's model. The plate's thickness is variable in the area adjoining to the opening. Method of compensating loads is used. Basic and compensating solutions are received. The obtained solutions are produced in closed form in terms of Bessel functions.

Keywords: infinite ice slab, circular opening, method of compensating loads, Bessel functions

МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ЛЕДЯНОЙ ПЛИТЫ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Е.Б. Коренева

Московское высшее общевойсковое командное орденов Ленина и Октябрьской Революции Краснознаменное училище, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается несимметричное изгиб бесконечной ледяной плиты с круглым отверстием. Указанное сооружение рассматривается как бесконечная пластинка постоянной толщины на упругом основании, свойства которого описываются моделью Винклера. Толщина плиты в области, примыкающей к отверстию, переменная. Для решения задачи используется метод компенсирующих нагрузок. С привлечением аппарата специальных функций (функции Бесселя) получены базовые и компенсирующие решения.

Ключевые слова: бесконечная ледяная плита, круглое отверстие, метод компенсирующих нагрузок, функции Бесселя

1. INTRODUCTION

The present work is dedicated to the strength analysis of an ice cover. Unsymmetric bending of an infinite ice slab of constant thickness is examined. The plate's thickness increases in the direction from an inner boundary in the area adjoining to the opening. As usual similar constructions are considered as plates resting on Winkler's elastic subgrade. Modulus of subgrade reaction is equal to the volume of water's weight. Related problems were considered in [1] and [2]. The present

work gives another approach – the method of compensating loads. The proposed method will be more effective for plates with comparatively large openings analysis.

2. ANTISYMMETRIC BENDING OF INFINITE SLAB

First we will consider the outer part of the construction under investigation – the slab of constant thickness with circular opening (fig.1).

The above-mentioned structure is resting on an elastic subgrade and is subjected to an action of antisymmetric loading. Radius of the circular opening is x_1 .

The plate is subjected to an action of antisymmetric loads

$$q(r, \theta) = q(r) \cos \theta \text{ or } q(r, \theta) = q(r) \sin \theta.$$

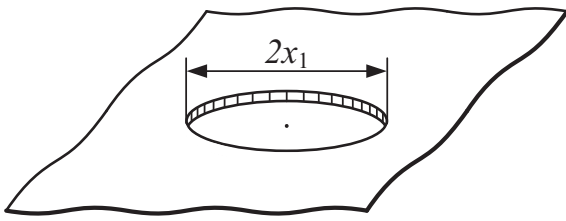


Figure 1. Infinite plate with the circular opening.

For example similar problems occur when wind loading influence is under study.

The differential equation of antisymmetric bending of a plate resting on Winkler's elastic subgrade is:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right)^2 w + \frac{c}{D} w = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

where D is the flexural rigidity of a plate, c is the coefficient of soil reaction.

Let us introduce the following notation:

$$\ell = \sqrt[4]{\frac{D}{c}} \quad (2)$$

and going over dimensionless coordinate

$$\begin{aligned} M_1 = & -\frac{D}{\ell^2} \left\{ (a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) \left[v_1(x) - \frac{1-\sigma}{x} \left(u_1'(x) - \frac{u_1(x)}{x} \right) \right] - (c_1 \sin \varphi + d_1 \cos \varphi) \times \right. \\ & \times \left[u_1(x) + \frac{1-\sigma}{x} \left(v_1'(x) - \frac{v_1(x)}{x} \right) \right] + (a_1' \sin \varphi + b_1' \cos \varphi) \left[g_1(x) - \frac{1-\sigma}{x} \left(f_1'(x) - \frac{f_1(x)}{x} \right) \right] - \\ & \left. - (c_1' \sin \varphi + d_1' \cos \varphi) \left[f_1(x) + \frac{1-\sigma}{x} \left(g_1'(x) - \frac{g_1(x)}{x} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$x = \frac{r}{\ell}. \quad (3)$$

With the substitutions (2) and (3), the equation (1) assumes the form:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2} \right)^2 w + w = \frac{q}{c}. \quad (4)$$

The solution of homogeneous equation corresponding to (4) is sought in the shape:

$$w = F_1(x)(A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi).$$

The function $F_1(x)$ satisfies the ordinary differential equation:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2} \right)^2 F_1 + F_1 = 0. \quad (5)$$

The equation (5) can be reduced to the system of two ordinary conjugate linear equations:

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF_1}{dx} - \frac{F_1}{x^2} \pm iF_1 = 0. \quad (6)$$

It has been known [3] that the solution of the equation (6) is expressed in terms of cylindrical functions

$$\begin{aligned} w = & (a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi)u_1(x) + \\ & + (c_1 \sin \varphi + d_1 \cos \varphi)v_1(x) + \\ & + (a_1' \sin \varphi + b_1' \cos \varphi)f_1(x) + \\ & + (c_1' \sin \varphi + d_1' \cos \varphi)g_1(x). \end{aligned} \quad (7)$$

With use of certain derivation formulae [3] we can obtain the following expressions for stresses:

$$M_2 = -\sigma \frac{D}{\ell^2} \left\{ (a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) \left[\nu_1(x) + \frac{1-\sigma}{\alpha x} \left(u_1'(x) - \frac{u_1(x)}{x} \right) \right] + (c_1 \sin \varphi + d_1 \cos \varphi) \times \right. \\ \times \left[-u_1(x) + \frac{1-\sigma}{\alpha x} \left(\nu_1'(x) - \frac{\nu_1(x)}{x} \right) \right] + (a_1' \sin \varphi + b_1' \cos \varphi) \left[g_1(x) + \frac{1-\sigma}{\alpha x} \left(f_1'(x) - \frac{f_1(x)}{x} \right) \right] + \\ \left. + (c_1' \sin \varphi + d_1' \cos \varphi) \left[-f_1(x) + \frac{1-\sigma}{\alpha x} \left(g_1'(x) - \frac{g_1(x)}{x} \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

$$H_1 = -H_2 = (1-\sigma) \frac{D}{\ell^2 x} \left\{ (a_1 \cos \varphi - b_1 \sin \varphi) \left[u_1'(x) - \frac{u_1(x)}{x} \right] + \right. \\ + (c_1 \cos \varphi - d_1 \sin \varphi) \left[\nu_1'(x) - \frac{\nu_1(x)}{x} \right] + (a_1' \cos \varphi - b_1' \sin \varphi) \left[f_1'(x) - \frac{f_1(x)}{x} \right] + \\ \left. + (c_1' \cos \varphi - d_1' \sin \varphi) \left[g_1'(x) - \frac{g_1(x)}{x} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$Q_1 = -\frac{D}{\ell^3} [(a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) \nu_1'(x) - (c_1 \sin \varphi + d_1 \cos \varphi) u_1'(x) + \\ + (a_1' \sin \varphi + b_1' \cos \varphi) g_1'(x) - (c_1' \sin \varphi + d_1' \cos \varphi) f_1'(x)], \quad (11)$$

$$Q_2 = -\frac{D}{x \ell^3} [(a_1 \cos \varphi - b_1 \sin \varphi) \nu_1(x) - (c_1 \cos \varphi - d_1 \sin \varphi) u_1(x) + \\ + (a_1' \cos \varphi - b_1' \sin \varphi) g_1(x) - (c_1' \cos \varphi - d_1' \sin \varphi) f_1(x)]. \quad (12)$$

3. METHOD OF COMPENSATING LOADS

To resolve the problem under consideration the method of compensating loads is applied. The result to be sought is represented as a sum of a basic solution w_0 and a compensating one w_k :

$$w = w_0 + w_k. \quad (13)$$

The basic solution satisfies to the differential equation describing the problem under study. The solution w_0 has singularities which are relevant to the acting loads. For example for the case of a plate subjected to an action of a concentrated force the sought basic solution w_0 must have peculiarities of a concentrated force. However the basic solution does not satisfy boundary conditions.

The sought compensating solution w_k complies the homogeneous differential equation for the

plate's domain. It is required that the sum of w_0 and w_k must satisfy boundary conditions.

4. THE DEVELOPMENT OF BASIC SOLUTION

The decision of the problem of infinite plate resting on an elastic subgrade and subjected to an action of concentrated force is taken as basic solution:

$$w_0 = \frac{P \ell^2}{4D} f_0(x). \quad (14)$$

The expression (14) is the main influence function when $P = 1$. We can receive basic solutions for certain particular problems by integrating of the formula (14).

The plate subjected to an action of the forces $q \cos \theta$ distributed along circumference with the reduced radius is under consideration. The principle of composition of actions is utilized.

The plate's deflection in the point with the coordinates x, y can be represented in the following form:

$$w = \frac{q\alpha\ell^3}{4D} \times \int_0^{2\pi} f_0(\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x \cos(\theta - \varphi)}) \cos \theta d\theta. \quad (15)$$

For calculation of (15) we will use the formula of cylindrical functions compositions

$$Z_0(\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x \cos(\theta - \varphi)}) = 2 \sum_{n=0}^n {}' J_n(\alpha) Z_n(x) \cos n(\theta - \varphi), \quad (16)$$

where the sign ' denotes that when $n = 0$ we introduce the coefficient $\frac{1}{2}$. The expression (16) is fulfilled when $\alpha < x$. When $\alpha > x$ we must interchange the position of α and x in the right-hand part of (16).

Let us assume that

$$Z_0 = H_0^{(1)}(\sqrt{i}\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x \cos(\theta - \varphi)})$$

we integrate and separate the real part. Then we obtain:

when $x \leq \alpha$

$$w = w_I = \frac{\pi\alpha q\ell^3}{2D} [u_1(x)f_1(\alpha) - v_1(x)g_1(\alpha)] \cos \varphi, \quad (17)$$

when $x \geq \alpha$

$$w = w_{II} = \frac{\pi\alpha q\ell^3}{2D} [u_1(\alpha)f_1(x) - v_1(\alpha)g_1(x)] \cos \varphi. \quad (18)$$

Let us consider a plate subjected to an action of the loading

$$q = a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta,$$

which is distributed along the circumference with the reduced radius α .

By use the formulae (17), (18) we receive the solution:

when $\alpha \leq x$

$$w = \frac{\pi\alpha\ell^3}{2D} \{a_1[u_1(\alpha)f_1(x) - v_1(\alpha)g_1(x)] \times \sin \varphi + b_1[u_1(\alpha)f_1(x) - v_1(\alpha)g_1(x)] \times \cos \varphi\}, \quad (19)$$

when $\alpha \geq x$

$$w = \frac{\pi\alpha\ell^3}{2D} \{a_1[u_1(x)f_1(\alpha) - v_1(x)g_1(\alpha)] \times \sin \varphi + b_1[u_1(x)f_1(\alpha) - v_1(x)g_1(\alpha)] \times \cos \varphi\}. \quad (20)$$

Using the theory of Bessel functions we can receive basic solutions for different kinds of loads. For instance we can obtain the solution for the loads distributed over ring surface by integrating the expressions (17) and (18).

5. THE COMPENSATING SOLUTION

The compensating solution will be represented in the following form:

$$w_k = (a_1' \sin \varphi + b_1' \cos \varphi) f_1(x) + (c_1' \sin \varphi + d_1' \cos \varphi) g_1(x). \quad (21)$$

We assume that the origin of coordinates is in the midpoint of an opening. The radius of the opening is equal to x_1 . Therefore the solution can contain only finite values of Bessel functions f , g and their derivatives. The domain under consideration does not include the midpoint $x = 0$ where the Bessel functions f and g have certain singularities.

The compensating solution for the plate with free circular opening is:

$$w_k = -\frac{\ell^2}{D} \frac{1}{f_1^{(\mathcal{Q})}(x_1)g_1^{(M)}(x_1) - f_1^{(M)}(x_1)g_1^{(\mathcal{Q})}(x_1)} \left\{ f_1(x) \left[(\ell N_1 f_1^{(M)}(x_1) - K_1 f_1^{(\mathcal{Q})}(x_1)) \sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + (\ell O_1 f_1^{(M)}(x_1) - L_1 f_1^{(\mathcal{Q})}(x_1)) \cos \varphi \right] - g_1(x) \left[(\ell N_1 g_1^{(M)}(x_1) - K_1 g_1^{(\mathcal{Q})}(x_1)) \sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + (\ell O_1 g_1^{(M)}(x_1) - L_1 g_1^{(\mathcal{Q})}(x_1)) \cos \varphi \right] \right\}. \quad (22)$$

The notation for $f_1^{(M)}(x)$, $g_1^{(M)}(x)$, $f_1^{(\mathcal{Q})}(x)$, $g_1^{(\mathcal{Q})}(x)$ are given in [3].

6. CALCULATION OF THE INTERIOR PART OF THE PLATE HAVING VARIABLE THICKNESS

An inner part of the plate adjoining to the circular opening is examined. This part has variable thickness increasing along the direction from the internal boundary. This part is considered as a ring plate with inner radius x_A and the outer one x_1 .

The differential equation describing the anti-symmetric flexure of the circular plate of variable thickness resting on elastic Winkler's subgrade is:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{dD}{dx} \left[2 \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{2 + \sigma}{x} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} w \right] + \frac{d^2 D}{dx^2} \left[\frac{d^2 w}{dx^2} + \right. \\ \left. + \sigma \left(\frac{1}{x} \frac{dw}{dx} - \frac{1}{x^2} w \right) \right] = (q_{asm} - cw)r_0^4, \quad (23)$$

where $x = \frac{r}{r_0}$, r_0 - constant.

Let us assume that the flexural rigidity varies according to the power law:

$$D = D_0 x^m, \quad (24)$$

where D_0 is the constant.

The producted analysis showed that for the problem under study there is no way to obtain solutions in closed form in particular in terms of Bessel functions. This fact is distinct from the

case of the similar plate symmetric bending. The exception is the case when in (24) $m = 4$. Then the equation (23) by means of certain substitutions is reduced to the equation with constant coefficients of Euler class. The mentioned equation has the solution expressed in terms of power functions:

$$w = x^{-1} (A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + A_4 x^{\alpha_4}) \times \cos \theta, \quad (25)$$

where

$$\alpha_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2(2 - \sigma)} \pm \sqrt{2\sigma^2 - \beta^4}, \quad (26) \\ \beta^4 = \frac{cr_0^4}{D_0}.$$

Furthermore the conditions of conjugation of two parts when $x = x_1$ are to be fulfilled. For this aim the deflections, angles, bending moments, transversal forces of inner and outer parts are equating.

REFERENCES

1. **Koreneva E.B.** State of stress and strain of the ice slab with an opening subjected to an action of nonsymmetric loading. Structural mechanics and computation of structures, 2016, No. 5, pp. 2-5.
2. **Koreneva E.B.** Analysis of infinite ice plate with an opening. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Vol. 12, Issue 4, pp. 99-102.
3. **Korenev B.G.** Certain problems of the theory of elasticity and heat conductivity

solved in terms of Bessel functions. Moscow, Fizmatgiz, 1960. – 458 c.

4. **Koreneva E.B., Grosman V.R.** Analytical solution of a problem of circular orthotropic plate of variable thickness resting on an elastic subgrade flexure. Vestnik MGSU, 2011, No. 8, pp. 176-178.

Elena B. Koreneva, Dr.Sc., Military Institute (Infantry) of Military Educational and Scientific Centre for Infantry Troops “Academy of general Troops of Military Forces of Russian Federation”, ul. Golovacheva, 2, 109380, Moscow, RUSSIA, e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru.

Коренева Елена Борисовна, профессор, доктор технических наук; Московское высшее общевойсковое командное орденов Ленина и Октябрьской Революции Краснознаменное училище; 109380, Россия, г. Москва, ул. Головачева, д. 2; тел. +7(499) 175-82-45; e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru.

RELIABILITY ANALYSIS OF EXISTING REINFORCED CONCRETE BEAMS ON NORMAL CRACK LENGTH CRITERION

Vladimir S. Utkin, Sergey A. Solovyev

Vologda State University, Vologda, RUSSIA

Abstract. The article discusses a problem of the crack length influence on the reliability (safety) of reinforced concrete beams under conditions of limited statistical information about controlled parameters in the design mathematical models of limit state. Numerical examples revealed the possibility of practical application of the reliability analysis methods for inspections and determining the category of the technical condition of buildings and structures. The article offers the methods for reliability (probability of non-failure) analysis and the residual resource of reinforced concrete beams according to the criterion of the normal crack length in the tensile zone of reinforced concrete beams. The methods of reliability analysis constructed on the basis of possibility theory and fuzzy set theory. The algorithms of reliability analysis of reinforced concrete beams are presented on numerical examples of reliability analysis.

Keywords: reliability, crack length, reinforced concrete beam, possibility theory, residual resource, fuzzy sets theory

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК ПО КРИТЕРИЮ ДЛИНЫ НОРМАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ НА СТАДИИ ЭКСПЛУАТАЦИИ

В.С. Уткин, С.А. Соловьев

Вологодский государственный университет, г. Вологда, РОССИЯ

Аннотация. В статье рассматривается проблема влияния длины трещины на надежность (безопасность эксплуатации) железобетонных балок в условиях ограниченной статистической информации о контролируемых параметрах в расчетных математических моделях предельных состояний. По результатам численных примеров выявлена возможность практического применения методов расчета надежности при обследовании и выявлении категории технического состояния зданий и сооружений. Предложены методы расчета надежности (вероятности безотказной работы) и остаточного временного ресурса железобетонных балок по критерию длины нормальной трещины в растянутой зоне бетона балки, построенные на основе теории возможностей и теории нечетких множеств. Алгоритмы расчета надежности железобетонных балок представлены на численных примерах расчетов надежности.

Ключевые слова: надежность, длина трещины, железобетонная балка, теория возможностей, остаточный ресурс, теория нечетких множеств

1. INTRODUCTION

The new Interstate Standards (GOST 27751-2014 "Reliability of structures and foundations", GOST 31937-2011 "Buildings and structures. Principles of inspection and monitoring" etc.) and Russian Federation Federal Law No. 384 "Technical Regulations on the Safety

of Buildings and Structures" contain requirements for the safety of existing buildings and structures (and structural elements). The key term in these documents is "mechanical safety" - is the state of building and structures, in which there is no inadmissible risk of exceeding the limit states. Mechanical (or structural) safety

must be provided at the design stage and at the stage of buildings and structures operation.

Currently, the design of reinforced concrete structures in Russia is regulated by the building code SP 63.13330.2012 "Concrete and reinforced concrete structures" (hereinafter SP). The limit state criteria for reinforced concrete beams by SP are the strength of concrete and reinforcement bars, the stiffness (deflection) of the beam, the cracking and the width of the normal cracks. However, the crack length affects on the stress-strain state of reinforced concrete structures, and consequently on the level of safety, even when the normal crack width less than normative values by SP. It is known [1] that the normal cracks growing affects on the position of the neutral axis in the beam, which leads to growth of stresses in the concrete and in the reinforcement bars of RC beams. When the normal crack reached critical value of its length - there is a spontaneous crack growth and the possible failure of the element due to the accumulated potential energy in the crack tip region under the current loads.

2. LITERATURE REVIEW

The study of works of reinforced concrete structures with cracks is engaged in a relatively new science – fracture mechanics [2, 3, 4, etc.]. K.A. Piradov and N.V. Savitsky [4] noted that theory-based design of reinforced concrete beams with cracks is not developed presently. And the existing limit state design (introduced in 1955) is based on a large number of empirical coefficients. In this regard, it is proposed to proceed to the design of reinforced concrete structures using the methods of fracture mechanics.

International scientists also see prospects of design development of RC structures through application of the provisions of fracture mechanics. Bazant Z.P. [5] noted that extensive experimental studies in the 70s revealed the coordination of the results of collapses (failures) of reinforced concrete structures with the fracture mechanics principles. The reinforced concrete in the elastic-

plastic stage can also be described using the theory of fracture mechanics. It is noted [5] that the linear fracture mechanics can be used for engineering design of reinforced concrete structures now. The cracking and cracks growth - is an important design feature of the concrete and RC concrete structures [6], which should be considered in the inspections and structural safety evaluation. The description of reinforced concrete work from the standpoint of fracture mechanics seems quite obvious to experts in the field of fracture mechanics, but still its provisions are not embedded in the building codes of the reinforced concrete structures design.

3. MATHEMATICAL MODEL OF LIMIT STATE

The article proposes using of fracture mechanics method in the reliability analysis of reinforced concrete beam with normal cracks at the operation stage. A mathematical model of the limit state can be represented as:

$$\tilde{l}_{cr} \leq \tilde{l}_{cr,ult}, \quad (1)$$

where \tilde{l}_{cr} – measured length of crack in concrete; $\tilde{l}_{cr,ult}$ – critical (ultimate) crack length. Wavy line above the symbols indicates that these parameters of conditions (1) are random variables in terms of probability theory. When the crack length reach a value of

$$l_{cr,ult} = 0,3h_0,$$

where h_0 – distance from extreme compression fiber to centroid of longitudinal tension reinforcement (in ACI 318-14 terms), then [2] there are conditions to change the direction of crack propagation from transverse to longitudinal, which can lead to breakaway of the RC beam concrete part bounded by cracks and to the reducing of the load-bearing capacity of rein-

forced concrete beams or to the failure. The ultimate length of crack is adopted in [7] as

$$l_{crc,ult} = 0,5h,$$

where h – is the overall height of RC beam. It is possible to take $l_{crc,ult}$ as deterministic value in both cases because of the small variability of the results of h and h_0 measurements.

The authors of this article has been developed a method of reliability analysis of reinforced concrete beam according to the criterion of "dangerous" crack length ($l_{crc,ult} = 0,3h_0$) [8] and a method for evaluation of load-bearing capacity of RC beams with cracks [9]. These methods were focused on their implementation in practice for operational safety assessment of existing reinforced concrete beams.

The article [10] gives a different wording of the ultimate crack length in concrete of reinforced concrete beams, obtained on the basis of test results and their analysis, in which there is a complete shutdown of tensile concrete. In this case, the critical crack length is proposed to calculate by the formula:

$$l_{crc,ult} = h - \frac{\sqrt{(E_s A_s)^2 + 4E_b b h_0 E_s A_s} - E_s A_s}{2E_b b}, \quad (2)$$

where h – overall height of RC beam; E_s – modulus of elasticity of reinforcement and structural steel; A_s – total area of flexural reinforcement bars; b – overall width of RC beam; E_b – modulus of elasticity of concrete; h_0 – distance from extreme compression fiber to centroid of longitudinal tension reinforcement.

However, the article [10] is not focused on the reliability analysis of reinforced concrete elements taking into account the proposed value of the critical crack length. This paper aims on this task.

A mathematical model of the limit state (1), taking into account the variability of some controlled parameters, can be written as:

$$\tilde{l}_{crc} \leq h - \frac{\sqrt{(E_s A_s)^2 + 4\tilde{E}_b b h_0 E_s A_s} - E_s A_s}{2\tilde{E}_b b}. \quad (3)$$

Random (measurable) parameters in (3) are marked with a wavy line above the symbols. The remaining parameters in (3) can be taken as deterministic due to the low variability of the results of their measurements. The coefficient of variation of the modulus of elasticity of steel E_s is less than 0.05 [11]. Therefore, we can take it as deterministic value. The geometric parameters of the beam cross-section (h, b, h_0, A_s) yield measurements with a small coefficient of variation, so we also consider them as deterministic variables.

The crack length is proposed to measure by the patented method [12], which will allow us to more accurately determine crack length and to consider the pre-fracture zone and loosening of the concrete at the crack tip, the form of which is shown in Figure 1.

It is proposed to analyze the reliability of RC beam using the possibility theory [13], by the reason of the small amount of statistical information about controlled parameters in (3) at operation stage, and consequently incorrect using of the probabilistic methods for reliability analysis in this case. In accordance with [13], we denote fuzzy variables as: $\tilde{l}_{crc} = X_1$, $2\tilde{E}_b b = Y$ and for the sake of brevity we will take $E_s A_s = k$, which is deterministic value. Mathematical model (3) will take a form:

$$\begin{aligned} X_1 Y - h Y &\leq -\sqrt{k^2 + 2Y h_0 k} + k, \\ \text{or} \quad Z - Y(h - X_1) &\leq k, \\ \text{where} \quad Z &= \sqrt{k^2 + 2Y h_0 k}. \end{aligned} \quad (4)$$

4. RELIABILITY ANALYSIS

The reliability analysis of RC beam by the condition (3) will be carried out by using the prin-

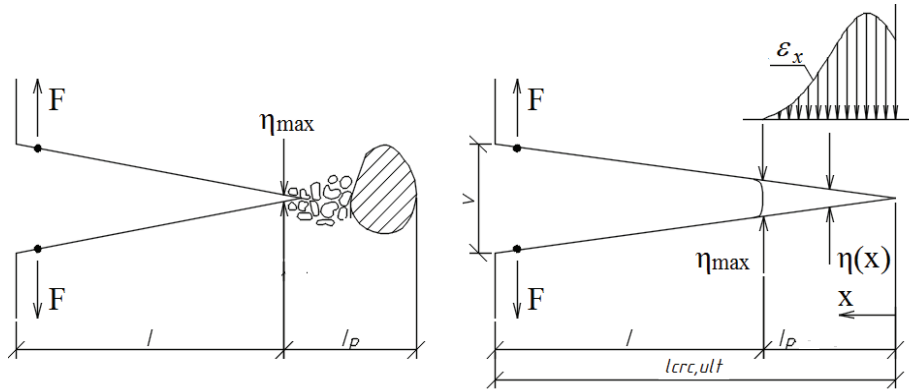


Figure 1. The model of a crack [2] in the beam's cross-section area with pre-fracture zone.

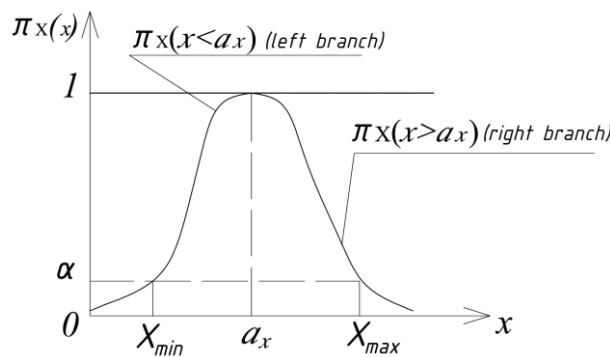


Figure 2. Graph of possibilities distribution function $\pi_X(x)$.

ciple of generalization by L. Zadeh from theory of fuzzy sets [14]. Fuzzy variables in (4) describes by the most common in practical analysis of reliability [15] distribution function of possibilities $\pi_X(x)$, represented in Figure 2, with the analytical form:

$$\pi_X(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - a_x}{b_x} \right)^2 \right], \quad (5)$$

where

$$a_x = 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$$

- «conditional mean»;

$$b_x = 0,5(X_{\max} - X_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$$

– measure of «dispersion», where X_{\max} and X_{\min} – the maximum and minimum value in

the set of values $\{x\}$ of fuzzy variable X , $\alpha \in [0;1]$ – the cut (risk) level, the value of which are specified by the recommendations in [16], for example. The reverse function of $\pi_X(x)$ from (5) is

$$x = a_x \pm b_x \sqrt{-\ln \alpha} \quad \text{or} \quad x = a_x \pm b_x \beta,$$

where $\beta = \sqrt{-\ln \alpha}$.

Let us denote in (4)

$$X = h - X_1$$

with

$$a_x = h - 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$$

and

$$b_x = 0,5(X_{\max} - X_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}.$$

Fuzzy variable T from fuzzy variables X, Y, Z will take a form:

$$T = Z - YX \leq k, \quad (6)$$

By (6):

$$\max(0, Z - YX) = \begin{cases} 0, & \text{if } Z - YX \leq 0 \\ Z - YX, & \text{else} \end{cases}.$$

Algorithms of reliability analysis of the structural elements can be found in numerous works [15, 16, 17, etc.]. Let's consider the reliability analysis of reinforced concrete beam according to the criterion of crack length by method based on fuzzy set theory.

Reverse function from $\pi_Y(y)$, $\pi_Z(z)$ by analogy with $\pi_X(x)$, will be:

$$y = a_y \pm b_y \beta, \quad z = a_z \pm b_z \beta.$$

Let

$$a_z = \sqrt{k^2 + 2kh_0b \cdot 0,5(Y_{\max} + Y_{\min})}, \\ b_z = \sqrt{k^2 + 2kh_0b \cdot 0,5(Y_{\max} - Y_{\min})} / \sqrt{-\ln \alpha}.$$

Reverse function from T is determined using inverse functions from X, Y, Z :

$$t_{left} = (a_z - b_z \beta) - (a_y + b_y \beta)(a_x + b_x \beta)$$

for the left branch of function $\pi_T(t)$ with $t \leq a_t$ and

$$t_{right} = (a_z + b_z \beta) - (a_y - b_y \beta)(a_x - b_x \beta)$$

for the right branch of $\pi_T(t)$ with $t \geq a_t$. If $t = a_t$, then $\pi_T(t) = 1$. Graph of $\pi_T(t)$ is unknown, but its parameters a_t and b_t can be found from the parameters of functions: $\pi_X(x)$, $\pi_Y(y)$, $\pi_Z(z)$. So

$$a_t = a_z - a_y a_x, \quad b_t = b_z - b_y b_x.$$

We should find smallest absolute value

$$\beta = \sqrt{-\ln \alpha_*} = \sqrt{-\ln \pi_T(t)}$$

by condition (6) with $t_{np} = k$ as most dangerous situation. By β value from

$$t_{np} = (a_z + b_z \beta) - (a_y - b_y \beta)(a_x - b_x \beta) = k,$$

the possibility of the beam failure Q will be

$$Q = e^{-\beta_{\min}^2}.$$

If the condition $a_t \leq k$ is true, as the most real situation in the existing RC beams, then possibility of non-failure is $R=1$. The necessity of non-failure calculated as $N=1-Q$. Reliability of reinforced concrete beam according to the criterion of crack length will be characterized by the interval $[N; R=1]$ or in probabilistic terms $[\underline{P}; \bar{P}]$, where \underline{P}, \bar{P} - the lower and upper values of probability of non-failure of a reinforced concrete beam.

Example 1. Let $\tilde{l}_{crc} = X_1 = \{0,24;0,22;0,23\}$ m; $h=0,8$ m; $E_s = 2 \cdot 10^{11}$ Pa; $A_s = 3,79 \cdot 10^{-3}$ m²; $b=0,3$ m; $h_0=0,77$ m; $E_b = \{20,19;21\}$ MPa, cut (risk) level $\alpha=0,05$ and $k = E_s A_s = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,00379 = 7,6 \cdot 10^8$. Parameters of fuzzy arguments of fuzzy function T : $a_x = 0,57$ m; $b_x = 0,0058$ m; $a_y = 1,2 \cdot 10^{10}$ Pa*m; $b_y = 0,346 \cdot 10^{11}$ Pa*m; $a_z = 3,82 \cdot 10^9$ N; $b_z = 9,91 \cdot 10^8$ N. Then $a_t = 3,82 \cdot 10^9 - 1 \cdot 10^{10} \cdot 0,57 = -3,02 \cdot 10^8 \leq k = 7,6 \cdot 10^8$ N, therefore $R=1$.

The roots of the equation

$$(a_z + b_z \beta) - (a_y - b_y \beta)(a_x - b_x \beta) = k$$

is $\beta = \{-3; 624\}$, so $\beta_{\min} = -3$.
Possibility of failure is

$$Q = e^{-(-3)^2} = 0,00013.$$

Necessity of non-failure is $N=1-Q=1-0,00013=0,99987$. Reliability of reinforced concrete beam according to the criterion of crack length characterized by the interval $[0,99987; 1]$. For comparison, let's consider the reliability analysis of RC beam according to the criterion of crack length, if to take $l_{crc,ult} = 0,3h_0$ [2] in condition (1). In this case:

$$X_1 \leq 0,3h_0. \quad (7)$$

Let's assume for X_1 distribution function (5).
Then

$$a_{x,1} = 0,5 \cdot (X_{1,\max} + X_{1,\min});$$

$$b_{x,1} = 0,5(X_{1,\max} - X_{1,\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}.$$

If $a_x \leq 0,3h_0$, then $R=1$. Possibility of failure:

$$Q = \exp \left[- \left(\frac{0,3h_0 - a_{x,1}}{b_{x,1}} \right)^2 \right].$$

Example 2. According to the example 1:
 $\tilde{l}_{crc} = X_1 = \{0,24; 0,22; 0,23\}$ m; $h_0 = 0,77$ m.
 $a_{x,1} = 0,5 \cdot (0,24 + 0,22) = 0,23$ m;
 $b_{x,1} = 0,5(0,24 - 0,22) / \sqrt{-\ln 0,05} = 5,78 \cdot 10^{-3}$ m;
 $\alpha = 0,05$. Let
 $l_{crc,ult} = 0,3h_0 = 0,3 \cdot 0,77 = 0,232$. If
 $a_x = 0,230 \leq 0,3h_0 = 0,232$ m,

then $R=1$. Possibility of failure:

$$Q = \exp \left[- \left(\frac{0,232 - 0,230}{5,78 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \right] = 0,0007.$$

Necessity of non-failure is $N=1-Q=1-0,0007=0,9993$. Reliability of reinforced concrete beam characterized by the interval $[0,9993; 1]$.

Let consider example 2 with $\alpha = 0,1$. Then

$$b_{x,1} = 0,5(0,24 - 0,22) / \sqrt{-\ln 0,1} = 6,57 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

If

$$a_x = 0,230 \leq 0,3h_0 = 0,232 \text{ m,}$$

then $R=1$. Possibility of failure:

$$Q = \exp \left[- \left(\frac{0,232 - 0,230}{6,57 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \right] = 0,0006.$$

Necessity of non-failure $N=1-Q=1-0,0006=0,9994$. Reliability of reinforced concrete beam characterized by the interval $[0,9994; 1]$.

Several tests to calculate the reliability in the form of interval should be performed for important structures. Statistical processing of a subset of intervals can be done on the basis of the theory of evidence by Dempster and Shafer (theory of random sets) [18, 19, 20, etc.].

The results of calculations by models (3) and (7) are very close. Consequently, the reliability analysis of reinforced concrete beam models (3) and (7) confirms the applicability of reliability analysis by the considered methods. Reliability analysis on the model (3) is more time-consuming, but it allows to take into account the variability of a larger number of monitored parameters.

Reliability of reinforced concrete beams (as conventional sequential mechanical system in terms of reliability theory) by all of the criteria of limit state for reinforced concrete beams in theory of possibilities method of reliability analysis is defined as: $Q = \max Q_i$ and $R = \min R_i$, where $i=1,2,...,n$ is the number of limit state criteria for reinforced concrete beams. However, this method is time-consuming, and it can be recommended for the individual ele-

ments, from which depends progressive collapse of the structure.

The residual resource of a RC beam can be determined by the results of the monitoring measurements of the crack length and the known values of the critical (ultimate) crack length according to (2), as shown in Figure 3.

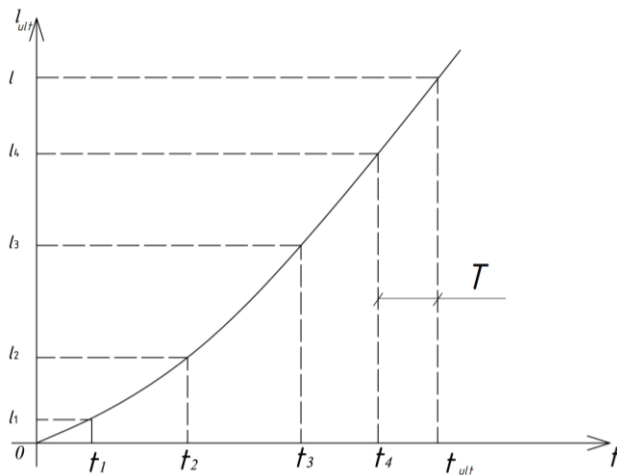


Figure 3. Determination of the residual resource T .

The residual resource of a RC beam on a set of limit state criteria of a RC beam can be obtained with greater precision according to the schedule of dependence

$$Q = \max Q \text{ or } N_{\min} = 1 - \max Q$$

and the time t at a known limit value N_{ult} . However, this method is more time-consuming, and can be recommended for important RC structural elements, from which depends the progressive collapse of the structure.

5. CONCLUSIONS

1. The article presents the method of reliability analysis for reinforced concrete beams on the crack length criterion using the possibility theory and the fuzzy set theory;
2. The proposed method can be used by maintenance organizations to assess the

level of safety of reinforced concrete beams or other structural elements on the crack length criterion;

3. The algorithm of reliability analysis considered in the numerical examples and can be used by specialists in the field of RC structures maintenance.

REFERENCES

1. **Bajkov V.N., Sigalov Je.E.** Zhelezobetonnye konstrukcii. Obshhij kurs [Reinforced Concrete Structures. General Course]. Moscow, 1991, 767 p.
2. **Zajcev Ju.V.** Mehanika razrushenija dlja stroitelej [Fracture mechanics for Civil Engineers]. Moscow, Vysshaja shkola, 1991, 287 p.
3. **Piradov K.A.** Teoreticheskie i jeksperimental'nye osnovy mehaniki razrushenija betona i zhelezobetona [Theoretical and Experimental Foundations of Fracture Mechanics of Concrete and Reinforced Concrete]. Tbilisi, Jenergija, 1998. 355 p.
4. **Piradov K.A., Savickij N.V.** Mehanika razrushenija i teorija zhelezobetona [Fracture Mechanics and Theory of Reinforced Concrete]. Beton i zhelezobeton, 2014, No. 4, pp. 23-25.
5. **Kumar S., Barai V.** Concrete Fracture Models and Applications, Springer Berlin Heidelberg, 2011, 406 p.
6. **Bazant Z.P.** Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures. Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, 1985, Vol.94 of the series NATO ASI Series, pp. 639-666.
7. **Gvozdev A.A.** Novoe v proektirovanii betonnyh i zhelezobetonnyh konstrukcij [A New Development in Design of Concrete and Reinforced Concrete Structures]. Moscow, Strojizdat, 1978, 158 p.
8. **Utkin V.S., Solovyev S.A.** Raschet nadezhnosti zhelezobetonnoj balki na stadii jekspluatacii po kriteriju dliny treshhiny v betone [Reliability Analysis of Reinforced Concrete Beams at the Stage of Operation]

- in Accordance with by the Crack Length Criterion in Concrete]. Vestnik MGSU, 2016, No. 1, pp. 68-79.
9. **Utkin V.S., Solovyev S.A.** Opređenje nesushhej sposobnosti zhelezobetonnyh balok na stadii jekspluatacii pri nalichii treshhin v betone [Analysis of Load-Bearing Capacity of Reinforced Concrete Beams at the Stage of Operation Involving Cracks in Concrete]. Vestnik grazhdanskih inzhenerov, 2015, No. 6(53), pp. 58-64.
 10. **Radajkin O.V.** K sovershenstvovaniju metodiki rascheta zhestkosti izgibaemyh zhelezobetonnyh jelementov iz obychnogo zhelezobetona [About Refinement of Methodology of Stiffness Analysis of Bending Reinforced Concrete Members]. Izvestija KGASU, 2012, No. 1(19), pp. 59-66.
 11. **Augusti G., Baratta A., Casciati F.** Probabilistic methods in structural engineering, London, New York, Chapman and Hall, 1984, 556 pages.
 12. **Utkin V.S., Solovyev S.A., Kaberova A.A., Rusanov V.V.** Sposob izmerenija dliny treshhiny i skorosti ee razvitija v izgibaemyh i rastjanutyh jelementah konstrukcij [Method for Measuring the Length of a Crack and the Rate of its Development in Bending and Tensile Structural Members]. Patent Rossijskaia Federatsiia no. 2596694. MPK G01B7/00 (2015).
 13. **Dubois D., Prade H.** Possibility Theory, Probability Theory and Multiple-valued Logics: A Clarification. // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2001, No. 32, pp. 35-66.
 14. **Zadeh L.A.** Fuzzy sets. // Information and Control, 1965, No. 3, pp. 338-353.
 15. **Utkin V.S., Kaberova A.A., Solovyev S.A.** Reliability analysis of soil bases according to deformation criterion. // International Journal for Computational and Civil Engineering, 2016, Volume 12, Issue 4, pp. 18-26.
 16. **Utkin V.S., Solovyev S.A., Kaberova A.A.** Znachenie urovnja sreza (riska) pri raschete nadezhnosti nesushhih jelementov vozmozhnostnym metodom [The Value of the Risk Level Within Reliability Analysis of Load-bearing Members with the Use of Possibility Method]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2015, No. 6, pp. 63-67.
 17. **Utkin V.S., Solovyev S.A.** Raschet nadezhnosti zhelezobetonnoj balki po kriteriju dliny treshhiny [Reliability Analysis of Reinforced Concrete Beam with the Use of Crack Length Criterion]. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij, 2016, No. 5, pp. 24-33.
 18. **Zhang Z., Jiang. C, Han X., Dean Hu., Yu S.** A response surface approach for structure reliability analysis using evidence theory. // Advanced in Engineering Software, 2014, pp. 37-45.
 19. **Dempster A.P.** Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping. // Annals of Mathematical Statistic, 1967, Vol. 38, No. 2, pp. 325-329.
 20. **Shafer G.A.** Mathematical theory of evidence. Princeton: Princeton university press, 1976, 297 pages.

Vladimir S. Utkin, Dr. Sc., Professor, Department of Industrial and Civil Engineering, Vologda State University; 15, Lenin Street, Vologda, 160000, Russia; Phone/fax: +7 (8172) 51 83 96, e-mail: utkinvogtu@mail.ru

Sergey A. Solovyev, Ph.D. Student, Department of Industrial and Civil Engineering, Vologda State University; 15, Lenin Street, Vologda, 160000, Russia; Phone/fax: +7 (8172) 51-83-96; e-mail: ser6sol@yandex.ru

Уткин Владимир Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры промышленного и гражданского строительства Вологодского государственного университета; 160000, Россия, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15; тел. +7 (8172) 51-83-96, e-mail: utkinvogtu@mail.ru

Соловьев Сергей Александрович, аспирант кафедры промышленного и гражданского строительства Вологодского государственного университета; 160000, Россия, г. Вологда, Набережная 6 Армии, д. 201, тел. +7 (8172) 27-32-82; e-mail: ser6sol@yandex.ru

THE RELIABILITY ANALYSIS OF EXISTING REINFORCED CONCRETE PILES IN PERMAFROST REGIONS

Vladimir S. Utkin, Leonid A. Sushev

Vologda state university, Vologda, RUSSIA

Abstract. The article describes the general problem of safe operation of buildings and structures with the dynamics of permafrost in Russia and other countries. The global warming on Earth will lead to global disasters such as failures of buildings and structures. The main reason of these failures will be a reduction of bearing capacity and the reliability of foundations. It is necessary to organize the observations (monitoring) for the process of reducing the bearing capacity of foundations to prevent such accidents and reduce negative consequences, to development of preventive measures and operational methods for the piles reliability analysis. The main load-bearing elements of the foundation are reinforced concrete piles and frozen ground. Reinforced concrete piles have a tendency to decrease the bearing capacity and reliability of the upper (aerial) part and the part in the soil. The article discusses the problem of reliability analysis of existing reinforced concrete piles in upper part in permafrost regions by the reason of pile degradation in the contact zone of seasonal thawing and freezing soil. The evaluation of the probability of failure is important in itself, but also it is important for the reliability of foundation: consisting of piles and frozen soil. Authors offers the methods for reliability analysis of upper part of reinforced concrete piles in the contact zone with seasonally thawed soil under different number of random variables (fuzzy variables) in the design mathematical model of a limit state by the strength criterion.

Keywords: permafrost; foundation; reinforced concrete piles; compression; theory of possibility; evidence theory; buildings; construction

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СВАЙ НА СТАДИИ ЭКСПЛУАТАЦИИ В УСЛОВИЯХ ВЕЧНОЙ МЕРЗЛОТЫ

В.С. Уткин, Л.А. Сушев

Вологодский государственный университет, г. Вологда, РОССИЯ

Аннотация. Рассматривается общая проблема безопасности эксплуатации зданий и сооружений в условиях динамики вечной мерзлоты применительно к Российской Федерации и другим странам. Глобальное потепление на Земле приведет к глобальным катастрофам в виде разрушений зданий и сооружений. Основной причиной разрушений будет снижение несущей способности и соответственно надежности оснований фундаментов. Для предупреждения таких аварий и снижения негативных последствий необходима организация наблюдений (мониторинг) за процессом снижения несущей способности оснований фундаментов, разработка предупредительных мероприятий и оперативная оценка надежности (безопасности) свайных оснований. Основными несущими элементами основания являются железобетонные сваи и мерзлый грунт. Сваи имеют тенденцию к снижению несущей способности и надежности верхней (надземной) части и части находящейся в грунте. В работе рассматривается проблема расчета надежности верхней части железобетонных свай на стадии эксплуатации зданий и сооружений в условиях вечной мерзлоты в связи с их снижением несущей способности в зоне контакта сезонного оттаивания и замерзания грунта. Оценка их вероятности безотказной работы важна сама по себе, а также необходима для определения надежности всего основания, состоящего из свай и мерзлого грунта. Рассмотрены методы для расчетов надежности верхней части железобетонной сваи в зоне контакта с сезонно оттаивающим грунтом при разном числе случайных величин (нечетких переменных) в расчетной математической модели предельного состояния по критерию прочности сваи. Полученная в результате работы информация является необходимой частью для определения надежности свайного основания зданий и сооружений.

Ключевые слова: вечная мерзлота, свайные основания, железобетонные сваи, сжатие, теория возможностей, теория свидетельств

1. INTRODUCTION

The Russian State Standard GOST 31937-2011 came into force in 2010. According to this GOST, the safety of buildings and structures is characterized by a residual resource (lifetime) and technical condition category. The same requirements are specified in the International Standard ISO 2394:1998, «General principles on reliability for structures». Measures of structural safety are risk value, reliability, residual resource (lifetime) by all limit state criteria. The assessment of technical condition category and reliability requires the development of new methods for implementation of requirements of new Russian State Standards: GOST 31937-2011, SP 25.13330.2012, SP 63.13330.2012, etc. The special difficulty in realization of these requirements shows up when it applies to building in the conditions of the permafrost, which occupied more than 60 percent of territory of The Russian Federation, large area of Canada and some other countries. The significance of the problem for global warming (RIA News «Round table») was declared by the MES Deputy Minister of Russian Federation - R. Tsalikov, who noted that "more than a quarter of the housing stock may be subjected to failures", and "with increasing mean annual temperature by 1-2 degrees bearing capacity of piles in the permafrost regions will be reduced by 50 percent" [1]. The article [2] presents the results of testing the hanging precast piles for their bearing capacity depending on the temperature of the soil. Temperature increasing from - 10 to - 0.3 C reduces its bearing capacity of the middle-sized sand by almost nine times, and almost seven times for clay soils. The article [3] presents the dynamics of the modern climate of the North and the Northern territories with permafrost. The article [3] also notes that a moistening of the seasonally thawing layer of soil (sharply increased in recent) and the thawing of the upper horizons of permafrost has a great impact on the engineering structures. As a result, about 300 buildings in Norilsk (Russian Federation) had to be dismantled due to the reduction of their reliability.

The number of structures with deformations from the differential settlement of frozen soils is increased by 42% in Norilsk (in 61% Yakutia) in 1990-1999. All this is due to the climate change and to the poor performance of inspection services [3]. The problems of reliability analysis of structures in the permafrost regions were considered in the foreign papers [3-8]. In the conditions of permafrost and global warming, which currently observed on the territory of the Russian Federation, the greatest relevance is an ensuring of the safe operation of buildings and structures are their foundations. As a result of warming, the bearing capacity of foundations is reducing [9]. Most of the structures in permafrost regions have pile foundations. Accordingly, the main problem in the area of structures safety management now is developing methods for technical condition assessment and the periodic reliability analysis of the pile foundations. Quantitative measure of the technical condition of foundations and piles is their bearing capacity, which is characterized by the ultimate load which does not lead the foundation or individual piles to the limit state. The measure of the reliability of pile foundation is the probability of non-failure. It should be noted that one part of the pile is in the frozen ground, and the other part of it is in the layer of seasonal thawing soil and in the air to the pile cap.

2. PROBLEM STATEMENT

The pile foundation includes piles, the largest part of its length is in the surrounding soil. Accordingly, the bearing capacity of the pile foundation depends on bearing capacity of piles and the soil. In the contact of the upper part of piles with the surface of soil in the conditions of the seasonal thawing there is a degradation of materials in reinforced concrete piles. It leads to the reduction of the bearing capacity of the piles and their reliability [10]. In terms of the reliability theory, the construction of pile foundation is represented as a sequential system consisting of two elements: the piles at the level

of seasonal thawing with access to the pile cap and the permafrost soil with the piles. The reliability (probability of non-failure) of the sequential system in probabilistic-statistical methods of reliability analysis is calculated as the multiplication of the probabilities: $P = P_1 \cdot P_2$, where P_1 – the probability of non-failure of the piles at the level of seasonal thawing and higher; P_2 – the probability of non-failure of the permafrost soil with the piles (i.e. $P = P_1 \cdot P_2$). The most dangerous time of year for such foundations is the summer, when reducing of bearing capacity (as a result of thawing of the upper soil layer and as a result of weakening of the pile from degradation of pile materials by periodic freezing and thawing of soil around the piles results in lower level of safety of the foundations and structures in general. In this regard, the reliability analysis of the RC piles and the soil with the piles is an important and actual problem currently. The present article describes the problem of the reliability analysis of only the upper part of the pile.

3. LITERATURE REVIEW

In State Standard GOST 27751-2014 “Reliability of structures and foundation soils” it is noted that probabilistic-statistical methods is applicable for reliability analysis “even there sufficient data about the parameters variability are available” in a design model. Academician V. V. Bolotin [11] also points to the necessity for “finding the distribution functions and other probabilistic characteristics of random variables” in the reliability analysis, which requires a “full” statistical information about the parameters in the design model. Using of continuous uniform distribution for extremely small information to describing random variables, in which the two values of a random variable it is already possible to find an unambiguous value of probability of an event, in the task of evaluating the level of safety and for other important tasks cannot be

recommended because of the low accuracy of the results.

The calculation of the upper part of the pile according to the criterion of the bearing capacity (strength criterion) overlaps with the calculation of short reinforced-concrete columns. The paper [12] contains the results of research and reliability analysis of reinforced-concrete columns, but with full statistical information using probabilistic methods. The reliability analysis of reinforced-concrete columns was conducted in the article [12] with limited information, using distribution functions based on Chebyshev inequality. The reliability analysis of reinforced concrete columns was conducted in the paper [13] with limited information, using interval truncated distribution function. However, these distributions require more detailed information about the monitored parameters, in particular, the knowledge of the expected value and standard deviation, and the extreme values of the sample. In addition, all the above works do not consider the equality of strain of concrete and reinforcement in reinforced-concrete columns in the design mathematical model of limit state in the column when it is compressed.

4. RELIABILITY ANALYSIS

The article describes a new method for the reliability analysis (P_1) of the existing RC pile part, located in the upper active layer of the soil. The proposed method of reliability analysis is addition to existing methods for reliability analysis, which based on probabilistic and statistical methods with full statistical information about the random variables in the design mathematical models of limit states (recommended by GOST 27751-2014). The solution to this problem will allow using it in reliability analysis of reinforced-concrete piles in all conditions of their work, i.e. outside the permafrost regions, and also determining the risk (measure of danger), which expands the relevance of the article. It is known [15] that the bearing capacity of compressed concrete piles above the surface of the

frozen soil on the strength criterion is defined (without taking into account the various factors) by the formula [15]:

$$N_{pile} = R_b A_b + R_s A_s, \quad (1)$$

where R_b – the design compressive strength (resistance) of the concrete piles, which defined at the stage of operation by non-destructive test; taking into account the limited number of these tests for single RC pile, it is advisable to use instead the R_b average compressive strength $\bar{\sigma}_b$ obtained by 3-5 non-destructive tests. So, we use average compressive strength $\bar{\sigma}_b$ in (1) instead R_b ; R_s – the design strength (resistance) of steel reinforcement, which is taken by the standards depending on the type of rebar; A_b and A_s – cross-section area of concrete and steel reinforced in pile.

In areas close to the pile cap could be used the formula (1). But, taking into account the strain equality of concrete ε_b and reinforcement ε_s in pile and a significant (about 10 times) the difference of the modules of elasticity of concrete and steel, and the ability to deform steel and after reaching the yield strength (which is not allowed by R_s value), the calculation of the pile bearing capacity N_{cb} according to the strength criterion in compression should be based on a formula, which takes into account equality of strains of concrete and reinforcement $\varepsilon_b = \varepsilon_s$ according to the formula:

$$\bar{N}_{pile} = \bar{\sigma}_b A_b + \bar{\varepsilon}_b E_s A_s, \quad (2)$$

where E_s – modules of elasticity of steel reinforcement accepted as the determined value because his small variability [15]: $E_s = 2 \cdot 10^5$ MPa; σ_b – concrete compression strength, which is calculated by the value of strain in concrete piles in compression ε_b and modules of elasticity of concrete E_b as: $\sigma_b = \varepsilon_b E_b$.

Based on all remarks, the bearing capacity of RC pile on (2) is possible to present as:

$$\bar{N}_{pile} = \bar{\varepsilon}_b (E_b A_b + E_s A_s). \quad (2')$$

Accepted in Russian State Standards (SP and SNiP) limit strain of rebar by the possibility of losing rebar stability with the formation of longitudinal cracks in concrete does not prove to be correct in this case because of the short part of pile between soil and pile cap for structures in the permafrost regions.

Thus, the problem is taken to determining the value of existing load \tilde{N}_{ex} , when determining \tilde{N}_{ex} by collecting loads it is impossible to determine the stress on concrete pile. Moreover, it is difficult to determine the most damaged or the most loaded pile taking into account uneven distribution of the loads on piles.

It is therefore proposed to determine the bearing capacity of piles by experiment, in all conditions and in permafrost regions only in summer time. The most loaded or most damaged pile (as a rule, being in the corner of structure at the same amount of floors or on an area with the large number of floors) are selected for tests. Then resistance strain gauges are glued at different height in a reinforced-concrete pile above the ground surface and above the degraded pile site on four of its surfaces (for piles of square section) and measure their ohmic resistances R_0 . Then milled flat layer of concrete (with no rebar) above and below the gages to the depth, at which the imperceptible change in the resistance of gauges, and re-defined their ohmic resistance as R_1 . The engineering strain can be calculated as:

$$\varepsilon = \frac{|R_0 - R_1|}{R_0 k},$$

where k – the factor of the strain gauge sensitivity. The engineering strain of the concrete is calculated at the all faces of the pile. Then it is calculated the average value

$$\bar{\varepsilon} = 0.25(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4).$$

Statistical analysis of the results of ohmic resistances R_i ($i=1, 2, 3, 4$) or strains ε_i measurements is carried out by probabilistic methods. However, the results of reliability analysis by probabilistic methods may not be correct with such a small size of statistical information about ε_i of one pile. In this regard, it is proposed to carry out the reliability analysis of piles based on the theory of possibilities [17-22] with a small amount of experimentally acquired data about the test parameters (random variables). Random variable or fuzzy variable (in terms of possibility theory [17-22]) is described by a distribution function of possibilities $\pi_{\tilde{N}}(N)$ or (in general) $\pi_X(x)$. The greatest using has received a fuzzy function [17-22]:

$$\pi_X(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - a_x}{b_x} \right)^2 \right], \quad (5)$$

where

$$a_x = 0.5 \cdot (X_{\max} + X_{\min}); b_x = \frac{(X_{\max} - X_{\min})}{2\sqrt{-\ln \alpha}},$$

X_{\max} and X_{\min} – the maximum and minimum value of fuzzy variable X ; $\alpha \in [0;1]$ – the cutoff level, which value are set [20].

Figure 1 shows the form of this function (5) with its parameters.

More information about the fuzzy functions can be found in the articles [17-22].

If a condition

$$a_x \leq \varepsilon_b(E_b A_b + E_s A_s)$$

is executed, then the pile possibility of non-failure R according to the criterion (4) it is deemed to be equal to one. For existing buildings and structures, this condition usually performed.

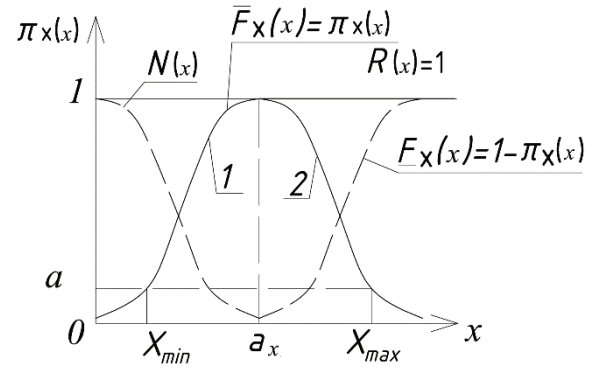


Figure 1. Fuzzy function $\pi_X(x)$. $F(x)$, $\bar{F}(x)$ – the lower and upper (boundary) distribution function of the fuzzy variable X . 1 – the left branch, 2 – the right branch.

The possibility of failure Q in this case is equal to

$$\pi_X(x) = \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_b(E_b A_b + E_s A_s) - a_x}{b_x} \right)^2 \right].$$

The necessity of non-failure is calculated as $N=1-Q$. The value of reliability of the piles according to the criterion (4) will be characterized by the interval $[N; R]$. It can be represented in probabilistic terms as $[\underline{P}; \bar{P}]$, where \underline{P} and \bar{P} – the lower and upper values of probability of non-failure.

In responsible cases, it is impossible to use reliability analysis for the one pile. Then the described method of reliability analysis is used for several piles. As a result, we have a set of values of the reliability intervals $[\underline{P}_i; \bar{P}_i]$, $i=1...n$.

It is possible to find the statistical expected value of reliability on the evidence theory [22-25] as an interval $[\underline{P}; \bar{P}]$, where

$$\underline{P} = \underline{E}X = \sum_{i=1}^n m(A_i) \inf A_i$$

and

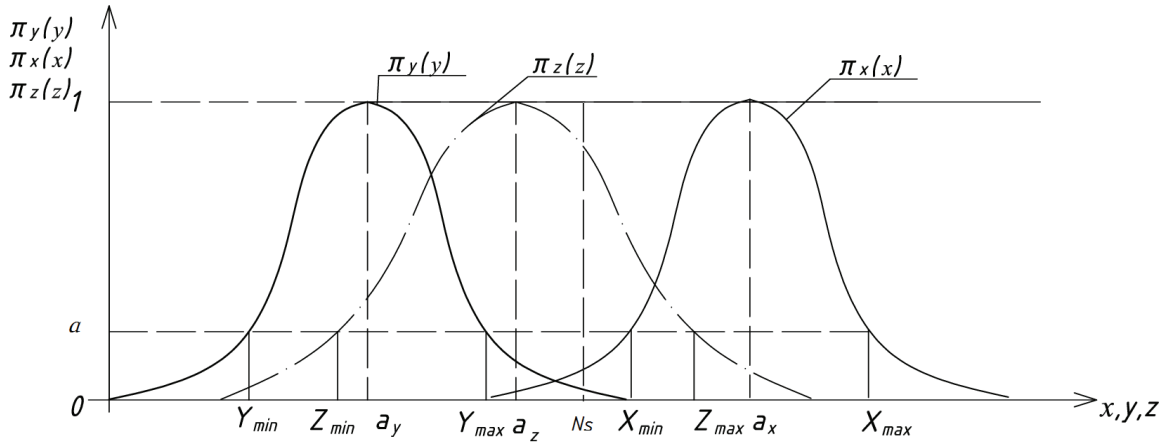


Figure 2. Illustration of the subtraction of fuzzy variables $\pi_X(x) - \pi_Y(y) = \pi_Z(z)$

$$\bar{P} = \bar{E}X = \sum_{i=1}^n m(A_i) \sup A_i.$$

Example 1. Let following values are conditionally known:

$E_s = 2 \cdot 10^{11}$ Pa;

$E_b = 2 \cdot 10^9$ Pa; $A_b = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09 \text{ m}^2$;

$A_s = 3 \cdot 10^{-4}$ m^2 ;

$N_{ult} = \varepsilon_{ult}(E_b A_b + E_s A_s) = 10.46 \cdot 10^6$ N. We will set the value of load on a pile by results the pile tests in a form: $\tilde{N}_{ex} = \{8, 9, 10, 11\} \cdot 10^6$ N;

$a_x = 9.5 \cdot 10^6$ N;

$b_x = (11 - 8) / 2\sqrt{\ln 0.01} = 0.7 \cdot 10^6$ N with

$\alpha = 0.01$. As $a_x = 9.5 \cdot 10^6 < 10.46 \cdot 10^6$ N, then $R = 1$.

$$Q = \exp\left\{-\left[\frac{10.46 - 9.5}{0.7}\right]^2\right\} = \exp(-1.88) = 0.15.$$

Then necessity of non-failure is $N = 1 - Q = 1 - 0.15 = 0.85$. The reliability interval is $[0.85; 1]$.

If the modulus of elasticity of concrete E_b is evaluated by nondestructive testing too, then a fuzzy variable \tilde{E}_b is described by the function (5). A mathematical model of the limit state (5) takes the form:

$$\tilde{N}_{ex} \leq \varepsilon_{ult}(\tilde{E}_b A_b + E_s A_s) \quad (6) \quad \text{where } b_z = b_x + b_y.$$

Multiplication of fuzzy variable by deterministic value - is a fuzzy variable. We'll denote $Y = \varepsilon_{ult} \tilde{E}_b A_b$. The Y will be described by the fuzzy distribution function (5). We will transform expression (6) as:

$$X - Y \leq \varepsilon_{ult} E_s A_s, \quad (7)$$

where the right part of inequality is deterministic value.

Figure 2 shows the function of fuzzy variable $Z = X - Y$ obtained by subtracting the functions $\pi_X(x) - \pi_Y(y)$ [26] with $a_X > a_Y$.

As a result we have $Z_{\min} = X_{\min} - Y_{\max}$ and $Z_{\max} = X_{\max} - Y_{\min}$. The uncertainty of information about the fuzzy variable Z increases in comparing with X and Y . At the same time $a_z = a_x - a_y$. If $a_z \leq N_s = \varepsilon_{ult} E_s A_s$, then $R = 1$ (as conventionally shown in Fig. 2 with $\varepsilon_{ult} E_s A_s = N_s$ for compactness). The possibility of failure Q calculated as $Q = \pi_z(z = N_s)$, or in the wide form

$$Q = \exp\left[-\left(\frac{N_s - a_z}{b_z}\right)^2\right],$$

The necessity of non-failure is calculated as $N=1-Q$. The reliability will be characterized by the interval $[N; R]$.

Example 2. Let following values are conditionally known:

$$N_{ult} = \varepsilon_{ult} E_s A_s = 4.2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0.03 = 25.2 \cdot 10^3 \text{ kN};$$

$$a_x = 30 \cdot 10^3 \text{ kN}; \quad a_y = 11.34 \cdot 10^3 \text{ kN};$$

$$b_x = 3 \cdot 10^3 \text{ kN}; \quad b_y = 1 \cdot 10^3 \text{ kN}. \quad \text{Then}$$

$$a_z = 30 \cdot 10^3 - 11.34 \cdot 10^3 = 18.66 \cdot 10^3 \text{ kN}$$

$$\leq N_s = 25.2 \cdot 10^3 \text{ kN} \text{ and possibility of non-failure } R=1. \quad b_z = b_x + b_y = 4 \cdot 10^3 \text{ kN. The possibility of failure is}$$

$$Q = \exp \left[- \left(\frac{N_{ult} - a_z}{b_z} \right)^2 \right] = \exp \left[- \left(\frac{25.2 \cdot 10^3 - 18.66 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3} \right)^2 \right] = 0.069.$$

The necessity of non-failure is $N=1-0,069=0,931$. The reliability will be characterized by the interval $[0.931; 1]$.

A more realistic assessment of the reliability of piles can be obtained from a wider set of test piles of the same structure. In this case, we will have a subset of intervals of reliability. For their statistical analysis uses of evidence.[22-25], as noted above.

Let's consider the evaluation of the statistical expected value of reliability on information as subset of the intervals of reliability. Let following values of reliability intervals are conditionally known $[0,91; 1]; [0,92; 1]; [0,93; 1]; [0,93; 1]; [0,90; 1]$. By condition of example: $C_i = 1, N = 5$. For the data given in intervals, we will have

$$m(A_1) = \frac{1}{5}; m(A_2) = \frac{1}{5}; m(A_3) = \frac{1}{5}; m(A_4) = \frac{1}{5}; m(A_5) = \frac{1}{5}.$$

So

$$\bar{EX} = \frac{(1+1+1+1+1)}{5} = 1$$

and

$$\bar{EX} = \frac{(0.92 + 0.91 + 2 \cdot 0.93 + 0.90)}{5} = 0.918.$$

The statistical expectation value of reliability will be presented in the form of interval $[0.918; 1]$.

CONCLUSIONS

1. The problem of influence of global warming on Earth is considered for the reduction in the reliability (safety) of piles in permafrost regions as a result of reduction of the bearing capacity of reinforced concrete piles from the degradation of the concrete.
2. The methodology of reliability analysis of reinforced-concrete piles is first represented according to the strength criterion with limited statistical information on controlled parameters, with refinement of existing design formulas for RC piles in compression;
3. Two cases are considered for the reliability analysis of reinforced-concrete piles with different number of fuzzy variables in the mathematical design models of limit state;
4. Examples of reliability analysis of RC piles are given as an algorithm for calculations;
5. Possibility of account of reliability analysis of a few piles is first shown with the use of evidence.

REFERENCES

1. **Priroda Rossii.** Natsionalnyy portal. [Russian nature. National portal] [online]. URL: www.priroda.ru/item/387 (accessed: 30.12.2015).
2. **Semelit V.Yu., Gruzin A.V.** Vliyanie temperatury grunta na nesushchuyu sposobnost svai v usloviyakh vechnoy merzloty [Effect of soil temperature on the bearing capacity of the pile in the permafrost]. Problemy geologii i osvoeniya nedr, 2013, No. 2, pp. 422-423.

3. **Vasilev A.A., Drozdov D.S., Moskalenko N.G.** Dinamika temperatury mnogoletnmerzlykh porod Zapadnoy Sibiri v svyazi s izmeneniyami klimata [Dynamics of permafrost temperatures in Western Siberia breeds in relation to climate change]. *Kriosfera zemli*, 2008, Vol. XII, No. 2, pp. 10-18.
4. **ACIA 2004.** Impacts of warming arctic: climate impact assessment. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2004, 228 p.
5. **ACIA 2005.** Arctic climate impact assessment. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005, 234 p.
6. **Pavlov A.V., Malkova G.V.** Sovremennye izmeneniya klimata na severe Rossii. Album melkomasshtabnykh kart [Modern climate change in northern Russia. Album of small-scale maps]. Novosibirsk, Geo, 2005, 54 p.
7. **Romanovsky V.E., Smith S.L., Christiansen H.H.** Permafrost thermal state in the polar Northern Hemisphere during the international polar year 2007–2009: a synthesis. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2010, Vol. 21, pp. 106-116.
8. **Oberman N.T., Shesler I.G.** Sovremennye i prognoziруemye izmeneniya merzlotnykh usloviy evropeyskogo severo-vostoka Rossiyskoy Federatsii [Current and projected changes in permafrost conditions for European Russia northeast]. *Problemy Severa i Arktiki Rossiyskoy Federatsii: Nauchnoinform. Byul*, 2009. Vol. 9, pp. 96-106.
9. **Kluzek E.B., Olson J., Rosinski J.** User's guide to NCAR CCM 3.6. Boulder, Colorado, USA, 1996, 147 p.
10. **Khrustalev L.N., Davydova I.V.** Prognoz potepleniya klimata i ego uchet pri otsenke nadezhnosti osnovaniy zdaniy na vechnomerzlykh gruntakh [Forecast of global warming and its account in assessing the reliability of the bases of buildings on permafrost]. *Kriosfera Zemli*, 2007, Vol. XI, No. 2, pp. 68-75.
11. **Bolotin V.V.** Prognozirovanie resursa mashin i konstruktsiy [Forecasting of resource of machines and constructions]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 312 p.
12. **Sorokin Ye.V.** Raschet i prognozirovanie dolgovechnosti zhelezobetonnykh konstruktsiy [Calculation and prediction of durability of reinforced concrete structures]. Ph.D. thesis. Penza, 2014, 179 p.
13. **Yarygina O.V.** Metody rascheta nadezhnosti zhelezobetonnykh konstruktsiy v sostave zdaniy i sooruzheniy pri ogranichennoy statisticheskoy informatsii [Reliability Analysis of Reinforced Concrete Structures of Buildings and Facilities in Conditions of Limited Statistical Information]. Ph.D. theses. Saint-Petersburg, 2013, 23 p.
14. **Utkin V.S., Yarygina O.V.** Raschet nadezhnosti zhelezobetonnoy kolonny po kriteriyu prochnosti na stadii ekspluatatsii [Calculation of reinforced concrete columns reliability on the criterion of strength during the operational phase]. *Beton i zhelezobeton*, 2012, No. 4, pp. 14-16.
15. **Metelyuk N.S., Shishko G.F., Soloveva A.B. etc.** Svai i svaynye fundamenty. Spravochnoe posobie [Piles and pile foundations. Reference manual]. Kiev, Budivelnik, 1977, 256 p.
16. **Augusti G., Baratta A., Kashiati F.** Veroyatnostnye modeli v stroitelnom proektirovanii [Probabilistic models in building design]. Moscow, Stroyizdat, 1988, 584 p.
17. **Dyubua D., Prad A.** Teoriya vozmozhnostey. Prilozheniya k predstavleniyu znaniy v informatike [Theory of possibility. Applications to knowledge representation in computer science]. Moscow, Radio i svyaz, 1990, 288 p.
18. **Utkin V.S.** Safety analysis of soil beds of foundations based on bearing capacity criterion. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 2014, Vol. 51, No. 1, pp. 9-16.
19. **Utkin V.S., Solovyev S.A.** Raschet nadezhnosti zhelezobetonnoy balki na stadii ekspluatatsii po kriteriyu dliny treshchiny v betone [Calculation of reinforced concrete beams reliability at the operation stage by

- the criterion of length of the crack in concrete]. Vestnik MGSU, 2016, No. 1, pp. 68-79.
20. **Utkin V.S., Solovyev S.A., Kaberova A.A.** Znachenie urovnya sreza (riska) pri raschete nadezhnosti nesushchikh elementov vozmozhnostnym metodom [The value of the slice level (risk) in calculating the reliability of bearing elements possibilistic method]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy, 2015, No. 6, pp. 63-67.
 21. **Eryilmaz S., Yazgi Tutuncu G.** Stress strength reliability in the presence of fuzziness. Journal of computational and applied mathematics, 2015, Vol. 282, pp. 262-267.
 22. **Utkin L.V.** Analiz riska i prinyatie resheniy pri nepolnoy informatsii [Risk analysis and decision making with incomplete information]. Saint-Petersburg, Nauka, 2007, 404 p.
 23. **Dempster A.P.** Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Annals of Mathematical Statistics, 1967, Vol. 38, pp. 325-339.
 24. **Shafer G.A.** Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976, 297 p.
 25. **Zhang Z., Jiang C., Han X., Dean Hu, Yu S.** A response surface approach for Structure reliability analysis using evidence theory. Advanced in Engineering Software, 2014, pp. 37-45.
 26. **Utkin V.S., Utkin L.V.** Opredelenie nadezhnosti stroitelnykh konstruktsiy: Uchebnoe posobie [Calculation of reliability of building structures: Textbook]. Vologda, VoGTU, 2000, 168 p.

Уткин Владимир Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры промышленного и гражданского строительства Вологодского государственного университета; 160000, Россия, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15; тел. +7 (8172) 51-83-96, e-mail: utkinvogtu@mail.ru

Сушев Леонид Андреевич, аспирант кафедры промышленного и гражданского строительства Вологодского государственного университета; 160000, Россия, г. Вологда, Набережная 6 Армии, д. 201, тел. +7 (8172) 27-32-82; e-mail: : sushevleo@mail.ru

Vladimir S. Utkin, Dr. Sc., Professor, Department of Industrial and Civil Engineering, Vologda State University; 15, Lenin Street, Vologda, 160000, Russia; Phone/fax: +7 (8172) 51 83 96, e-mail: utkinvogtu@mail.ru

Leonid A. Sushev, Ph.D. Student, Department of Industrial and Civil Engineering, Vologda State University; 15, Lenin Street, Vologda, 160000, Russia; Phone/fax: +7 (8172) 51-83-96; e-mail: sushevleo@mail.ru

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-2-73-83

ТРЕХИНВАРИАНТНЫЙ КРИТЕРИЙ ТЕКУЧЕСТИ В ЗАДАЧЕ ПРОБИВАНИЯ ПЛАСТИНЫ ИЗ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА Д16(А)Т ЖЁСТКИМ ТЕЛОМ

В.В. Вершинин^{1,2}, В.Л. Мондрус¹

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача пробивания свободных круглых пластин из алюминиевого сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) различной толщины жёстким сферическим телом, ударяющим по центру мишени нормально к её поверхности. Осуществляется численное моделирование рассматриваемой задачи с помощью метода конечных элементов, используя для описания законов деформирования и разрушения материала мишени феноменологические трёхинвариантные критерии текучести и прочности, соответственно, совместно с ассоциированным законом пластического течения и линейным законом накопления материалом повреждений. Проводится сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, а также с численными результатами, полученными с использованием более простых феноменологических моделей материала. Оценивается необходимость одновременного учёта в рамках критерия текучести всех трёх инвариантов напряжённого состояния для обеспечения точности результатов численного моделирования.

Ключевые слова: феноменологический трёхинвариантный критерий текучести, пробивание пластины, алюминиевый сплав, численное моделирование

PRESSURE- AND LODE-DEPENDENT YIELD CRITERION WITHIN THE PROBLEM OF 2024-T3(51) ALUMINUM ALLOY PLATE PERFORATION BY A RIGID PROJECTILE

Vladislav V. Vershinin^{1,2}, Vladimir L. Mondrus¹

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The problem of perforation of free circular plates made of 2024-T3(51) aluminum alloy or its Russian analogue D16(A)T with various thicknesses normally impacted at their centers by a rigid spherical projectile is considered. The considered problem is numerically simulated through the finite element method utilizing phenomenological pressure- and Lode-dependent yield and fracture criteria along with an associated flow rule and a linear damage accumulation law to describe the target material deformation and fracture. Comparison of the obtained results with the experimental data as well as with the numerical results calculated using less sophisticated phenomenological material models is made. Necessity of a yield criterion pressure and Lode dependence to provide accuracy of numerical simulation is assessed.

Keywords: phenomenological pressure- and Lode-dependent yield criterion, plate perforation, aluminum alloy, numerical simulation

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования законов деформирования и разрушения алюминиево-

го сплава Д16(А)Т и его зарубежного аналога АА2024-Т3(51), представленные в [1-9], показали, что деформационные и прочностные характеристики данных сплавов зависят

от трёх инвариантов напряжённого состояния — I_1 , J_2 и J_3 , — так что для их описания необходимо использовать трёхинвариантные критерии текучести и прочности. В то же время при численном моделировании задач пробивания деформируемой твёрдой преграды жёстким или деформируемым твёрдым телом большое число исследователей пользуются упрощёнными критериями текучести и прочности, зависящими только от J_2 или, что реже, от I_1 и J_2 . Современное состояние вопроса соударения деформируемых и жёстких твёрдых тел, в том числе и из рассматриваемого в настоящей работе сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51), подробно излагается в недавно вышедшей монографии Розенберга и Декеля [10], где также имеется обширный библиографический список по данной теме.

В работах [11-12] исследовался вопрос численного моделирования с помощью метода конечных элементов задачи пробивания свободных круглых пластин из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) различной толщины жёстким сферическим телом. В частности, было определено, что трёхинвариантный критерий разрушения, предложенный в [13], даёт лучшее совпадение качественных и количественных результатов численного моделирования с экспериментом, чем критерий разрушения Джонсона-Кука [14], зависящий только от I_1 и J_2 . Однако для описания неупругого деформирования материала мишеней в работах [11-12] использовался лишь классический критерий текучести Мизеса [15], расширенный Джонсоном и Куком [16] на случай зависимости предела текучести от скорости деформирования и температуры.

В настоящей работе исследуется влияние учёта в рамках критерия текучести всех трёх инвариантов напряжённого состояния на точность численного моделирования пробивания пластины из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) жёстким телом. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными и

альтернативным численным решением, подробно описанными в [11-12].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача пробивания свободных круглых пластин из алюминиевого сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) различной толщины жёстким сферическим телом, ударяющим по центру мишени нормально к её поверхности. Сферический ударник выполнен из высокопрочной стали и имеет номинальный диаметр $D = 10.0$ мм. Алюминиевые пластины имеют номинальный диаметр $d = 81.4$ мм и толщины $H = 1, 2, 3, 6, 12, 20$ мм, так что безразмерная толщина мишеней изменяется в диапазоне $H/D = 0.1 - 2$. Экспериментальные исследования в рамках сформулированной задачи в указанном диапазоне безразмерных толщин мишеней были впервые проведены Зенфом и Вайманном [17], а затем независимо Бивиным [18-19]. В работе [11] эти экспериментальные данные были существенно дополнены и систематизированы. Были получены качественные картины разрушения мишеней с различными отношениями H/D (подробно описаны в [11]), а также определены эмпирические соотношения между безразмерной толщиной мишени H/D и баллистическим пределом V_{bl} в м/с:

$$V_{bl} = 622 \left(\frac{H}{D} \right)^{0.673} - 33 \text{ при } \frac{H}{D} \geq 0.19, \quad (1)$$

$$V_{bl} = 454 \frac{H}{D} + 92 \text{ при } 0.08 \leq \frac{H}{D} < 0.19. \quad (2)$$

Баллистическим пределом V_{bl} называется некоторое предельное значение скорости ударника, ниже которого не происходит пробивание мишени. Качественные и количественные результаты экспериментов выступают в качестве «эталонного» решения поставленной задачи.

2. КРИТЕРИИ ТЕКУЧЕСТИ И РАЗРУШЕНИЯ, ЗАКОН ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И ЗАКОН НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Для формулировки критериев текучести и разрушения, используемых при численном моделировании, необходимо сначала дать определение некоторым величинам, характеризующим напряжённое состояние деформируемого твёрдого тела в точке. Так,

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad (3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad (4)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}, \quad (5)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений σ ,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mean} \delta_{ij}$$

– компоненты девиатора напряжений S ,

$$\sigma_{mean} = I_1 / 3$$

– среднее нормальное напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера. Также здесь и далее по тексту имеет место суммирование по повторяющимся индексам. Стоит отметить, что вместо величин (3)-(5) чаще используют такие параметры напряжённого состояния, как эквивалентное напряжение по Мизесу q [15], угол Лоде θ и параметр Лоде-Надаи L [20-22]:

$$q = \sqrt{3J_2}, \quad (6)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right), \quad (7)$$

$$L = \frac{3 \tan(\theta) - \sqrt{3}}{\tan(\theta) + \sqrt{3}}. \quad (8)$$

Критерий текучести Джонсона-Кука [16] имеет следующий вид:

$$F(\sigma) = q - [A + B \bar{\varepsilon}_{pl}^n] \left[1 + C \ln \left(\dot{\varepsilon}_{pl} / \dot{\varepsilon}_0 \right) \right] \times \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^s \right] = 0 \quad (9)$$

где A, B, C, n, s – параметры критерия, T_0 – температура тела, при которой определялись параметры A, B и n , задающие деформационную кривую материала, T_m – температура плавления материала, скорость эквивалентных пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{pl}$ равна

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij} (\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij}}, \quad (10)$$

$(\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij}$ – компоненты девиатора скорости пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{pl}$, накопленная эквивалентная пластическая деформация $\bar{\varepsilon}_{pl}$ равна

$$\bar{\varepsilon}_{pl} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij} (\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij}} dt, \quad (11)$$

T – текущая температура материала, а $\dot{\varepsilon}_0$ – скорость эквивалентных деформаций, при которой определялись значения параметров A, B и n .

В работе [23] Вершининым был сформулирован новый трёхинвариантный критерий текучести следующего вида:

$$F(\sigma) = q - [\sigma_{yt} - a(I_1 - \sigma_{yt})] \times \left[c_s + (c_{ax} - c_s) \left(\gamma - \frac{\gamma^{m+1}}{m+1} \right) \frac{m+1}{m} \right] = 0 \quad (12)$$

где $\sigma_{yt} \equiv \sigma_{yt}(\bar{\varepsilon}_{pl}, \dot{\varepsilon}_{pl}, T)$

– закон деформирования материала при одноосном растяжении и разной скорости деформирования и температуре, параметр c_{ax} определяется как

$$c_{ax} = \begin{cases} c_t & \text{при } \bar{\theta} \geq 0 \\ c_c & \text{при } \bar{\theta} < 0 \end{cases}, \quad (13)$$

где $\bar{\theta} = 1 - 6\theta/\pi$, а переменная γ – как

$$\gamma = \frac{\cos(\pi/6)}{1 - \cos(\pi/6)} \left[\frac{1}{\cos(\theta - \pi/6)} - 1 \right]. \quad (14)$$

Закон деформирования рассматриваемого алюминиевого сплава задаётся как линейная комбинация законов Свифта [24] и Воце [25], дополненная множителями, учитывающими влияние скорости деформирования и температуры на предел текучести материала, в форме Джонсона-Кука (9):

$$\sigma_{yt} = \left[A(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_{pl})^n + K + Q(1 - \exp(-B\bar{\varepsilon}_{pl})) \right] \times \left[1 + C \ln(\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}/\dot{\bar{\varepsilon}}_0) \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^s \right] \quad (15)$$

Таким образом, критерий текучести (12) с законом деформирования в форме (15) имеет 16 параметров – $A, \varepsilon_0, n, K, Q, B, C, \dot{\bar{\varepsilon}}_0, T_m, T_0, s, a, c_t, c_c, c_s, m$.

Критерии текучести (9) и (12) дополняются ассоциированным законом пластического течения [26-27]:

$$(\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij} = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (16)$$

где $(\dot{\varepsilon}_{pl})_{ij}$ – компоненты тензора скорости пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{pl}$, F – пластический потенциал (совпадает с критерием текучести), $\dot{\Lambda}$ – множитель, в случае критерия текучести (9) равный $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$, а в случае кри-

терия текучести (12) имеющий гораздо более сложную форму (см. [23]).

Лу, Юн и Ха в работе [13] предложили трёхинвариантный критерий разрушения:

$$\bar{\varepsilon}_{pl,f} = C_3 \left(\frac{2}{\sqrt{L^2 + 3}} \right)^{-C_1} \times \left(\frac{1}{1 + C_f} \left[\eta + \frac{3 - L}{3\sqrt{L^2 + 3}} + C_f \right] \right)^{-C_2}, \quad (17)$$

где $\eta = \sigma_{mean}/q$ – трёхосность напряжённого состояния, $\bar{\varepsilon}_{pl,f}$ – эквивалентные пластические деформации при разрушении материала, а C_1, C_2, C_3, C_f – параметры материала. Необходимо подчеркнуть, что, так как в процессе нагружения напряжённое состояние материала в общем случае изменяется, параметры критерия разрушения (17) должны определяться для осреднённых по пути деформирования значений трёхосности напряжённого состояния η_{avg} и параметра Лоде-Надаи L_{avg} :

$$\eta_{avg} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}} \int_0^{\bar{\varepsilon}_{pl,f}} \eta(\bar{\varepsilon}_{pl}) d\bar{\varepsilon}_{pl}, \quad (18)$$

$$L_{avg} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}} \int_0^{\bar{\varepsilon}_{pl,f}} L(\bar{\varepsilon}_{pl}) d\bar{\varepsilon}_{pl}. \quad (19)$$

Так как в общем случае напряжённое состояние материала в точке изменяется в процессе нагружения, критерий разрушения (17) должен быть реализован в инкрементальной форме:

$$D = \sum \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{pl}}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}(\eta, L)}, \quad (20)$$

где D представляет собой параметр поврежденности материала. Считается, что материал в точке разрушается, когда $D \geq 1$. В выражении (20) величина $\bar{\varepsilon}_{pl,f}(\eta, L)$ вычис-

ляется для текущих значений η и L . Соотношение (20) представляет собой линейный закон накопления материалом повреждений.

3. МЕТОДИКА РАСЧЁТА И РАСЧЁТНАЯ МОДЕЛЬ

Численное моделирование поставленной задачи осуществлялось с применением метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе SIMULIA Abaqus. В рамках модуля Abaqus/Explicit использовалась явная схема интегрирования по времени уравнений движения с автоматическим определением шага по времени исходя из условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви [28]. Для пространственной дискретизации ударника и мишени использовались объёмные восьмиузловые конечные элементы C3D8R с линейной функцией формы и редуцированной схемой интегрирования. Для адекватного сравнения результатов численного моделирования не только с экспериментальными данными, но и с численным решением, полученным Вершининым в [11], разбиение ударника и мишени на конечные элементы было аналогичным описанному в работе [11]. Так, мишени с отношением $H/D \leq 0.3$ разбивались по толщине на 30 конечных элементов, при $H/D = 0.6$ – на 40 конечных элементов, при $H/D = 1.2$ – на 80 конечных элементов и, наконец, при $H/D = 2.0$ – на 125 конечных элементов.

При неупругом деформировании твёрдого тела часть неупругой энергии выделяется в виде теплоты. Так как процесс пробивания ударником тонкой мишени является быстропротекающим, его можно с достаточной точностью рассматривать как адиабатический. В этом случае для материальной точки в некоторый момент времени справедливо следующее соотношение:

$$\dot{T} = \frac{\chi}{\rho C_v} \sigma_{ij} (\dot{\epsilon}_{pl})_{ij}, \quad (21)$$

где ρ – плотность материала, C_v – удельная теплоёмкость материала при постоянном объёме, а χ – доля неупругой энергии, превращающаяся в тепло.

Для моделирования контакта между соударяющимися телами применялся реализованный в Abaqus/Explicit метод штрафов. Коэффициент трения между контактирующими поверхностями задавался равным $\mu = 0.2$.

Ударник из высокопрочной стали моделировался как изотропное линейно упругое твёрдое тело с модулем упругости $E = 210$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ и плотностью $\rho = 7830$ кг/м³.

Алюминиевая мишень моделировалась как изотропное упругопластическое твёрдое тело. Разрушение материала мишени в рамках численного расчёта учитывалось путём исключения из расчётной модели тех конечных элементов, для которых выполнялось условие $D \geq 1$ (см. соотношение (20)). Законы деформирования и разрушения алюминиевых сплавов Д16(А)Т и АА2024-Т3(51) в виде трёхинвариантного критерия текучести (12) с законом деформирования в форме (15), ассоциированного закона пластического течения (16), трёхинвариантного критерия разрушения (17) и линейного закона накопления материалом повреждений (20) были реализованы в Abaqus/Explicit посредством пользовательской подпрограммы VUMAT на языке программирования Fortran. Определяющие рекуррентные соотношения и другие особенности реализации описанной выше модели материала подробно изложены в работе [23].

Для сплавов Д16(А)Т и АА2024-Т3(51) параметры критерия текучести (12) были определены в работах [23, 29] и приведены в Табл. 1. Параметры критерия разрушения (17) были определены для сплавов Д16(А)Т и АА2024-Т3(51) в статье [11] и приведены в Табл. 2. Физические и упругие характеристики этих же сплавов даны в Табл. 3.

Таблица 1. Параметры критерия текучести (12) с законом деформирования в форме (15) для сплавов АА2024-Т3(51) и Д16(А)Т

A , МПа	320
ε_0	0.0052
n	0.195
K , МПа	235
Q , МПа	135
B	7.8
a	0.025
c_t	1.0
c_c	1.02
c_s	0.92
m	6
C	0.0083
$\dot{\varepsilon}_0$	1.0
T_m , °С	502
T_0 , °С	20
s	1.7

Таблица 2. Параметры критерия разрушения (17) для сплавов АА2024-Т3(51) и Д16(А)Т

C_1	2.694
C_2	0.5842
C_3	0.3089
C_f	0.5

Таблица 3. Физические и упругие характеристики сплавов АА2024-Т3(51) и Д16(А)Т

ρ , кг/м ³	2770
C_v , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$	875
χ	0.9
E , ГПа	71.15
ν	0.3

стические пределы V_{bl} и картины разрушения для свободных круглых пластин из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) с безразмерной толщиной $H/D = 0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 1.2, 2.0$ при нормальном ударе по их центру жёсткого сферического тела. Полученные результаты сравнивались как с экспериментальными данными [11], так и с результатами численного моделирования [11] в программном комплексе SIMULIA Abaqus с применением для описания деформирования и разрушения материала мишеней критерия текучести (9), ассоциированного закона пластического течения (16), критерия разрушения (17) и линейного закона накопления материалом повреждений (20). Единственное отличие в исходных данных двух сравниваемых серий расчётов заключалось в использовании разных критериев текучести, что позволило определить влияние I_1 и J_3 в рамках критерия текучести на точность численного моделирования рассматриваемой задачи.

Сравнение значений баллистических пределов V_{bl} для мишеней различной толщины, определенных экспериментально и численно, дано в Табл. 4. Расхождение численных результатов с экспериментальными значениями, определёнными с использованием соотношений (1) и (2), показано на Рис. 1.

Таблица 4. Значения баллистических пределов V_{bl} (в м/с), полученные экспериментально и численно

$\frac{H}{D}$	Эксперимент [11]	Численное решение [11]	Новые данные
0.1	138.3	96.5	97.5
0.2	177.6	169.0	168.0
0.3	243.6	223.0	229.0
0.6	408.0	369.5	355.0
1.2	670.2	639.0	631.0
2.0	958.7	977.0	993.0

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

В результате численного моделирования поставленной задачи были определены балли-

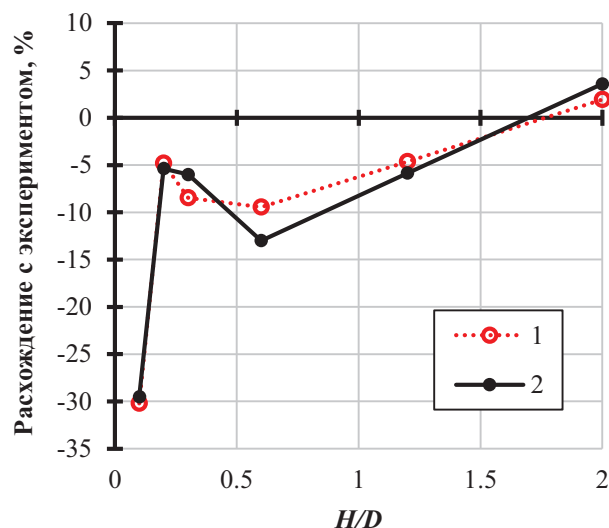


Рисунок 1. Расхождение с экспериментом численных результатов: 1) полученных в [11] с использованием критерия текучести (9); 2) полученных с использованием критерия текучести (12) с законом деформирования в форме (15).

Как видно из представленных в Табл. 4 и на Рис. 1 данных, расхождение между двумя сериями численных результатов составляет не более 5%. При этом обе серии близки к экспериментальным данным при $H/D \geq 0.2$, т.е. практически во всём рассматриваемом диапазоне безразмерных толщин мишеней. Сравнение полученных численно качественных картин разрушения между собой и с результатами эксперимента также не выявило существенных различий для всего рассматриваемого диапазона безразмерных толщин мишеней. В качестве характерного примера на Рис. 2 показаны алюминиевые пластины с $H/D=1.2$ после их пробивания жёстким сферическим ударником со скоростью V_0 , которая была немного больше V_{bl} .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование пробивания свободных круглых пластин из алюминиевого сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) различной толщины жёстким

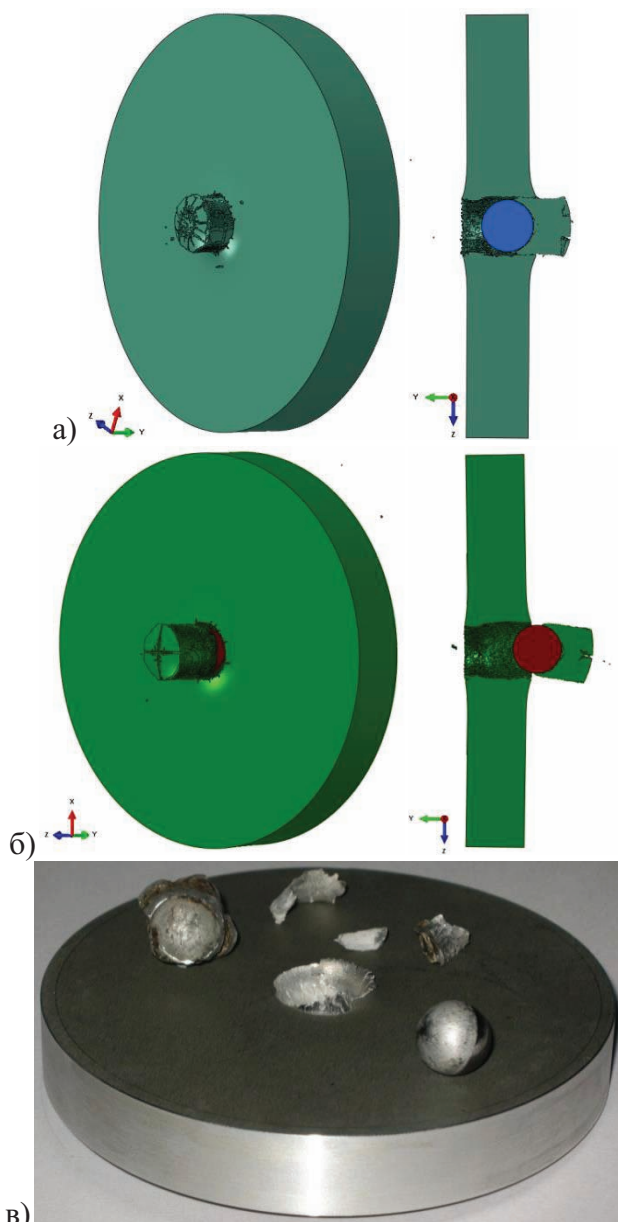


Рисунок 2. Картина разрушения круглой алюминиевой пластины после пробивания жёстким сферическим ударником: а) новое численное решение, $H/D=1.2$, $V_0=632.0$ м/с; б) численное решение, полученное в [11], $H/D=1.2$, $V_0=640.0$ м/с; в) эксперимент [11], $H/D=1.22$, $V_0=681.2$ м/с

сферическим телом, ударяющим по центру мишени нормально к её поверхности, с использованием феноменологических трёхинвариантных критериев текучести и разрушения и сравнение полученных результатов с

экспериментальными данными и результатами численного моделирования с применением трёхинвариантного критерия разрушения и зависящего только от J_2 критерия текучести показали, что учёт влияния I_1 и J_3 на предел текучести материала не даёт сколько-либо значимого увеличения точности численного решения при её оценке как по количественным, так и по качественным показателям. В то же время трёхинвариантные критерии текучести содержат дополнительные (по сравнению с критериями, зависящими только от J_2) параметры, связанные с учётом влияния I_1 и J_3 , для определения значений которых необходимо проведение нескольких дополнительных экспериментов на растяжение и сжатие образцов из моделируемого материала.

Таким образом, учёт всех трёх инвариантов напряжённого состояния при численном моделировании задачи пробивания пластин из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) жёстким телом необходим только в рамках критерия прочности (см. [11]), а для описания деформирования материала мишени достаточно использовать критерий текучести, зависящий только от J_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bai Y.** Effect of loading history on necking and fracture. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2008, 262 p.
2. **Bai Y., Wierzbicki T.** A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *Int. J. Plast.*, 2008, Vol. 24, Iss. 6, pp. 1071-1096.
3. **Bao Y.** Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies. Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2003, 253 p.
4. **Bao Y., Wierzbicki T.** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, Vol. 46, Iss. 1, pp. 81-98.
5. **Khan A.S., Liu H.** A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *Int. J. Plast.*, 2012, Vol. 35, pp. 1-12.
6. **Papasidero J., Doquet V., Mohr D.** Ductile fracture of aluminum 2024-T351 under proportional and non-proportional multi-axial loading: Bao-Wierzbicki results revisited. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 69-70, pp. 459-474.
7. **Seidt J.D.** Plastic deformation and ductile fracture of 2024-T351 aluminum under various loading conditions. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2010, 196 p.
8. **Seidt J.D., Gilat A.** Plastic deformation of 2024-T351 aluminum plate under a wide range of loading conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, Vol. 50, Iss. 10, pp. 1781-1790.
9. **Wilson C.D.** A critical reexamination of classical metal plasticity. *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 2002, Vol. 69, Iss. 1., pp. 63-68.
10. **Rosenberg Z., Dekel E.** Terminal Ballistics. The 2nd edition. Singapore, Springer Singapore, 2016, 359 p.
11. **Vershinin V.V.** Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 67-68, pp. 127-138.
12. **Vershinin V.V.** High velocity perforation as a benchmark problem for material model validation. Proceedings of the SIMULIA Community Conference, Berlin, Germany, Dassault Systèmes, 2015, pp. 160-175.
13. **Lou Y., Yoon J.W., Huh H.** Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *Int. J. Plast.*, 2014, Vol. 54, pp. 56-80.
14. **Johnson G.R., Cook W.H.** Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pres-

14. *sures. Eng Fract Mech.*, 1985, Vol. 21, Iss. 1, pp. 31-48.
15. **Von Mises R.** Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys., 1913, Vol. 1, pp. 582-592.
16. **Johnson G.R., Cook W.H.** A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high stain rates and temperatures. Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, American Defense Preparedness Association, Koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1983, pp. 541-547.
17. **Senf H., Weimann K.** Die wirkung von stahlgugeln auf dural-einfach-und mehrplat-tenziele. EMI report no. V6-73, 1973.
18. **Бивин Ю.К.** Деформация и разрушение круглых пластин при статическом и динамическом нагружении сферическим телом. // Изв. РАН. МТТ, 2008, Т. 43, В. 5, с. 130-140.
19. **Бивин Ю.К.** Разрушение круглых пластин при ударе по нормали жестким сферическим телом. // Изв. РАН. МТТ, 2011, Т. 46, В. 4, с. 126-140.
20. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. Ztchr. Angew. Math. Mech., 1925, Vol. 5, Iss. 2, pp. 142-144.
21. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Ztg. Phys., 1926, Vol. 36, Iss. 11, pp. 913-939.
22. **Nadai A.** Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen. Berichte der Fachausschüsse des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute. Werkstoffausschuß. Bericht 56, 1925.
23. **Vershinin V.V.** A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence. *Int. J. Solids Struct.*, 2017 (Submitted).
24. **Swift H.W.** Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1952, Vol. 1, Iss. 1, pp. 1-18.
25. **Voce E.** The relationship between stress and strain for homogeneous deformations. *J. Inst. Metals*, 1948, Vol. 74, pp. 537-562.
26. **Von Mises R.** Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. Ztchr. Angew. Math. Mech., 1928, Vol. 8, Iss. 3, pp. 161-185.
27. **Drucker D.C.** A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proceedings of the 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago, USA, 1951, New York, NY, USA, American Society of Mechanical Engineers, 1952, pp. 487-491.
28. **Courant R., Friedrichs K., Lewy H.** Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 1928, Vol. 100, Iss. 1, pp. 32-74.
29. **Lesuer D.R.** Experimental investigations of material model for Ti-6Al-4V titanium and 2024-T3 aluminum. Technical report DOT/FAA/AR-00/25, Livermore, CA, USA, Lawrence Livermore National Laboratory, 2000, 41 p.

REFERENCES

1. **Bai Y.** Effect of loading history on necking and fracture. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2008, 262 p.
2. **Bai Y., Wierzbicki T.** A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *Int. J. Plast*, 2008, Vol. 24, Iss. 6, pp. 1071-1096.
3. **Bao Y.** Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies. Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2003, 253 p.
4. **Bao Y., Wierzbicki T.** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, Vol. 46, Iss. 1, pp. 81-98.
5. **Khan A.S., Liu H.** A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *Int. J. Plast.*, 2012, Vol. 35, pp. 1-12.
6. **Papasidero J., Doquet V., Mohr D.** Duc-

- tile fracture of aluminum 2024-T351 under proportional and non-proportional multi-axial loading: Bao-Wierzbicki results revisited. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 69-70, pp. 459-474.
7. **Seidt J.D.** Plastic deformation and ductile fracture of 2024-T351 aluminum under various loading conditions. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2010, 196 p.
 8. **Seidt J.D., Gilat A.** Plastic deformation of 2024-T351 aluminum plate under a wide range of loading conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, Vol. 50, Iss. 10, pp. 1781-1790.
 9. **Wilson C.D.** A critical reexamination of classical metal plasticity. *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 2002, Vol. 69, Iss. 1., pp. 63-68.
 10. **Rosenberg Z., Dekel E.** Terminal Ballistics. The 2nd edition. Singapore, Springer Singapore, 2016, 359 p.
 11. **Vershinin V.V.** Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 67-68, pp. 127-138.
 12. **Vershinin V.V.** High velocity perforation as a benchmark problem for material model validation. Proceedings of the SIMULIA Community Conference, Berlin, Germany, Dassault Systèmes, 2015, pp. 160-175.
 13. **Lou Y., Yoon J.W., Huh H.** Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *Int. J. Plast.*, 2014, Vol. 54, pp. 56-80.
 14. **Johnson G.R., Cook W.H.** Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Eng Fract Mech.*, 1985, Vol. 21, Iss. 1, pp. 31-48.
 15. **Von Mises R.** Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys., 1913, Vol. 1, pp. 582-592.
 16. **Johnson G.R., Cook W.H.** A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and temperatures. Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, American Defense Preparedness Association, Koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1983, pp. 541-547.
 17. **Senf H., Weimann K.** Die wirkung von stahlkugeln auf dural-einfach-und mehrplattenziele. EMI report no. V6-73, 1973.
 18. **Bivin Ju.K.** Deformacija i razrushenie kruglyh plastin pri staticheskom i dinamicheskom nagruzenii sfericheskim telom [Deformation and Destruction of Circular Plates Under Static and Dynamic Loading by a Spherical Body]. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela*, 2008, Tom 43, Vypusk 5, pp. 130-140.
 19. **Bivin Ju.K.** Razrushenie kruglyh plastin pri udare po normali zhestkim sfericheskim telom [The Destruction of Circular Plates on Impact on the Normal by a Rigid Spherical Body]. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela*, 2011, Tom 46, Vypusk 4, c. 126-140.
 20. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. *Ztschr. Angew. Math. Mech.*, 1925, Vol. 5, Iss. 2, pp. 142-144.
 21. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. *Ztg. Phys.*, 1926, Vol. 36, Iss. 11, pp. 913-939.
 22. **Nadai A.** Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen. Berichte der Fachausschüsse des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute. Werkstoffausschuß. Bericht 56, 1925.
 23. **Vershinin V.V.** A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence. *Int. J. Solids Struct.*, 2017 (Submitted).
 24. **Swift H.W.** Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1952, Vol. 1, Iss. 1, pp. 1-18.
 25. **Voce E.** The relationship between stress

- and strain for homogeneous deformations. *J. Inst. Metals*, 1948, Vol. 74, pp. 537-562.
26. **Von Mises R.** Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Ztschr. Angew. Math. Mech.*, 1928, Vol. 8, Iss. 3, pp. 161-185.
27. **Drucker D.C.** A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. *Proceedings of the 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics*, Chicago, USA, 1951, New York, NY, USA, American Society of Mechanical Engineers, 1952, pp. 487-491.
28. **Courant R., Friedrichs K., Lewy H.** Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 1928, Vol. 100, Iss. 1, pp. 32-74.
29. **Lesuer D.R.** Experimental investigations of material model for Ti-6Al-4V titanium and 2024-T3 aluminum. Technical report DOT/FAA/AR-00/25, Livermore, CA, USA, Lawrence Livermore National Laboratory, 2000, 41 p.
- tion, Assistant of Structural Steel and Timberwork Department, Ph.D. Student of Structural and Theoretical Mechanics Department of National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia; phone: +7 (495) 781-80-07, fax: +7 (499) 183-44-38; e-mail: vlodya_91@mail.ru.
- Vladimir L. Mondrus, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, D.Sc.; Head of Structural and Theoretical Mechanics Department of National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia; phone: +7 (495) 781-80-07, fax: +7 (499) 183-44-38; e-mail: mondrus@mail.ru.

Вершинин Владислав Владимирович, младший научный сотрудник научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, ассистент кафедры металлических и деревянных конструкций, аспирант кафедры строительной и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», инженер лаборатории нелинейных волновых процессов физического сектора ФГБУН Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел: +7 (495) 781-80-07, факс: +7 (499) 183-44-38; e-mail: vlodya_91@mail.ru.

Мондрус Владимир Львович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; заведующий кафедрой строительной и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел: +7 (495) 781-80-07, факс: +7 (499) 183-44-38; e-mail: mondrus@mail.ru.

Vladislav V. Vershinin, Junior Research Assistant of Research and Education Center of Computational Simula-

ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖЕСТКОГО СТЫКА СЛОИСТЫХ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

М.А. Водяников, Г.Г. Кашеварова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассмотрены вопросы моделирования и решения контактных задач в программном комплексе ANSYS на примере расчета жесткого узла стыка клееной деревянной балки. Приведены сравнительные расчетные данные для неразрезной балки и балки со стыком в середине на клеенных углепластиковых нагелях. Описаны возможности применения контактных элементов между различными материалами, учитывающие нелинейность постановки задачи. Показаны изополя напряжений и перемещений в элементах. Проведен эксперимент по определению несущей способности стыка и определения характера разрушения конструкции. Сделаны выводы о возможности моделирования композитных материалов в среде программного комплекса ANSYS при проектировании реальных конструкций

Ключевые слова: ANSYS, углепластик, компьютерное моделирование, композитный материал, слоистый, контакт, древесина, расчетная модель, конечный элемент

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELING OF RIGID JOINT OF LAYERED WOODEN STRUCTURES

Mikhail A. Vodiannikov, Galina G. Kashevarova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

Abstract: The article deals with the problems of modeling and solving contact problems in the ANSYS software complex using the example of calculating the rigid joint of a glued wooden beam. Comparative calculation data for a continuous beam and a beam with a joint in the middle on pasted carbon fiber nails are given. The possibilities of using contact elements between different materials taking into account the nonlinearity of the formulation of the problem are described. The figures of stresses and displacements in the elements are shown. Experiments for determination of the bearing capacity of the joint and determine the nature of structural failure are provided. Conclusions are made about the possibility of modeling composite materials in the environment of the software complex ANSYS in the real structures design

Keywords: ANSYS, carbon fiber, computer modeling, composite material, layer, contact, wood, computer model, finite element analysis

1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и расчет жестких стыков клееных деревянных конструкций является первоочередной задачей при создании больших пролетных архитектурных форм из древесины. Решение такой задачи позволяет решить проблему изготовления и унификации, а главное – транспортировки крупногабаритных элементов на большие расстояния. Проблема равнопрочных стыков существует

также у железобетонных и стальных конструкций. Но для конструкций из цельной и клееной древесины она представляется наиболее сложной.

Одним из рациональных путей решения этой проблемы может служить использование методов математического моделирования с использованием ЭВМ и программных комплексов, учитывающих нелинейность при расчете контактных задач. Численное моделирование

позволяет внедрять инновационные материалы и конструктивные схемы, способы и методики расчета, а также снижать стоимость и сроки проектирования сложных конструкций. В статье выполнена расчетная оценка деформативности слоистой клееной деревянной балки и узла стыка на клеенных наклонных нагелях, выполненных из композитного материала - углепластика. Определен характер разрушения конструкции с учетом пластических деформаций с помощью численного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций в программном комплексе ANSYS [1]. Данные полученные в результате численного моделирования подтверждены результатами натурного эксперимента.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ

Тело балки – клееная древесина второго сорта, клеиваемые нагели – углепластиковые стержни диаметром 5 мм, полученные

методом пултрузии; накладки по верху и низу балки – четырехнаправленный углепластик на матрице синтетического полимерного связующего.

Для анализа НДС создана конечно-элементная модель клееной деревянной конструкции (КДК) балки со стыком. Модель запроектирована и построена в программном комплексе AUTODESK AutoCAD® (рисунок 1) и экспортирована в программный комплекс ANSYS. На рисунке 2 показана конечно-элементная модель конструкции. Расчет проводился для изгибаемой балки (расчетная схема и граничные условия приведены на рис. 1) по двум вариантам:

- неразрезная (цельная) балка из клееной древесины (без стыка и накладок);
- балка со стыком на клеенных нагелях.

Расчетные модели дискретизированы конечными элементами (КЭ): SOLID185 (рисунок 3а), углепластиковые накладки SHELL281 (рисунок 3б), клеиваемые нагели BEAM188 (рисунок 3в) [2-4].

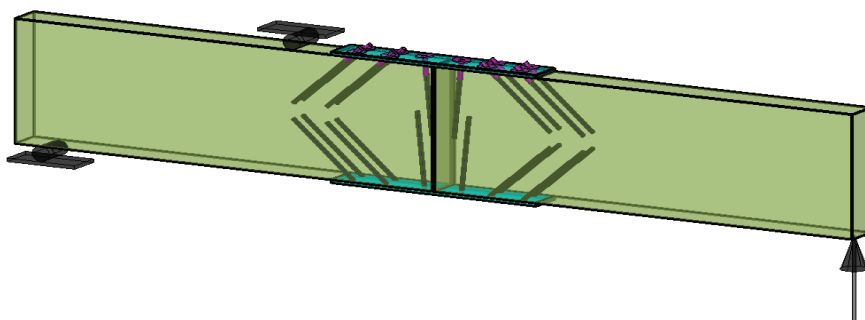


Рисунок 1. CAD-Модель балки со стыком на клеенных нагелях

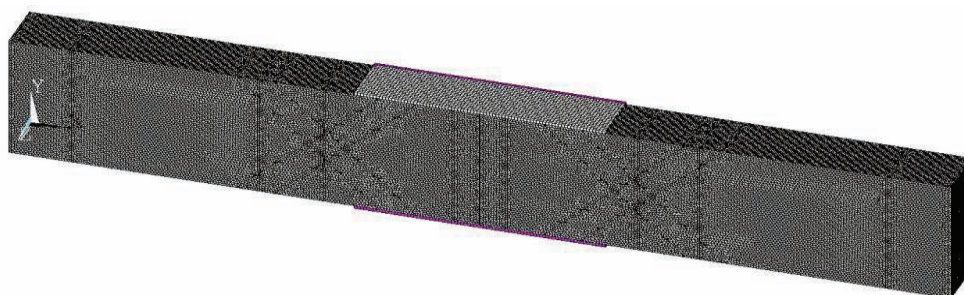


Рисунок 2. Конечно-элементная модель балки со стыком на клеенных нагелях

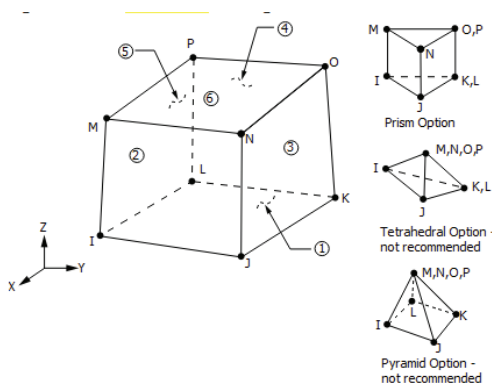


Рисунок 3а. Геометрия КЭ твердого тела SOLID 185.

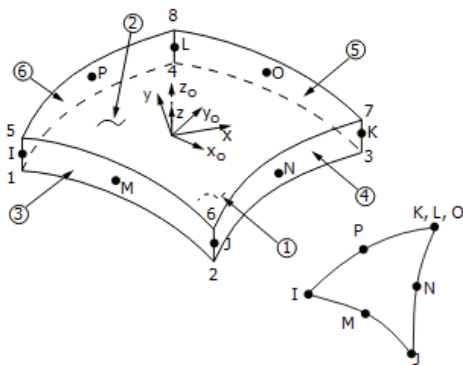


Рисунок 3б. Геометрия КЭ пластины SHELL 281.

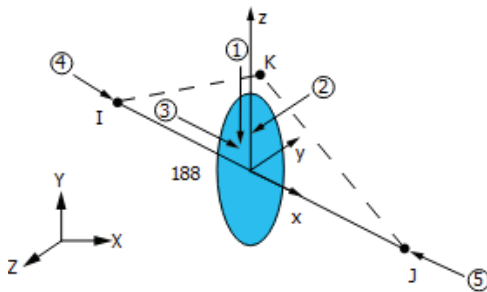


Рисунок 3в. Геометрия КЭ стержневого элемента BEAM 188.

Элемент SOLID185 используется для 3D моделирования твердых тел. Он определяется восемью узлами, имеющими три степени свободы каждый. Конечный элемент SOLID185 может обладать пластичностью, ползучестью и другими характеристиками. Конечный элемент SHELL281 применяется при анализе пластин с заданными пользователем характе-

ристиками. У элемента также восемь определяющих узлов с шестью степенями свободы каждого. Этот элемент может быть использован для моделирования слоистых конструкций (в т.ч. композитов). Линейный конечный элемент BEAM188 используется для 3D моделирования стержней с заданными характеристиками. Элемент имеет шесть степеней свободы в каждом узле.

При моделировании клеевого соединения в плоскостях соприкосновения «древесина-древесина» и «древесина-углепластик» в расчете учитывалась нелинейность, связанная с наличием сил трения по поверхностям контакта. Поэтому в модель введены специальные контактные конечные элементы. В таких задачах одна из поверхностей условно называется «контактной» поверхностью, а вторая – «целевой» поверхностью. Такие поверхности моделируются соответственно при помощи конечных элементов CONTA174 и TARGE170. Контактные и целевые конечные элементы, составляющие контактную пару, связаны между собой посредством общего набора характеристик.

Моделирование материалов осуществлялось посредством параметризации их физических свойств.

Древесина задана как ортотропный материал со следующими характеристиками:

- модуль упругости по оси x , $E_x = 1,1 \times 10^{10}$ (Па);
- модуль упругости по осям y и z , $E_y = E_z = 4,5 \times 10^8$ (Па);
- коэффициенты Пуассона $\nu_{xy} = 0,45$, $\nu_{yz} = \nu_{xz} = 0,018$;
- модуль сдвига $G_x = G_y = G_z = 6 \times 10^8$ (Па);
- критерий перехода древесины в пластическое состояние (Bilinear Kinematic) принят по временному сопротивлению изгибу 37,5 МПа (в соответствии с таблицей В.2 приложения В) [1].

Структура углепластиковых пластин как композитов полностью обуславливает их механические характеристики. Пластины заданы как трансверсально-изотропные материалы с

направлением слоев 0, 90, ± 45 градусов со следующими характеристиками [5]:

- предел прочности при разрыве $\sigma_b = 7,6 \times 10^5$ (Па);
- модуль упругости по осям x и y, $E_x = E_y = 87,2 \times 10^9$ (Па);
- модуль упругости по оси z, $E_z = 65,4 \times 10^9$ (Па);
- коэффициенты Пуассона $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0,268 = \nu_{xz} = 0,018$.

Для однонаправленных стержневых элементов установлены следующие величины [5]:

- предел прочности при разрыве $\sigma_b = 2,24 \times 10^6$ (Па);
- модуль упругости $E = 117 \times 10^9$ (Па);
- коэффициент Пуассона $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0,31$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Расчет в нелинейной постановке [6-10] производился пошаговым приложением нагрузки с шагом в 1 кН. По окончании расчета получены следующие результаты.

Разрушение образца в обоих случаях происходит в результате образования пластического шарнира в теле балки под опорной пяткой заделки в зоне максимального изгибающего момента.

Для образца из цельной древесины (рисунок 4а) пластические деформации возникают при нагрузке 3,4 кН, разрушение – при 10,0 кН.

Пластические деформации для образца с жестким стыком (рисунок 4б) возникают при нагрузке 3,6 кН, разрушение – при 11,6 кН.

В неразрезном образце из клееной древесины касательные напряжения в момент разрушения достигают 5,34 МПа (рисунок 5а), перемещения изгибаемого конца составляют 22,7 см (рисунок 6а).

В момент разрушения касательные напряжения контакта в клеевом соединении для образца с жестким стыком составляют 7,48 МПа (рисунок 5б). Максимальные перемещения изгибаемого конца балки равны при этом 27,7 см (рисунок 6б).

Максимальные усилия во вклеиваемых стержнях и накладках, образующих жесткий стык, составили 697 МПа. Изополя распределения напряжений приведены на рисунке 7.

Следует отметить, что картина распределения деформации и усилий в образцах из неразрезной балки имеет более равномерный характер, в то время как у балки с жестким стыком на вклеенных нагелях наблюдается более хаотичное распределение усилий и перемещений.

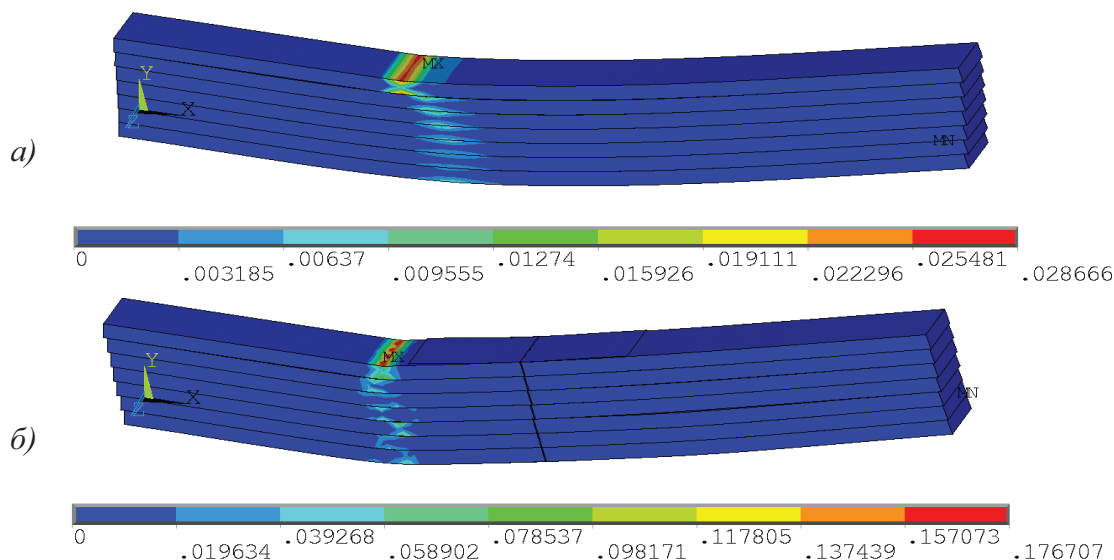


Рисунок 4. Разрушение образца с образованием пластического шарнира (деформированная схема): а) без стыка, б) со стыком.

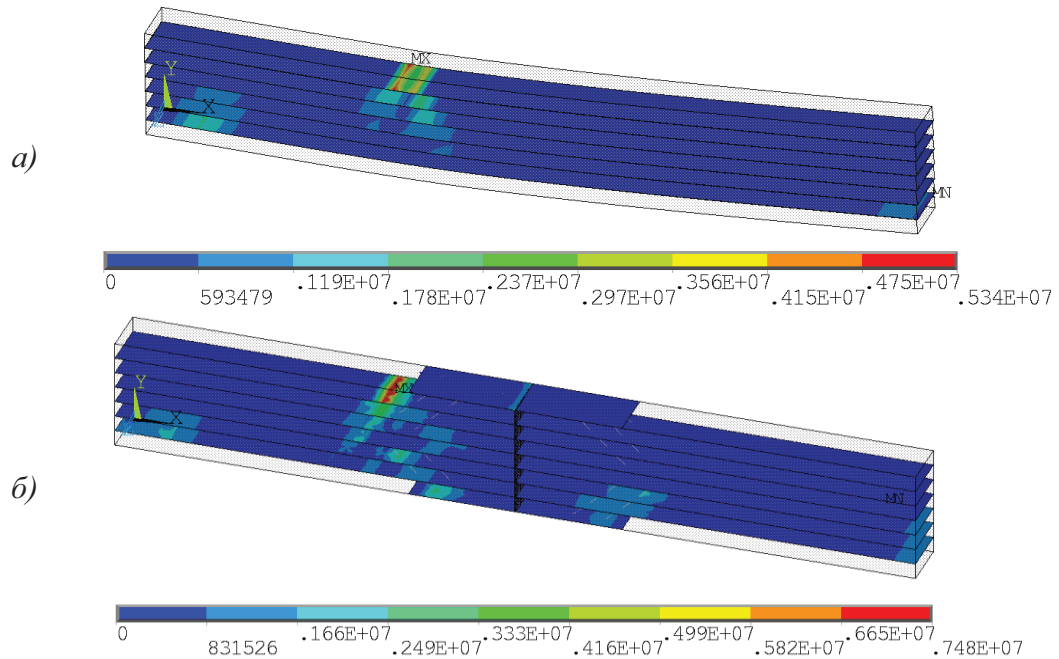


Рисунок 5. Распределение касательных напряжений в зонах контакта:
а) без стыка, б) со стыком.

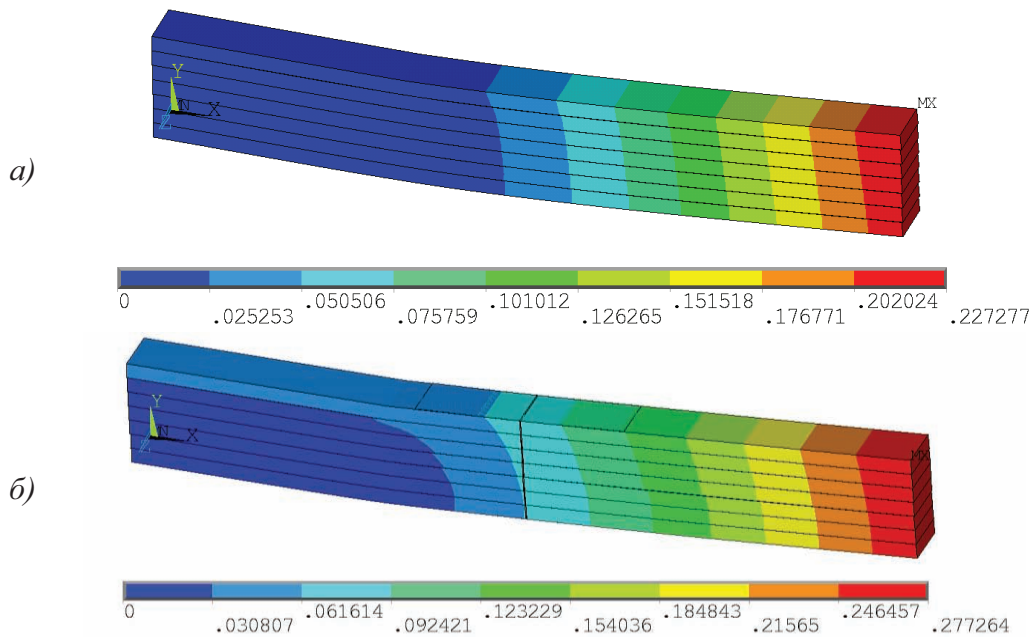


Рисунок 6. Изополя суммарных перемещений в балке: а) без стыка, б) со стыком.

Несущая способность образца с жестким стыком выше в связи с тем, что клеенные нагели образуют элемент усиления конструкции, препятствующий взаимному сме-

щению слоев древесины, и тем самым, снижающий послойную деформируемость модели. Усилия же, возникающие в накладках, стержнях и клеевых соединениях стыка, не превышают критических значений.

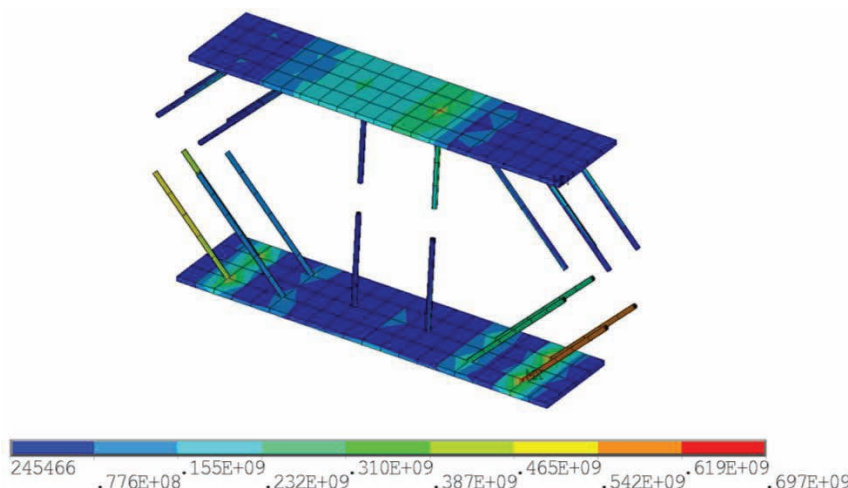


Рисунок 7. Изополя распределения напряжений в накладках и стержнях

4. НАТУРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Схема испытаний образцов соответствует расчетной схеме, приведенной на рис. 1. Испытания проводились до разрушения образца пошагово возрастающей нагрузкой на специально запроектированном стенде. Давление на свободный конец балки передавалось посредством гидравлического универсального домкрата ДУ50П250. Значение нагрузки снималось с электронного манометра, соединенного с масляной станцией посредством шлангов высокого давления. Значение разрушающей нагрузки принималось в момент, при котором наблюдался рост перемещений при падении давления на башмаке домкрата. Для замера перемещений применялись измерители часового типа ИЧ-10 и ИЧ-50, влажность образцов определялась влагомером МГ-4 и составила 8,4 %. Температурно-влажностный режим внутри помещения определен при помощи термогигрометра МГ-4В, температура внутри помещения 24,7⁰С, влажность 23,6 %. При испытании неразрезной балки в качестве контролируемых параметров приняты:

- перемещение свободного конца балки;
- усилие на манометре домкрата.

При испытании стыка на углепластиковых деталях разрезной балки в качестве контролируемых параметров также оценивалась ширина раскрытия зазора стыка с обеих сторон балки.

Стык смонтирован с применением синтетического клея на эпоксидном связующем. Накладки изготовлены из пластин двунаправленного углепластика толщиной 5 мм, стержни – из углепластиковой арматуры диаметра 5 мм производства ООО «НЦК», г. Москва.

Испытательный стенд, измерительное оборудование и балка со стыком с применением углепластиковых деталей приведены на рисунке 8.

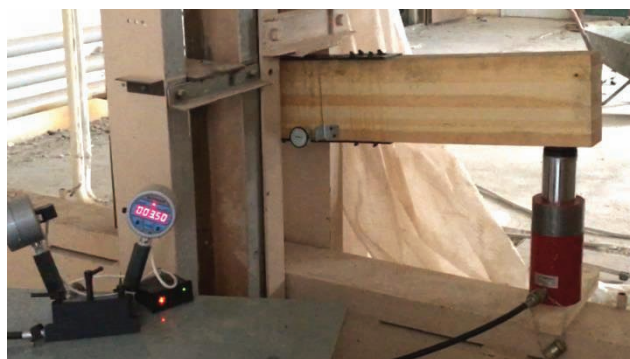


Рисунок 8. Стенд и образец для испытания стыка балки.

При испытании неразрезной балки фактическая разрушающая нагрузка составила 12,3 кН, перемещение свободного конца - 22,17 см. Характер разрушения соответствует данным численной оценки работы балки, и вызван образованием пластического шарнира под подвижной опорой в середине пролета. Кроме того зафиксировано обмятие балки под неподвижной опорой, а также образование трещин шириной раскрытия до 3 мм в теле древесины в опорных частях балки и по растянутой (нижней) кромке. Разрушений, связанных с взаимным смещением слоев древесины, а также с нарушением целостности клеевых швов в ходе испытаний не зафиксировано.

При испытании стыка разрезной балки характер разрушений также соответствует расчетным значениям. Разрушающая нагрузка установлена на уровне 13,2 кН, перемещение свободного конца составило при этом 23,52 см. Сжатая (верхняя) кромка балки в месте стыка вплотную приблизилась к противоположной части балки. Максимальная ширина раскрытия нижней кромки в месте стыка отмечена при значении индикатора равном 3,7 мм, величина технологического зазора до начала испытаний 1 мм.

Разрушение разрезной балки произошло в результате образования пластического шарнира под подвижной опорой в середине пролета, аналогично образцу из цельной древесины. Кроме того, в момент разрушения отмечено образование трещин шириной раскрытия до 5 мм в теле древесины в нейтральной зоне стыка, что свидетельствует о возникновении касательных напряжений, связанных с механическим воздействием армирования на слой древесины. В опорных частях видны трещины шириной раскрытия до 3 мм, по растянутой кромке трещин не выявлено (в связи с включением накладок в совместную работу). Некоторое различие в расчетных и фактических усилиях и перемещениях связано с пороками древесины, а также использованием в

качестве прочностных характеристик унифицированных расчетных величин σ_b , установленных [1].

Следует отметить, что в обоих случаях после снятия нагрузки балки вернулись в исходное состояние.

ВЫВОДЫ

Моделирование слоистых композитных материалов, таких как древесина и углепластик в среде ANSYS, позволяет с высокой точностью оценивать напряженно-деформированное состояние сложных конструкций и узлов их стыка в условиях, близких к реальности [11, 12]. При задании контактных взаимодействий программа учитывает такие факторы, как наличие либо отсутствие контакта и сил трения, что делает задачу нелинейной. Экспериментальная оценка данных, полученных путем численного анализа, подтверждает правильность принятых решений. Теоретические и фактические значения коррелируют между собой, разброс значений вызван несовершенством (пороками) структуры древесины, а также применением унифицированных характеристик примененных материалов. Оценка итоговых величин усилий и перемещений в элементах конструкции показывают адекватность выбранной расчетной модели и возможность её применения для расчета реальных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **СП 16.13330.2011.** Актуализированная редакция СНиП II-23-81* «Стальные конструкции». – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2011. – 173 с.
2. **Басов К.А.** ANSYS в примерах и задачах. – М.: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.
3. **Басов К.А.** Графический интерфейс комплекса ANSYS. – М.: КомпьютерПресс, 2006. – 248 с.

4. **Басов К.А.** ANSYS. Справочник пользователя. – М.: КомпьютерПресс, 2005. – 640 с.
5. **Скворцов Ю.В.** Моделирование композитных элементов конструкций и анализ их разрушения в CAE-системах. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. им. С.П. Королева. – Электрон. – 2012 (CD-ROM).
6. **Бруйка В.А., Фокин В.Г., Солдусова Е.А.** Инженерный анализ в ANSYS WORKBENCH. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.
7. **Лукьянова А.Н.** Моделирование контактной задачи с помощью программы ANSYS. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 52 с.
8. **Морозов Е.М.** ANSYS в руках инженера. – М.: ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.
9. **Огордникова О.М.** Введение в компьютерный конструкционный анализ. – Екатеринбург: Уральск. гос. техн. ун-т, 2001. – 49 с.
10. **Шкловец А.О.** Конструкционный анализ методом конечных элементов в CAE-пакете Ansys Mechanical. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2012. – 53 с.
11. **Alawadhi E.M.** Finite Element Simulations Using ANSYS. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010, 408 p.
12. **Huei-Huang Lee.** Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 16. SDC Publ., 2015, 264 p.
3. **Basov K.A.** Graficheskij interfejs kompleksa ANSYS [Graphical Interface of ANSYS]. Moscow, Komp'juter-Press, 2006, 248 p.
4. **Basov K.A.** ANSYS. Spravochnik pol'zovatelja [ANSYS. User's Reference]. Moscow, Komp'juterPress, 2005, 640 p.
5. **Skvorcov Ju.V.** Modelirovanie kompozitnyh jelementov konstrukcij i analiz ih razrushenija v CAE-sistemah [Modelling of Composite Structural Members and Fracture Analysis in CAE Software Systems]. Samara, Samarskij gosudarstvennyj ajerokosmicheskij universitet im. S.P. Koroleva, Jelektron, 2012 (CD-ROM).
6. **Brujaka V.A., Fokin V.G., Soldusova E.A.** Inzhenernyj analiz v ANSYS WORKBENCH [Engineering Analysis in ANSYS WORKBENCH]. Samara, Samarskij gosudarstvennyj tehnikeskij universitet, 2010, 271 p.
7. **Luk'janova A.N.** Modelirovanie kontaktnoj zadachi s pomoshh'ju programmy ANSYS [Modelling of Contact Problems with the Use of ANSYS]. Samara, Samarskij gosudarstvennyj tehnikeskij universitet, 2010, 52 p.
8. **Morozov E.M.** ANSYS v rukah inzhenera [ANSYS in the Hands of an Engineer]. Moscow, LENAND, 2010, 456 p.
9. **Ogordnikova O.M.** Vvedenie v komp'juternyj konstrukcionnyj analiz [Introduction to Computer Structural Analysis]. Ekaterinburg, Ural'skij gosudarstvennyj tehnikeskij universitet, 2001, 49 p.
10. **Shklovcev A.O.** Konstrukcionnyj analiz metodom konechnyh jelementov v SAE-pakete Ansys Mechanical [Structural Analysis with the Use of Finite Element Method in ANSYS Mechanical]. Samara, Samarskij gosudarstvennyj ajerokosmicheskij universitet, 2012, 53 p.
11. **Alawadhi E.M.** Finite Element Simulations Using ANSYS. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010, 408 p.

REFERENCES

1. **SP 16.13330.2011.** Aktualizirovannaja redakcija SNIp II-23-81* "Stal'nye konstrukcii" [Steel Structures]. Moscow, TSNIISK im. V.A. Kucherenko, 2011, 173 p.
2. **Basov K.A.** ANSYS v primerah i zadachah [ANSYS in Samples and Problems]. Moscow, Komp'juterPress, 2002, 224 p.

12. **Huei-Huang Lee.** Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 16. SDC Publ., 2015, 264 p.

Водяников Михаил Алексеевич, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет; 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29; тел. +7 (342) 2-198-361; e-mail: vodyannikov@mail.ru.

Кашеварова, Галина Геннадьевна, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет; 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29; тел. +7 (342) 2-198-361; e-mail: ggkash@mail.ru

Mikhail A. Vodiannikov, Ph.D. Student, Department of Building Constructions and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospect, Perm, 614990, Russian Federation; e-mail: vodyannikov@mail.ru.

Galina G. Kashevarova, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of Department of Building Constructions and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospect, Perm, 614990, Russian Federation; e-mail: e-mail: ggkash@mail.ru.

РЕАЛИЗАЦИЯ TVD-СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

Ю.П. Галагуз

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается численное решение одномерной задачи фильтрации суспензии в твердой пористой среде. Приводится TVD-схема с разными функциями-ограничителями и ее сравнение с противоточной схемой и схемой Лакса-Вендроффа. Построены графики концентраций взвешенных частиц.

Ключевые слова: фильтрация, TVD-схема, ограничитель, схема Лакса-Вендроффа, диссипация, диффузия

REALIZATION OF THE TVD-SCHEME FOR A NUMERICAL SOLUTION OF THE FILTRATION PROBLEM

Yuri P. Galaguz

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: A numerical solution of one-dimensional filtration problem for suspension flow in a porous medium is considered. The TVD-scheme with different functions-delimiters is obtained. The TVD-scheme is compared with the counter-current scheme and the Lax-Wendroff scheme. Diagrams of suspended particles concentrations are shown.

Keywords: deep bed filtration, TVD-scheme, limiter, Lax-Wendroff method, dissipation, diffusion

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи диффузии частиц в фильтре описывает процесс прохождения частиц через поры фильтра и динамику выпадения осадка [4].

В рассматриваемой задаче в начальный момент времени пористая среда фильтра длины 1 заполнена водой с заданной начальной концентрацией осажденных частиц. На вход фильтра начинает поступать суспензия. Она постепенно вытесняет воду и заполняет пористую среду. В части пористой среды, находящейся перед фронтом суспензии, фильтрация суспензии отсутствует, концентрация взвешенных частиц нулевая, концентрация осажденных

частиц не меняется со временем и равна начальной.

Решение задачи фильтрации связано с решением гиперболической системы уравнений.

Для ряда важных частных случаев найдены точные [2,3] и асимптотические решения задачи фильтрации [4-8], однако в общем случае задача не имеет аналитического решения.

Пожалуй, самый эффективный и экономичный способ численного решения такого типа задач – это метод конечных разностей [9]. Однако в силу разрывных начально-краевых условий мы получаем значительные трудности в получении приемлемых решений вблизи линии разрыва - фронта волны (границе раздела сред Γ), рис.1.

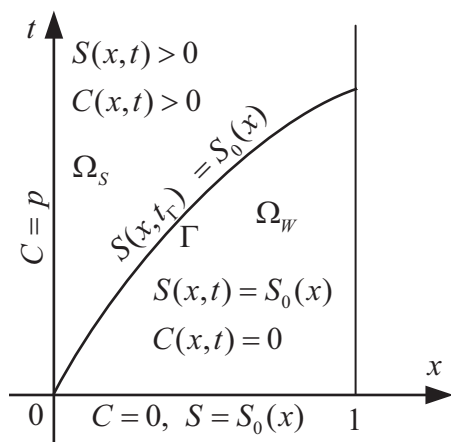


Рисунок 1. Схематическое определение задачи (1)–(4).

В данной работе ставится цель превратить разностную схему Лакса-Вендроффа в TVD-схему и тем самым получить приемлемый результат решения как в окрестности разрыва, так и вдали от него.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В области бесконечной полуполосы $\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$ концентрации взвешенных и осажденных частиц $C(x,t)$, $S(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial(g(S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} = -\Lambda(S)C, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C, \quad (2)$$

с краевым и начальными условиями

$$x=0: C(x,t) = p, \quad p > 0, \quad (3)$$

$$t=0: C(x,t) = 0, \quad S(x,t) = S_0(x). \quad (4)$$

Здесь приведенные пористость $g(S)$, проницаемость $f(S)$, коэффициент фильтрации $\Lambda(S)$, начальная концентрация осадка $S_0(x)$ являются непрерывными положительными функциями.

Уравнения (1-2) образуют нелинейную (квазилинейную) гиперболическую систему первого порядка. Характеристическая кривая Γ , которая выходит из начала координат – это граница двух сред. Она разбивает область Ω на две подобласти Ω_w и Ω_s в которых находятся соответственно вода и суспензия (рис.1). В области Ω_w концентрация $C(x,t)$ взвешенных частиц нулевая, концентрация $S(x,t)$ осажденных частиц не зависит от времени и равна $S_0(x)$. В области Ω_s концентрации $C(x,t)$, $S(x,t)$ переменные и положительные. Они и должны быть найдены. Согласно методу характеристик из-за несогласованности условий (3-4) в начале координат, решение $C(x,t)$ имеет разрыв первого рода на фронте Γ . Решение $S(x,t)$ непрерывно во всей области $\Omega = \Omega_w \cup \Omega_s$ и имеет разрыв производной на фронте Γ .

При непостоянных функциях $g(S)$, $f(S)$ граница Γ является кривой линией, заданной соотношением

$$t_\Gamma(x) = \int_0^x \frac{g(S_0(u))}{f(S_0(u))} du. \quad (5)$$

Для упрощения системы введем новые функции (сделаем замены)

$$D(x,t) = g(S) \cdot C(x,t), \quad L(S) = \frac{\Lambda(S)}{g(S)},$$

$$m(S) = \frac{f(S)}{g(S)}. \quad (6)$$

В области $\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$ функции $D(x,t)$, $S(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(m(S)D)}{\partial x} = -L(S)D, \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L(S)D, \quad (8)$$

с краевым и начальными условиями

$$x = 0: D = g(S(0, t)) \cdot p, \quad p > 0, \quad (9)$$

$$t = 0: D = g(S_0(x))C_0(x), \quad S = S_0(x) \quad (10)$$

Где $S(0, t)$ может быть найдена из уравнения (2), которое при $x = 0$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dS(0, t)}{\Lambda(S(0, t))} = p dt, \quad (11)$$

с начальным условием $S(0, t = 0) = S_0(0)$.

3. TVD-СХЕМА

Зададимся сеткой в ограниченной области

$$\Omega_{XT} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\},$$

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, \quad h = \frac{1}{J}, \quad (12')$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad (12'')$$

где J - число интервалов разбиения отрезка $[0, 1]$, N - число интервалов разбиения отрезка $[0, T]$, h - шаг сетки по длине фильтра x , τ - шаг сетки по времени t .

Однако из-за разрывности начально-краевых условий, аппроксимация конечно-разностными схемами левых частей уравнений (1) или (7) либо приводит к диссипации, либо к дисперсии. К диссипации - при применении противоточной схемы с первым порядком аппроксимации (так называемое сглаживание в местах разрывов). К дисперсии - при применении более быстро сходящихся схем типа Лакса-Вендроффа и подобных, которые дают в местах разрывов нефизические осцилляции (рябь вблизи разрывов решения).

Разнообразные TVD-схемы (Total Variation Diminishing) - схемы уменьшения полной вариации - позволяют получить неосциллирующие и высоко разрешимые решения вблизи разрывов и при определенных усло-

виях могут дать высокий порядок сходимости в местах непрерывности решения. При этом обычно устойчивая схема высокого порядка, например $O(\tau^2 + h^2)$ или выше модернизируется введением т.н. лимитеров, которые призваны гасить нефизические осцилляции и сохранять высокую скорость сходимости данной разностной схемы. Получаемая модернизированная разностная схема становится схемой, сохраняющей монотонность (сохраняющая монотонность - это когда шаблон схемы переводит монотонно убывающее или возрастающее решение с предыдущего временного слоя на последующий в монотонное с тем же направлением убывания или возрастания) и зависимой от поведения решения. При этом обычно строится TVD-схема [1], т.е. схема удовлетворяющая условию невозрастания полной вариации решения:

$$TV(D^{n+1}) \leq TV(D^n),$$

где
$$TV(D^n) = \sum_{j=0}^{J-1} |D_{j+1}^n - D_j^n|$$

- полная вариация сеточной функции [1, 10, 11]. А TVD-схема будет являться схемой, сохраняющей монотонность.

Монотонная схема будет строится только для первого (7) «проблемного» уравнения системы (7-10). Уравнение (8) - мы будем решать модифицированным методом Эйлера (предиктор - разность «вперед» для половины шага по времени, корректор - снова разность «вперед», но с учетом уже рассчитанного предиктора и по всему шагу по времени) [13].

Для (7) запишем схему Лакса-Вендроффа [11, 15]

$$\frac{\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(D_{j+1}^n + D_j^n)}{\frac{\tau}{2}} + \frac{(m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n)}{h} = -L(S_j^n)D_j^n, \quad (13')$$

$$\frac{\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(D_j^n + D_{j-1}^n)}{\frac{\tau}{2}} + \frac{(m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n)}{h} = -L(S_{j-1}^n)D_{j-1}^n, \quad (13'')$$

$$\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + \frac{\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} \tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} \tilde{D}_{j-\frac{1}{2}}}{h} = -L(S_j^n)D_j^n \quad (14)$$

для (8) модифицированную схему Эйлера

$$\tilde{S}_j = S_j^n + \frac{\tau}{2} L(S_j^n) D_j^n, \quad (15)$$

$$S_j^{n+1} = S_j^n + \tau L(\tilde{S}_j) \tilde{D}_j. \quad (16)$$

К сожалению из-за неравенства нулю правого члена выражения в (7) аппроксимационная точность (13-14) не достигает $O(\tau^2 + h^2)$, но только лишь $O(\tau + h)$ [14].

Выразив из (13) $\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}}$ и $\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}}$, получим

$$\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_{j+1}^n + D_j^n) - \frac{\tau}{2h}(m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n) - \frac{\tau}{2} L(S_j^n) D_j^n, \quad (17')$$

$$\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_j^n + D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2h}(m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2} L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n. \quad (17'')$$

В правых частях (17) добавим и вычтем две разности типа $D_{j+1}^n - D_j^n$. Затем некоторые новые и старые слагаемые умножим на Φ так, чтобы после подстановки этих выражений в (14), мы смогли бы выделить часть, совпадающую с противопоточной разностной схемой без Φ , и отдельное дополнительное слагаемое, называемое антидиффузионным членом, которым можно было бы манипулировать с помощью Φ . Такое Φ

называется ограничителем или лимитером. Его мы возьмем с соответствующим индексом

$$\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_{j+1}^n + D_j^n) - \frac{\tau}{2h} \Phi_{j+\frac{1}{2}} (m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n) - \frac{\tau}{2} L(S_j^n) D_j^n + \left(\frac{1}{2} \Phi_{j+\frac{1}{2}} (D_{j+1}^n - D_j^n) - \frac{1}{2} (D_{j+1}^n - D_j^n) \right) \quad (18')$$

$$\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_j^n + D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2h} \Phi_{j-\frac{1}{2}} (m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2} L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} \Phi_{j-\frac{1}{2}} (D_j^n - D_{j-1}^n) - \frac{1}{2} (D_j^n - D_{j-1}^n) \right) \quad (18'')$$

Подставляя (18) в (14)

$$\begin{aligned} & \frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + \frac{\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} D_j^n - \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} D_{j-1}^n}{h} + \frac{1}{2h} \left(\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} \Phi_{j+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \left((D_{j+1}^n - D_j^n) - \frac{\tau}{h} (m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n) \right) - \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} \Phi_{j-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \left((D_j^n - D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{h} (m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n) \right) \right) = \\ & = \frac{\tau}{2h} \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} L(S_j^n) D_j^n - \frac{\tau}{2h} \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n - \\ & L(S_j^n) D_j^n, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} = m \left(\tilde{S}_{j+\frac{1}{2}} \right)$, $\tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} = m \left(\tilde{S}_{j-\frac{1}{2}} \right)$,

$$\tilde{S}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{S}_j + \tilde{S}_{j+1}}{2}, \text{ а в (16) } \tilde{D}_j = \frac{\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} + \tilde{D}_{j+\frac{1}{2}}}{2}.$$

Очевидно, (18) или (19), что при $\Phi \equiv 1$ мы вернемся к схеме Лакса-Вендроффа с осцилляциями зато без излишнего сглаживания в окрестностях разрывов, а при $\Phi \equiv 0$ получим противопоточную схему, лишенную осцилляций, но диссипативную в окрестностях разрывов.

Третье слагаемое в левой части (19) можно существенно упростить, выполнив замены

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} &= m_j^n + O(h), \quad \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} = m_j^n + O(h), \\ m_{j-1}^n &= m_j^n + O(h), \quad m_{j+1}^n = m_j^n + O(h).\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + m_j^n \frac{D_j^n - D_{j-1}^n}{h} + \frac{m_j^n}{2h} \left(1 - \frac{\tau}{h} m_j^n \right) \\ \left(\Phi_{j+\frac{1}{2}}(D_{j+1}^n - D_j^n) - \Phi_{j-\frac{1}{2}}(D_j^n - D_{j-1}^n) \right) = \quad (20) \\ \frac{\tau}{2h} m_j^n (L(S_j^n) D_j^n - L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n) - L(S_j^n) D_j^n\end{aligned}$$

Левая часть (20) аналогична линейному уравнению переноса и, следовательно, здесь получено обоснование (нестрогое) применимости уже ставших классическими трех лимитеров *minmod*, *superbee*, *Van-Leer* [11]. Несмотря на нестрогость, как показывает практический опыт, схема (18-19) с данными лимитерами хорошо работает и для нелинейных систем (1-4) или (7-10). Третье слагаемое в левой части (19) или (20) и есть тот самый антидиффузионный член. Он устраняет диссипативный член в первом дифференциальном приближении противоточной схемы [11], что приводит к уменьшению сглаживающих эффектов решений вблизи разрывов. В то же время, уменьшая антидиффузионный член, мы можем добиться уменьшения нефизических осцилляций на разрывных решениях. Само первое дифференциальное приближение при переменных m_j^n (т.е. зависящих от узла) можно найти в [12].

Дополнительно к нашим трем тестовым ограничителям применим еще один [11]. Но в отличие от трех ограничителей, перечисленных выше, он не гарантирует высокую сходимость со скоростью $O(\tau^2 + h^2)$. Назовем его просто *min2* (формулу дадим позднее). Но тем естественнее его применение,

что как было сказано выше, точность схемы (13-14), а значит и (18-19) также не столь высока и соответствует $O(\tau + h)$.

Итак, мы считаем Φ некоторой функцией непрерывного аргумента ξ , где ξ определяется [11] в узлах $j + \frac{1}{2}$

$$\xi_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{D_j^n - D_{j-1}^n}{D_{j+1}^n - D_j^n} & \text{при } D_{j+1}^n - D_j^n \neq 0 \\ 1 & \text{при } D_{j+1}^n - D_j^n = 0 \end{cases}, \quad (21)$$

А в случае $\xi < 0$ (т.е. на осциллирующих решениях) мы будем брать $\Phi(\xi) = 0$.

Функции-ограничители (лимитеры)

1) *minmod*

$$\Phi(\xi) = \max(0, \min(1, \xi))$$

2) *superbee*

$$\Phi(\xi) = \max(0, \min(2\xi, 1), \min(2, \xi))$$

3) *Van-Leer*

$$\Phi(\xi) = \frac{|\xi| + \xi}{|\xi| + 1} = \begin{cases} \frac{2\xi}{1 + \xi} & , \quad \xi > 0 \\ 0 & , \quad \xi \leq 0 \end{cases}$$

4) *min2*

$$\Phi(\xi) = \max(0, \min(2\xi, 2))$$

Графики этих функций даны на рис.2.

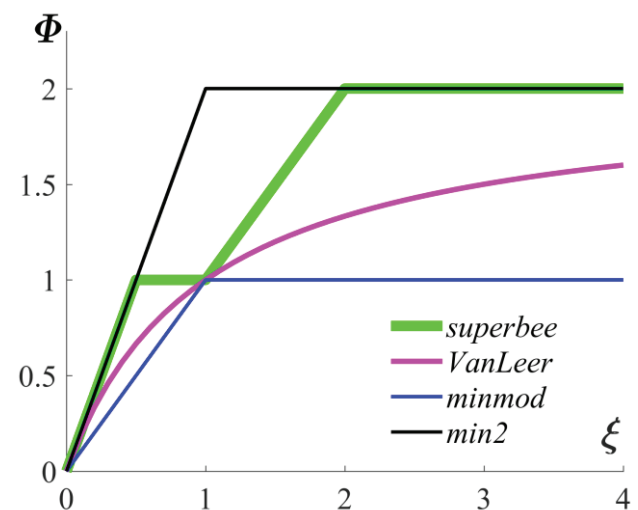


Рисунок 2. Функции-ограничители.

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Порядок численного расчета системы (7-10) состоит из следующих шагов. Вначале по формуле (21) находим узловые значения ξ и затем узловые значения выбранного лимитера. Далее т.н. предварительные значения \tilde{S}_j^{n+1} (15) и предварительные значения $\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}}$ из (17). Затем мы окончательно находим значение S_j^{n+1} из (16) и D_j^{n+1} из (19). Замены (6) помогут обратно вернуться от D_j^{n+1} к C_j^{n+1} . Для численного расчета выбран блокирующий коэффициент фильтрации:

$$\Lambda(S) = S_{\max} - S, \quad S_{\max} = 1,$$

пористость

$$g(S) = 1 + 3S,$$

проницаемость

$$f(S) = 1 + 0.1S.$$

Начальные условия

$$t = 0: C = 0, S = \frac{S_{\max}}{2}(1-x) \text{ (рис.1)}, T=4.$$

Всюду $p=1$, кроме рис. 4-7, где для наглядности графиков взяты разные значения для p . Соотношение между шагом τ по времени и шагом h по материальной координате x выбираются из условия сходимости Куранта

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{x \in [0,1], t \in [0,T]} (m(S(x,t)))}.$$

Несмотря на нелинейность уравнений (1) или (7), практика показывает, что данное условие может быть применено и для систем (1-4) или (7-10), а при нарушении данного

условия решение систем почти всегда становится неустойчивым.

Для предварительного расчета τ можно выбрать по формуле

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{x \in [0,1]} (m(S_0(x)))}.$$

Точного решения данной задачи нет, но при заданных начальных условиях из (5) можно найти точное уравнение границы раздела сред Γ

$$t_{\Gamma}(x) = 30x + 580 \ln \left(1 - \frac{x}{21} \right). \quad (22)$$

На рис.4-9 из точки пересечения $t_{\Gamma}(x)$ и сечений $x = const$ либо $t = const$ восстановлены вертикальные перпендикуляры (оранжевая сплошная линия). Данные линии показывают точные места разрывов функции концентрации взвешенных частиц $C(x,t)$.

На рис.3 изображен фронт раздела сред Γ . Точное решение (22) которого (обозн. exact) сравнивается с численным решением по противопоточной схеме (обозн. upwind) и схеме TVD с ограничителем $min2$ при $J = 10$ и 250 . Причем численное нахождение границы Γ находится интегрированием методом левых прямоугольников формулы (5) уже после нахождения численного решения системы (7-10).

На рис.4-7 показаны сечения функции концентрации взвешенных частиц $C(x,t)$ при $x=0.5$ и разных $p=1, J=200, p=1.2, J=500, p=1.4, J=1000, p=1.6, J=2000$. Каждый из рис.4-7 соответствует расчету с использованием одной из выбранных функций-ограничителей.

На рис.8 и рис.9 даны сечения $C(x,t)$ при $x=0.5$ и $t=0.5$ соответственно. Расчет велся по противопоточной схеме (обозн. upwind), Лакса-Вендроффа (обозн. LaxWen) и TVD: *minmod*, *superbee*, *Van-Leer* и *min2*, при $J = 1000$ и 10000 .

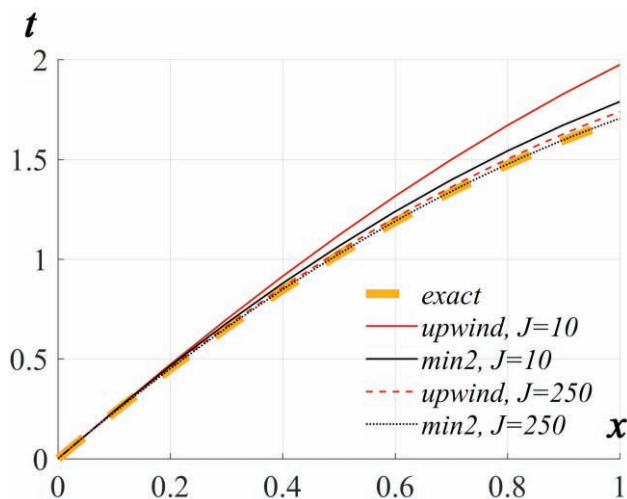


Рисунок 3. Граница раздела сред Γ .

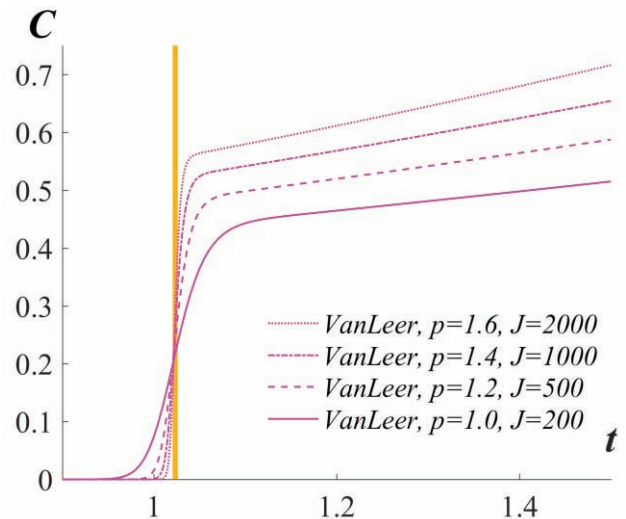


Рисунок 6. $C(0.5, t)$ (Van-Leer).

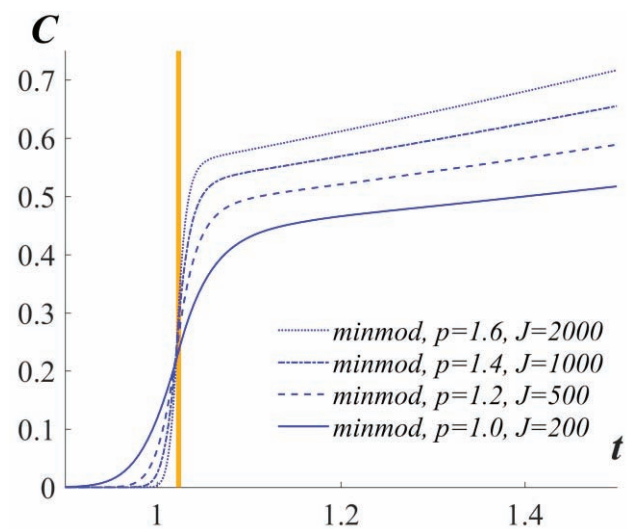


Рисунок 4. $C(0.5, t)$ (minmod).

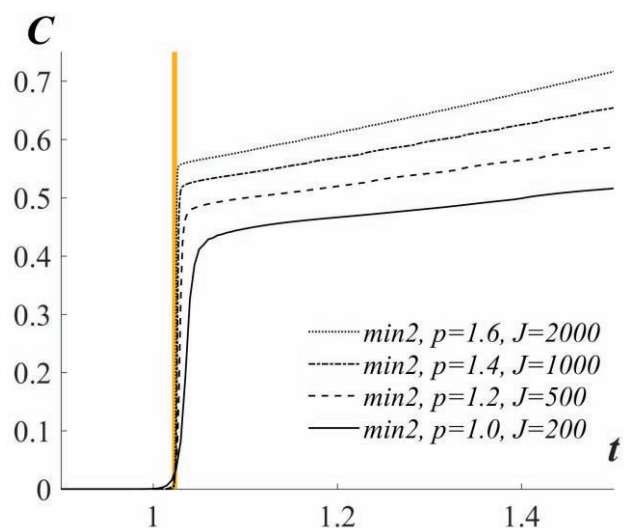


Рисунок 7. $C(0.5, t)$ (min2).

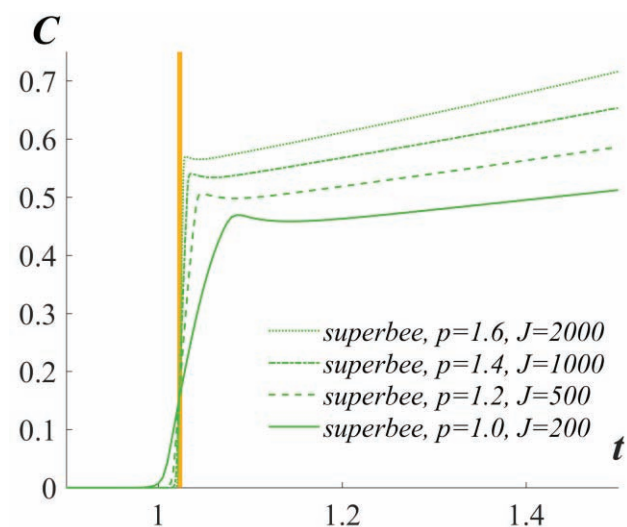


Рисунок 5. $C(0.5, t)$ (superbee).

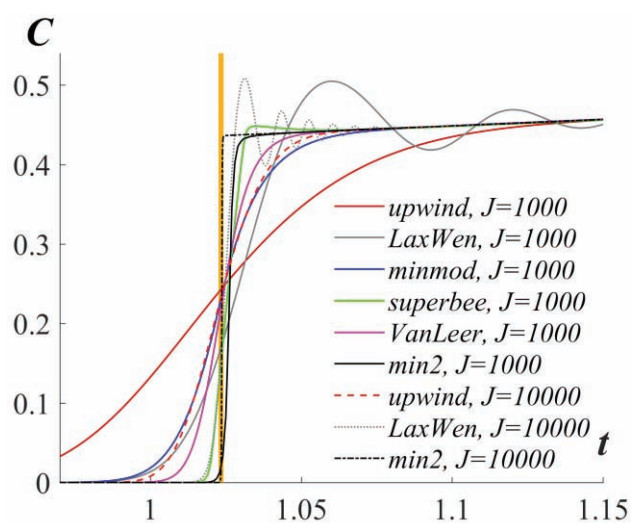


Рисунок 8. Концентрации взвеси $C(0.5, t)$.

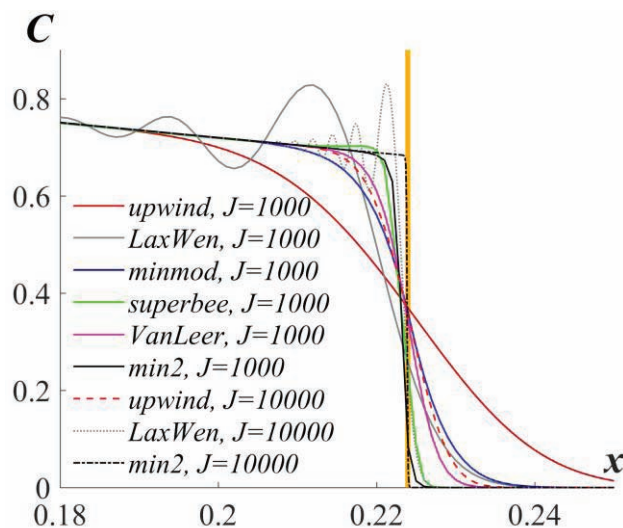


Рисунок 9. Концентрации взвеси $C(x, 0.5)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано численное решение задачи о потоке суспензии в пористой среде с помощью TVD-схемы с различными функциями ограничителями. Граница Γ двух сред найдена численно и аналитически. Построены сечения функции взвешенных частиц при заданном моменте времени и заданной точке по длине фильтра.

В точках вблизи разрыва (вблизи Γ) противопоточная схема дает сильный сглаживающий эффект точного решения (точное решение имеет вид «ступеньки») – это т.н. эффект диссипации. Этот эффект крайне медленно устраняется при увеличении числа точек сетки конечно-разностного решения (рис.8,9). А немонотонная схема Лакса-Вендроффа вблизи места разрыва дает неестественные осцилляции решения – т.н. явление дисперсии (рис.8,9). Область дисперсии при сгущении сетки уменьшается, но устранить ее нельзя. Что касается TVD-схемы, то в сравнении с диссипативными и диспергирующими схемами она дает довольно хороший результат.

Расчет границы раздела сред Γ (рис.2.) показывает, что противопоточная схема сходится

к точному решению несколько хуже, чем одна из TVD-схем (*min2*).

Хотя все функции-ограничители были изначально выведены для линейного уравнения переноса, но как показывают численные расчеты, они с успехом могут применяться и в похожем, но нелинейном уравнении фильтрации (1) или (7). Однако все это верно при заданных функциях пористости и проницаемости, а также при заданных начальных условиях. Практика применения TVD-схем при решении системы (1-4) для других исходных данных говорит о том, что при изменении, например, только лишь начальных условий, функция *superbee* очень часто оказывается предпочтительной, а функция *min2* может дать осцилляции даже вдали от разрывных решений. Тем не менее по численному расчету данной статьи наилучшим вариантом, хорошо отображающим решения вблизи разрывов, можно считать функцию *min2*. Функция *superbee* быстро сходится вблизи разрыва, приобретая форму «ступеньки», но при этом можно заметить нефизическое колебание (одна полуволна) вблизи разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Harten A.** High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 1997, Vol. 135, pp. 260-278.
2. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2007, Vol. 41, No. 5, pp. 556-564.
3. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media. *Abstract and Applied Analysis*. art. ID 680693, 2013, pp. 1-9.

4. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. *Chemical Engineering Journal*, 2014, Vol. 258, pp. 374-385.
5. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. *Procedia Engineering*, 2015, Vol. 111, pp. 491-494.
6. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotics of the filtration problem for suspension in porous media. *Vestnik MGSU*, 2015, No. 1, pp. 54-62.
7. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Inverse problem of filtering the suspension in porous media. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Vol. 11, No. 1, pp. 34-41.
8. **Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В.** Расчет задачи фильтрации на входе фильтра. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, Vol. 13, No. 1, pp. 63-68.
9. **Galaguz Yu.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 157-161.
10. **Yee H.C., Warming R.F., Harten A.** Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations (paper). // NASA, 1983.
11. **Хакимзянов Г.С., Черный С.Г.** Методы вычислений. Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. – 207 с.
12. **Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.** Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985. – 368 с.
13. **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
14. **Рябенский В.С.** Введение в вычислительную математику. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.
15. **Lax P.D., Wendroff B.** Systems of Conservation Laws. // *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1960, Vol. 13, pp. 217-237.

REFERENCES

1. **Harten A.** High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 1997, Vol. 135, pp. 260-278.
2. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2007, Vol. 41, No. 5, pp. 556-564.
3. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media. *Abstract and Applied Analysis*. art. ID 680693, 2013, pp. 1-9.
4. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. *Chemical Engineering Journal*, 2014, Vol. 258, pp. 374-385.
5. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. *Procedia Engineering*, 2015, Vol. 111, pp. 491-494.
6. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotics of the filtration problem for suspension in porous media. *Vestnik MGSU*, 2015, No. 1, pp. 54-62.
7. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Inverse problem of filtering the suspension in porous media. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Vol. 11, No. 1, pp. 34-41.
8. **Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В.** Расчет задачи фильтрации на входе фильтра. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, Vol. 13, No. 1, pp. 63-68.
9. **Galaguz Yu.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with

- Changing Flow Direction. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 157-161.
10. **Yee H.C., Warming R.F., Harten A.** Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations (paper). // NASA, 1983.
 11. **Hakimzjanov G.S., Chernyj S.G.** Metody vychislenij. Chast 4. Chislennye metody reshenija zadach dlja uravnenij giperbolicheskogo tipa [Computing Methods. Part 4. Numerical Methods of Solution of Equations of Hyperbolic Type]. Novosibirsk, RIC NGU, 2014, 207 p.
 12. **Shokin Ju.I., Janenko N.N.** Metod differencial'nogo priblizhenija. Primenenie k gazovoj dinamike [Method of Differential Approximation. Application in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 1985, 368 p.
 13. **Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova Je.Z.** Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkcij, differencial'nye i integral'nye uravnenija [Numerical Methods of Analysis. Approximation of Functions, Differential and Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1967, 368 p.
 14. **Rjaben'kij V.S.** Vvedenie v vychislitel'nuju matematiku [Introduction to Computational Mathematics]. Moscow, FIZMATLIT, 2000, 296 p.
 15. **Lax P.D., Wendroff B.** Systems of Conservation Laws. // *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1960, Vol. 13, pp. 217-237.

Галагуз Юрий Петрович, старший преподаватель кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994; e-mail: yuri.galaguz@gmail.com

Yuri P. Galaguz, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26; Phone +7(499)1835994; e-mail: yuri.galaguz@gmail.com

О ЗАДАЧАХ ПОИСКА МИНИМУМА И МАКСИМУМА В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Л.С. Ляхович¹, П.А. Акимов^{2,3,4,5}, Б.А. Тухфатуллин¹

¹ Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

⁴ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

⁵ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются некоторые актуальные вопросы, связанные с решением задач о поисках минимума и максимума в строительной механике. Приводятся теоретические основы определения минимума и максимума функций, функционалов (такая потребность возникает, как известно, при решении вариационных задач), в том числе некоторые простейшие примеры. Отдельно рассматривается смешанный случай поиска минимума (максимума) интеграла, когда варьируются как переменные величины, так и функции.

Ключевые слова: поиск минимума, поиск максимума, функция, функционал, вариационные задачи, строительная механика

ABOUT HILL-CLIMBING PROBLEMS IN STRUCTURAL MECHANICS

Leonid S. Lyakhovich¹, Pavel A. Akimov^{2,3,4,5}, Boris A. Tukhfatullin¹

¹ Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

⁴ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

⁵ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to some topical issues related to hill-climbing problems (minimum search, maximum search in structural mechanics. Theoretical foundations for computing of the minimum and maximum of functions and functionals (these problem normally turn up within variational methods) including several simplest samples and the corresponding mixed case of finding the minimum (maximum) of the integral, when both the variables and the functions vary

Keywords: minimum search, maximum search, function, functional, variational problems, structural mechanics

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [10,11], задачи оптимального проектирования строительных конструкций и соответственно задачи поиска минимума и максимума в строительной механике вот уже достаточно продолжительное время привлекают заслуженное внимание исследователей.

Традиционно данная проблематика связана со стремлением обеспечить максимальную технико-экономическую эффективность конструкции при соблюдении условий надежности, безопасности, долговечности, технологичности, а также эстетических требований [5]. В настоящее время теория решения задач оптимального проектирования строительных

конструкций является одним из наиболее динамично развивающихся и актуальных разделов в механике сплошной среды, а количество публикаций в этой области исследований, измеряемое в настоящее время сотнями и тысячами, продолжает неуклонно увеличиваться.

В настоящей статье, носящей в известной мере научно-учебно-методический характер, рассматриваются как хорошо известные (и изложенные в многочисленных учебниках, учебных пособиях и монографиях), так и несколько оригинальные подходы к решению отдельных классов задач поиска минимума и максимума в строительной механике.

В вводной части статьи прежде всего, следует отметить, что значительный вклад в становление и развитие прикладной теории оптимизации внесли отечественные и зарубежные ученые и специалисты: Н.П. Абовский, И.О. Адамович, Н.В. Баничук, В.Г. Бельский, А.И. Богатырев, В.А. Бунаков, В.В. Васильев, В.П. Валуйских, А.И. Виноградов, М.И. Волынский, Л.Н. Воробьев, Г.А. Геммерлинг, Е.Н. Герасимов, Ю.Б. Гольдштейн, В.Н. Гордеев, Г.И. Гребенюк, Б.В. Гринев, Э.Р. Даниелов, Т.Л. Дмитриева, С.И. Зуховицкий, В.А. Киселев, В.А. Комаров, И.Б. Лазарев, Л.С. Ляхович, В.П. Малков, Д.А. Мацюлявичюс, Ю.В. Немировский, Е.Л. Николаи, Я.И. Ольков, Н.П. Осмоловский, А.В. Перельмутер, В.М. Почтман, Н.В. Пустовой, И.М. Рабинович, Л.А. Растрин, Р.В. Риккардс, А.Р. Ржыницын, Н.Н. Складнев, В.В. Трофимович, А.Г. Угодчиков, И.С. Холопов, А.А. Чирас, Я. Арора, Л. Берки, Г. Вандерплаат, Э. Васютински, В. Венкайя, Г.М. Доббс, О. Зенкевич, В. Комков, З. Мруз, Н. Ольхофф, В. Прагер, Р. Разани, Г. Розвани, К. Флери, Р. Фокс, Р. Хафтка, Э. Хог, Н. Хот, Л. Шмит, К. Чой и др. [3].

Основополагающей проблемой оптимального проектирования является корректный выбор критерия оптимальности. Общим критерием зачастую служит минимизация стоимости конструкции, однако учесть все факторы, влияющие на эту стоимость представляется

весьма затруднительным, в силу чего в практических приложениях, как правило, используются более простые критерии. Наибольшее развитие получили задачи, в которых в качестве критерия оптимальности принимается минимизация веса или объема (заметим, что существуют и такие задачи, в которых условие наименьшего объема удастся заметить еще более простым, в частности, использовать критерий равнопрочности для статически определимых систем или критерий наибольшей жесткости при заданной объеме). Вместе с тем, во всех перечисленных случаях, разумеется, должны обеспечиваться условия прочности, жесткости, устойчивости, в ряде случаев вводятся также ограничения на величину основной частоты собственных колебаний. Вместе с тем, рассматриваются и двойственные постановки, когда вес (стоимость) переводится в ограничения, а в качестве функции цели, которая максимизируется, выступает несущая способность по прочности или критическая нагрузка или собственная частота [5]. Относительно меньшее развитие получили задачи оптимального проектирования, посвященные совместному рассмотрению требований эффективности, долговечности и технологичности, а также сочетанию этих требований (см., например, [11]).

В математическом отношении задачи оптимального проектирования – это *задачи оптимизации*, т.е. поиска экстремума (чаще всего условного) какой-либо (целевой) функции (вышеупомянутые минимумы стоимости, объема, максимум жесткости) и значений параметров, при которых этот экстремум достигается. Если требуется отыскать конечное число оптимальных параметров, то имеем *задачу математического программирования*.

С математической точки зрения, наряду с задачами, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции $y = f(x)$, в частности, в задачах строительной механики нередко возникает необходимость определить мини-

мальные и максимальные значения величин особого рода, называемых функционалами. Напомним, что *функционал* – это переменная величина, значения которой определяются выбором одной или нескольких функций. Иными словами, для функционалов характерна зависимость, когда функции (или вектор-функции) соответствует число, тогда как при задании функции $y = f(x)$ числу соответствует число.

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Соответственно задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум называются *вариационные задачи*.

Вообще, вариационные задачи могут быть *классическими* (если дополнительных условий нет или они имеют форму равенств) и *неклассическими* (с дополнительными условиями в форме неравенств) [1,5,14].

Многие задачи строительной механики и математической физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В данной формулировке указанные законы называются *вариационные принципы механики* или физики.

Несмотря на то, что история создания вариационных принципов механики сплошных сред насчитывает уже более 150 лет, а вариационное исчисление является одним из классических разделов математики, развитие вариационных принципов механики деформируемого твердого тела и строительной механики, в частности, теории упругости, теории оболочек и пластин, еще далеко от завершения [1].

В первом и втором разделах настоящей статьи излагаются общеизвестные теоретические основы решения задач поиска максимума и минимума соответственно функции и функционала. В третьем разделе рассматривается оригинальный материал, связанный с поиском максимума и минимума интеграла, который по одной части аргументов может рассматриваться как функция, а по другой как функционал.

1. ЗАДАЧИ ПОИСКА МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИИ

Методы решения вариационных задач [14] весьма схожи с методами исследования функций на максимум и минимум. В этой связи в первом разделе настоящей статьи целесообразно кратко напомнить теорию максимума и минимума функций (без ограничения общности для простейшего случая рассмотрения функции одной переменной).

Переменная величина y называется *функция* переменной величины x и обозначается $y = f(x)$, если каждому значению x из некоторой области изменения x соответствует значение y , т.е. имеет место соответствие: числу x соответствует число y .

Аналогично определяются и функции нескольких переменных.

Приращение Δx аргумента x функции $f(x)$ – это разность между двумя значениями указанной переменной $\Delta x = x - x_1$. Если x – независимая переменная, то дифференциал x совпадает с приращением $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывная функция*, если малому изменению x соответствует малое изменение $f(x)$.

Определение непрерывной функции можно уточнить.

Функция $f(x)$ *непрерывна* при $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$ (здесь, разумеется, подразумевается, что x принимает лишь те значения, в которых функция $f(x)$ определена).

Линейная функция – эта функция $l(x)$, удовлетворяющая следующим условиям

$$l(cx) = cl(x),$$

где c – произвольная постоянная, и

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2).$$

Линейная функция одной переменной имеет вид:

$$l(cx) = kx + b,$$

где k и b – постоянные.

Если приращение функции

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x,$$

где $A(x)$ не зависит от Δx , а $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то функция называется *дифференцируемая функция*, а линейная по отношению к Δx часть приращения ($A(x)\Delta x$) называется *дифференциал* функции и обозначается df . Разделив на Δx и переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получим, что $A(x) = f'(x)$, и следовательно,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Можно дать и несколько иное определение дифференциалу: *дифференциал* функции $f(x)$ равен (ниже α – параметр)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \right|_{\alpha=0}.$$

Имеет место теорема: если дифференцируемая функция $f(x)$ достигает максимума или минимума во внутренней точке $x = x_0$ области определения функции, то в этой точке $df = 0$.

Если функция $f(x)$ дифференцируемая в точке $x = x_0$ и в этой точке выполняется равенство

$$df = 0,$$

то точка $x = x_0$ называется *стационарная точка функции* $f(x)$.

Приведем важное для последующего изложения понятие близости функций.

Функции (кривые) $y = y(x)$ и $y_1 = y_1(x)$ близки в смысле близости k -го порядка ($k = 0, 1, 2, \dots$), если малы модули разностей

$$|y^{(s)}(x) - y_1^{(s)}(x)|, \quad s = 0, \dots, k, \quad (1.1)$$

где запись типа $f^{(p)}(x)$ обозначает производную p -го порядка от функции $f(x)$ по переменной x .

Из определения, очевидно, следует, что если функции близки в смысле близости k -го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Можно считать, что близость функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ($x_0 \leq x \leq x_1$) в смысле близости k -го порядка определяется величиной, определяемой формулой

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{s=0}^k |y_1^{(s)}(x) - y_2^{(s)}(x)|. \quad (1.2)$$

Пример 1.1. Существуют экстремальные проблемы, которые не могут быть выражены с помощью понятия функции $f(x)$ одной переменной. Простейшим относящимся сюда примером является проблема нахождения экстремумов функции $f(x_1, x_2)$ от двух независимых переменных.

Можно показать, что точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ является стационарной точкой функции $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, однако точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не является экстремумом данной функции.

В самом деле, имеем:

$$df(x_1, x_2) = x_2 dx_1 + x_1 dx_2; \\ df(0, 0) = 0.$$

Вместе с тем, для любого $\delta > 0$ точки $(x_1, x_2) = (\delta, -\delta)$ и $(x_1, x_2) = (\delta, \delta)$ лежат в круге $S_{2\delta}(0, 0)$ и

$$\begin{aligned} f(\delta, -\delta) &= -\delta^2 < f(0, 0) = 0; \\ f(\delta, \delta) &= \delta^2 > f(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

в связи с чем точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не является точкой экстремума функции $f(x_1, x_2)$.

Аналогично можно показать, что точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ является стационарной точкой функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, однако точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не является экстремумом данной функции – имеем седловую точку ■.

Седловая точка функции – это такая точка из области определения функции, которая является стационарной для данной функции, однако не является ее локальным экстремумом. В такой точке, если рассматривается функция двух переменных, образованная графиком функции поверхность обычно напоминает по форме седло – выпуклая в одном направлении и вогнутая в другом [4].

2. ЗАДАЧИ ПОИСКА МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА

2.1. Базовые понятия вариационного исчисления.

По аналогии с материалом, изложенным в первом разделе статьи можно привести соответствующие понятия и для функционалов (также, рассматривая вначале соответствующий простейший случай).

Переменная величина J называется *функционалом*, зависящий от функции $y(x)$, и обозначается $J = J[y(x)]$ или $J = J(y(x))$, если каждой функции $y(x)$ из некоторого класса функций $y(x)$ соответствует значение J , т.е. имеет место соответствие: функции $y(x)$ соответствует число J .

Аналогично определяются и функционалы, зависящие от нескольких функций, а также

функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

Приращение или *вариация* δy аргумента $y(x)$ функционала $J = J[y(x)]$ – это разность между двумя функциями $\delta y = y(x) - y_1(x)$, при этом предполагается, что $y(x)$ меняется произвольно в некотором классе функций.

Функционал $J = J[y(x)]$ называется *непрерывным функционалом*, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала $J = J[y(x)]$.

Определение непрерывного функционала можно уточнить. Функционал $J = J[y(x)]$ *непрерывен* при $y = y_0(x)$ в смысле близости k -го порядка, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon \\ \text{при} \quad &|y^{(s)}(x) - y_0^{(s)}(x)| < \delta, \quad s = 0, \dots, k, \end{aligned}$$

при этом подразумевается, что функция $y(x)$ берется из класса функций, на которых функционал $J = J[y(x)]$ определен.

Линейный функционал – это функционал $L[y(x)]$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$L[cy(x)] = cL[y(x)],$$

где c – произвольная постоянная, и

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

Примером линейного функционала является следующий:

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx.$$

Если приращение функционала

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

можно представить в виде

$$\Delta J = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|,$$

где $L[y(x), \delta y]$ – линейный по отношению к δy функционал; $\max |\delta y|$ – максимальное значение $|\delta y|$; $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ при $\max |\delta y| \rightarrow 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т.е. $L[y(x), \delta y]$ называется *вариация функционала* или *первая вариация функционала* и обозначается δJ .

Иными словами, вариация функционала – это главная, линейная по отношению к δy , часть приращения функционала.

Можно дать и несколько иное определение вариации: *вариация* функционала $J[y(x)]$ равен (ниже α – параметр)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0}.$$

Очевидно, что, рассуждая аналогичным образом, можно определить *вторую вариацию функционала* (обозначается $\delta^2 J$), а также вариации более высоких порядков.

Имеет место теорема: если функционал $J[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает максимума или минимума при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ – внутренняя точка области определения функционала, то при $y = y_0(x)$

$$\delta J = 0.$$

Если для функционала $J[y(x)]$, имеющего вариацию, при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ – внутренняя точка области определения функционала, выполняется равенство

$$\delta J = 0,$$

то функция $y = y_0(x)$ называется *стационарная точка функционала* $J[y(x)]$.

Поясним, что функционал $J[y(x)]$ достигает при функции (на кривой) $y = y_0(x)$ максимума, если значение функционала $J[y(x)]$ при любой близкой к $y = y_0(x)$ функции не больше, чем $J[y_0(x)]$, т.е. имеем:

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0. \quad (2.1)$$

Если $\Delta J \leq 0$, причем $\Delta J = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что при функции (на кривой) $y = y_0(x)$ достигается *строгий максимум*. Аналогично определяется функция $y = y_0(x)$ при которой реализуется *минимум* – в этом случае $\Delta J \geq 0$ при всех функциях, близких к функции $y = y_0(x)$.

Понятие *экстремум функционала* требует определенного уточнения: под максимумом или под минимумом выше имелось в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала для близких функций, однако как уже отмечалось выше, близость функций может быть понимаема различно, в связи с чем в определении максимума или минимума функционала следует указывать, какого порядка близость имеется в виду.

Если функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых величина $|y(x) - y_0(x)|$ мала, т.е. по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется соответственно *сильный максимум* или *сильный минимум*.

Если функционал $J[y(x)]$ достигает при функции $y = y_0(x)$ максимума или минимума по отношению к функциям, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, то максимум или минимум называются соответственно *слабый максимум* или *слабый минимум*.

Очевидно, что если при функции $y = y_0(x)$ достигается сильный максимум или сильный минимум, то, разумеется, соответственно достигается слабый максимум или слабый минимум. Обратное утверждение неверно.

Заметим, что все определения и теоретические построения настоящего раздела почти без всякого изменения переносятся на функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций

$$J[y_1(x), \dots, y_n(x)] \quad (2.2)$$

или зависящие от одной или нескольких функций многих переменных

$$J[y(x_1, \dots, x_n)]; \quad (2.3)$$

$$J[y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)]. \quad (2.4)$$

Так, например, вариация δJ функционала $J[y(x_1, x_2)]$ может быть определена как главная линейная по отношению к δy часть приращения

$$\delta J = J[y(x_1, x_2) + \delta y] - J[y(x_1, x_2)], \quad (2.5)$$

причем если при $y = y(x_1, x_2)$ функционал J достигает экстремума, то при $y = y(x_1, x_2)$ вариация $\delta J = 0$.

Иными словами, необходимым условием минимума (максимума) функционала J является обращение в ноль его первой вариации δJ , т.е.

$$\delta J = 0. \quad (2.6)$$

Вторая вариация функционала J должна быть в случае минимума неотрицательной,

$$\delta^2 J \geq 0, \quad (2.7)$$

а в случае максимума неположительной,

$$\delta^2 J \leq 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что необходимым условием наличия экстремума функционала $J[y(x)]$ при функции $y = y_0(x)$ является *стационарность функционала* при функции $y = y_0(x)$ или, что эквивалентно, в точке $y = y_0(x)$ (т.е. функция $y = y_0(x)$ должна быть стационарной точкой функционала $J[y(x)]$). Таким образом, стационарность – это более общее свойство функционала в данной точке, чем экстремальность [1].

Пример 2.1. Пусть задан функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (2.9)$$

причем функции $y(x)$ удовлетворяют условиям

$$y(a) = c; \quad y(b) = d. \quad (2.10)$$

где c, d – некоторые заданные числа.

Первая и вторая вариации функционала (2.9) имеют соответственно следующий вид:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\delta y')^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 \right) dx. \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (2.12)$$

Пример 2.2. Пусть задан функционал, зависящих от двух функций y_1, y_2 , т.е. $J[y_1, y_2]$.

Каждому фиксированному значению y_1 можно поставить в соответствие число

$$J_1[y_1] = \max_{y_2} J[y_1, y_2] \quad (2.13)$$

и тем самым определить функционал J_1 на множестве тех элементов y_1 , для которых существует указанных максимум.

Аналогично можно определить функционал

$$J_2[y_2] = \min_{y_1} J[y_1, y_2] \quad (2.14)$$

Запись

$$J[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] = \min_{y_1} \max_{y_2} J[y_1, y_2] \quad (2.15)$$

(минимум по y_1 максимумов по y_2 функционала J) означает, что при $y_1 = \tilde{y}_1$ функционал (2.13) имеет минимум, причем указанный в (2.13) максимум достигается при $y_2 = \tilde{y}_2$. Таким образом, говорят, что функционал $J[y_1, y_2]$ имеет в точке $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ *минимакс*. Иными словами, выражение (2.15) означает, что сначала для каждого фиксированного y_1 находится максимум функционала J по y_2 , а затем из всех найденных значений J выбирается минимальное.

Аналогично с помощью равенства (2.14) определяется *максимин*:

$$J[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] = \max_{y_1} \min_{y_2} J[y_1, y_2]. \quad (2.16)$$

Если в точке $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ функционал $J[y_1, y_2]$ имеет одновременно и минимакс (2.15) и максимин (2.16), то говорят, что $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ – *седловая точка функционала*.

Заметим, что часто используют и другое, эквивалентное определение: точка $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ называется седловой точкой функционала $J[y_1, y_2]$, если при любых y_1, y_2 имеет место неравенство

$$J[\tilde{y}_1, y_2] \leq J[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] \leq J[y_1, \tilde{y}_2] \quad \blacksquare. \quad (2.17)$$

2.2. Уравнение Эйлера, уравнение Эйлера – Пуассона, уравнение Остроградского.

Пример 2.3. Пусть дано дифференциальное уравнение с одной неизвестной (искомой) функцией $y = y(x)$ и двумя заданными (т.е. известными) функциями $p = p(x)$ и $q = q(x)$

$$(py')' + q = 0, \quad x \in (a, b) \quad (2.18)$$

и граничными условиями, при которых известны значения непосредственно самой искомой функции на краях (в граничных точках) рассматриваемого интервала (отрезка)

$$y(a) = c; \quad y(b) = d, \quad (2.19)$$

где c, d – некоторые заданные числа.

Можно показать [12], что задача (2.18), (2.19) полностью эквивалентна задаче поиска минимума функционала

$$J[y] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} p(y')^2 - qy \right) dx \rightarrow \min \quad (2.20)$$

с учетом граничных условий (2.19) на краях отрезка.

Поясним, что эквивалентность задачи (2.18), (2.19) и задачи (2.20), (2.19) означает, что решения указанных задач полностью совпадают при условии того, что функция $p = p(x)$ является строго положительной на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$.

Заметим, что доказательство эквивалентности вышеперечисленных задач, приведенное, например, в [9], выполняется в два этапа: сначала доказывается, что любое решение задачи (2.18), (2.19) является решением задачи (2.20), (2.19), после чего доказывается обратное утверждение.

С физической точки зрения примером задачи (2.18), (2.19) или соответственно (2.20), (2.19) является задача растяжения – сжатия стержня ■.

Пример 2.4. Пусть дано дифференциальное уравнение (2.18) с одной неизвестной (искомой) функцией $y = y(x)$, двумя заданными (т.е. известными) функциями $p = p(x)$ и $q = q(x)$, а также граничными условиями на краях рассматриваемого отрезка, при которых известно значение непосредственно самой искомой функции $y = y(x)$ на левом конце и

значение производной этой функции на правом конце отрезка

$$y(a) = c; \quad y'(b) = d, \quad (2.21)$$

где c, d – некоторые заданные числа.

Можно показать [13], что задача (2.18), (2.21) полностью эквивалентна задаче поиска минимума функционала

$$J[y] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} p(y')^2 - qy \right) dx - d \cdot p(b)y(b) \rightarrow \min \quad (2.22)$$

с граничными условиями только на левом конце отрезка

$$y(a) = c. \quad (2.23)$$

Эквивалентность задачи (2.18), (2.21) и задачи (2.22), (2.23) означает, что решения указанных задач полностью совпадают при условии того, что функция $p = p(x)$ является строго положительной на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$.

Заметим, что доказательство эквивалентности вышеперечисленных задач, приведенное, например, в [9], аналогично выполняется в два этапа: сначала доказывается, что любое решение задачи (2.18), (2.21) является решением задачи (2.22), (2.23), после чего доказывается обратное утверждение.

С физической точки зрения примером задачи (2.18), (2.21) или соответственно (2.22), (2.23) является задача растяжения – сжатия стержня ■.

Пусть требуется исследовать на экстремум функционал вида

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (2.24)$$

при заданных граничных условиях

$$y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1; \quad (2.25)$$

будем считать, что $F(x, y, y')$ – трижды дифференцируемая функция.

Можно показать [18], что экстремум функционала (2.24) реализуется при функции $y = y(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (2.26)$$

$$\text{где} \quad F_y = \frac{\partial}{\partial y} F; \quad F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F, \quad (2.27)$$

называемого *уравнение Эйлера*.

Следует отметить, что краевая задача, определяемая уравнением (2.26) и граничными условиями (2.25) не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может не быть единственным [18]. Во многих вариационных задачах строительной механики существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если уравнение Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Рассмотрим теперь функционал J более общего вида:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (2.28)$$

при заданных граничных условиях

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n,0}; \quad (2.29)$$

$$y_1(x_1) = y_{1,1}, \quad \dots, \quad y_n(x_1) = y_{n,1}. \quad (2.30)$$

Заметим, что граничные условия (2.29)-(2.30) также, очевидно, можно переписать в виде

$$y_j(x_0) = y_{j,0}, \quad y_j(x_1) = y_{j,1}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.31)$$

В данном случае функции, реализующие экстремум должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.32)$$

где
$$F_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} F; \quad F_{y'_i} = \frac{\partial}{\partial y'_i} F. \quad (2.33)$$

Далее рассмотрим функционалы, зависящие от производных более высокого порядка

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \quad (2.34)$$

при заданных граничных условиях вида

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \quad (2.35)$$

$$y(x_1) = y_1; \quad y'(x_1) = y'_1; \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}; \quad (2.36)$$

будем считать, что функция F дифференцируема $(n+2)$ раза по всем аргументам, а $y = y(x)$ дифференцируема $2n$ раз.

Функция $y = y(x)$, реализующая экстремум функционала (2.28), должна быть решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0, \quad (2.37)$$

где
$$F_{y^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} F, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.38)$$

называемого в литературе [18] *уравнение Эйлера – Пуассона*.

Поясним, что в рамках введенных для единообразия обозначений производных $y^{(i)}$ функции y по переменной x (где $i = 0, 1, \dots, n$ – порядок производной), очевидно, имеем:

$$y^{(0)} \equiv y; \quad y^{(1)} \equiv y'; \quad y^{(2)} \equiv y'' \quad \text{и т.д.}$$

Итак, требуется решать краевую задачу, определяемую уравнением (2.37) и граничными условиями (2.35)-(2.36).

Рассмотрим соответствующий функционал, зависящий от произвольного количества функций

$$J[y_1, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y'_1(x), \dots, y_1^{(n_1)}(x), y_2(x), y'_2(x), \dots, y_2^{(n_2)}(x), \dots, y_m(x), y'_m(x), \dots, y_m^{(n_m)}(x)) dx \quad (2.39)$$

при заданных граничных условиях вида

$$y_1(x_0) = y_{1,0}; \quad y'_1(x_0) = y'_{1,0}; \quad y_1^{(n_1-1)}(x_0) = y_{1,0}^{(n_1-1)}; \quad (2.40)$$

$$y_2(x_0) = y_{2,0}; \quad y'_2(x_0) = y'_{2,0}; \quad y_2^{(n_2-1)}(x_0) = y_{2,0}^{(n_2-1)}; \quad (2.41)$$

$$\dots$$

$$y_m(x_0) = y_{m,0}; \quad y'_m(x_0) = y'_{m,0}; \quad y_m^{(n_m-1)}(x_0) = y_{m,0}^{(n_m-1)}. \quad (2.42)$$

Необходимое условие экстремума в данном случае записывается следующим образом:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y^{(n_i)}} = 0, \quad (2.43)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Обратимся теперь к рассмотрению функционалов, зависящих от функций нескольких переменных.

Пусть стоит задача исследования на экстремум функционала

$$J[z(x, y)] = \iint_{\Omega} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy, \quad (2.44)$$

причем на границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω значения функции $z(x, y)$ заданы; будем считать функцию F трижды дифференцируемой; будем полагать, что поверхность $z(x, y)$, на которой реализуется экстремум, является дважды дифференцируемой.

Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которому должна удовлетворять функция $z(x, y)$, реализующая экстремум, называется *уравнение Остроградского* и имеет вид:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0, \quad (2.45)$$

где
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (2.46)$$

Для функционала

$$\begin{aligned} J[z(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ = \iint \dots \int_{\Omega} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где
$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.48)$$

Уравнение Остроградского для соответствующей функции $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, реализующей экстремум функционала (2.47), может быть записано следующим образом:

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{F_{p_i}\} = 0, \quad (2.49)$$

Если подынтегральная функция функционала J зависит от производных более высокого порядка, также можем записать необходимое условие экстремума (*уравнение Эйлера – Пуассона*), которому должна удовлетворять функция, реализующая экстремум [18]. Итак, используя необходимое условие экстремума функционала можно получить дифференциальное уравнение Эйлера, или дифференциальное уравнение Остроградского,

или иные представленные в настоящем разделе уравнения. Таким образом, можно осуществить переход от вариационной задачи к традиционной краевой задаче для дифференциальных уравнений. Заметим, что с физической точки зрения, например, если для заданной системы известно выражение полной энергии деформации, которое является некоторым функционалом, то уравнения Эйлера или Остроградского для соответствующего функционала являются уравнениями равновесия или уравнениями движения данной системы.

Как известно, решение задач строительной механики основано на принципах, в которых утверждается стационарность некоторых функционалов. Так, например, вариационный принцип Лагранжа связан с отысканием минимума функционала – полной энергии деформации системы (\mathcal{E}) – из условия равенства нулю первой вариации этого функционала ($\delta\mathcal{E} = 0$). Вследствие изложенного проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения, выражающего условие равновесия системы, оказывается эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум функционалу, который выражает энергию системы.

Пример 2.5. Пусть в функционале (2.9) функция $y(x)$ удовлетворяет условиям (2.10). Первая вариация данного функционала имеет вид (2.11), причем интеграл от второго слагаемого, используя технику интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Если $\eta(x)$ – произвольная кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$\eta(a) = \eta(b) = 0,$$

то однопараметрическое семейство функций

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x)$$

при достаточно малых значениях параметра α принадлежит некоторой окрестности функции $y(x)$ (т.е. функция $\tilde{y}(x)$ сколь угодно близка к $y(x)$ – см. ранее)).

Принимая во внимание тот факт, что

$$\delta y = \alpha \eta(x),$$

очевидно, можем переписать выражение для первой вариации

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx.$$

Данное выражение обращается в нуль, если функция $y(x)$ дает экстремум функционалу. Вариация δy ввиду ее произвольности не равна нулю, откуда вытекает, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

или, что эквивалентно, имеем (2.26) ■.

Пример 2.6. Пусть требуется вывести уравнение равновесия упругой мембраны при малых прогибах и заданной интенсивности нагрузки $q(x_1, x_2)$.

Как известно [7], полная энергия деформации такой мембраны выражается интегралом

$$\begin{aligned} J[y] &= \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 + q(x_1, x_2) y \right] dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где μ – постоянная величина; $y(x_1, x_2)$ – функция прогибов мембраны.

Пусть плоская область Ω , занимаемая мембраной, ограничена контуром (границей) $\Gamma = \partial\Omega$. Требуется найти функцию $y(x_1, x_2)$, непрерывную в области Ω вместе с частными производными первого и второго поряд-

ков, принимающими на контуре $\Gamma = \partial\Omega$ заданные значения

$$y(x_1, x_2)|_{\Gamma} = \varphi(x_1, x_2) \quad (2.51)$$

и дающие интегралу (2.50) минимальное значение.

Рассмотрим значение функционала (2.50) для функции

$$y(x_1, x_2) + \alpha \eta(x_1, x_2),$$

где $\eta(x_1, x_2)$ – функция, непрерывная вместе с производными первого и второго порядков и равная нулю на контуре $\Gamma = \partial\Omega$.

Итак, для того, чтобы функционал (2.50) имел минимум, его первая вариация должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta J &= \\ &= \iint_{\Omega} \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y'_{x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y'_{x_2} \right) + q \delta y \right] dx_1 dx_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\text{где } \delta y'_{x_1} = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x_1}; \quad \delta y'_{x_2} = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x_2}; \quad \delta y = \alpha \eta. \quad (2.53)$$

Формула Грина, как известно, имеет вид:

$$\int_{\Gamma} P dx_1 + Q dx_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2,$$

где $\Gamma = \partial\Omega$ – положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости; Ω – область, ограниченная кривой $\Gamma = \partial\Omega$; $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$ – функции, определенные в области Ω и имеющие непрерывные частные производные

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial x_2}.$$

Введем обозначение:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.54)$$

– оператор Лапласа.

Руководствуясь формулой Грина, можем преобразовать в интеграле (2.52) первые два члена:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y \right) \right] dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right) \delta y dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y dx_2 - \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y dx_1 - \iint_D \Delta y \delta y dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \\ & = \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y dx_2 - \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y dx_1 - \iint_D \Delta y \delta y dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Контурный интеграл в последнем выражении равен нулю в силу того, что функция $\eta(x_1, x_2)$ на контуре $\Gamma = \partial\Omega$ обращается в нуль. Следовательно,

$$\delta J = - \iint_D (\mu \Delta y - q) \delta y dx_1 dx_2 = 0. \quad (2.56)$$

Так как δy произвольна, будем иметь следующее уравнение, которому должна удовлетворять функция $y(x_1, x_2)$, дающая минимум функционалу (2.50):

$$\mu \Delta y - q = 0. \quad (2.57)$$

Резюмируя вышеизложенное, следует отметить, что получили дифференциальное уравнение Остроградского, которое представляет

собой уравнение Пуассона. Это и есть искоемое уравнение равновесия упругой мембраны ■.

Пример 2.7. Основные положения механики могут быть сформулированы в трех эквивалентных формах: в виде дифференциальных уравнений, в виде интегральных уравнений, в виде вариационных принципов [1]. Кроме того, могут использоваться операторные постановки [6].

К числу основных вариационных принципов строительной механики, как известно, относятся *принцип Лагранжа* и *принцип Кастильяно* [14]. Оба этих принципа объединяет важнейшее свойство – свойство экстремальности соответствующего функционала, а именно на решении задачи функционал Лагранжа и функционал Кастильяно принимают минимальное значение.

Вместе с тем, между этими двумя основными вариационными принципами, разумеется, имеются и существенные различия.

Проблема поиска минимума функционала Лагранжа определяет вариационную постановку исходной задачи в перемещениях, а проблема поиска точки минимума функционала Кастильяно определяет вариационную постановку задачи в напряжениях.

На решении задачи *функционал Лагранжа* принимает минимальное значение среди всех физически и кинематически допустимых полей, тогда как уравнения равновесия в объеме тела и на его поверхности представляют собой следствие (необходимое условие) этой минимальности, т.е. являются уравнением Эйлера и естественными краевыми условиями.

На решении задачи *функционал Кастильяно* принимает минимальное значение среди всех физически и статически допустимых полей, тогда как условия совместности деформаций и кинематические краевые условия представляют собой уравнения Эйлера и естественные краевые условия.

Итак, указанные основные вариационные принципы, взаимно дополняя друг друга, требуют рассмотрения ограниченного класса полей, заранее удовлетворяющих некоторым

предписанным условиям. Таким образом, исторически возникло естественное стремление построить такой функционал (и соответственно такой вариационный принцип), который на решении задачи принимал бы если и не экстремальное, то хотя бы стационарное значение, однако зато среди полей напряженно-деформированного состояния (НДС), не подчиненных заранее каким либо условиям.

Вариационные принципы, в которых поля напряжений и поля перемещений рассматриваются как независимые даже в случае отсутствия упругой среды, принято называть *смешанные вариационные принципы*.

2.3. Вариационные задачи на условный экстремум.

Вариационные задачи на условный экстремум – это задачи, в которых требуется найти экстремум функционала J , причем на функции, от которых зависит функционал J , наложены некоторые связи.

Вообще, вариационную задачу без дополнительных условий называют *свободной*, а задачу об условном экстремуме *несвободной*.

Рассмотрим, прежде всего, задачу исследования на экстремум функции

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.58)$$

при наличии связей

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (2.59)$$

Очевидно, что наиболее естественным подходом к решению данной задачи является разрешение системы

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.60)$$

уравнения которой будем считать независимыми, относительно каких-нибудь m переменных, например, относительно

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

т.е. имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n); \\ x_2 &= x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n); \\ &\dots \\ x_m &= x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Далее подставляем найденные x_1, x_2, \dots, x_m в $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при этом данная функция становится функцией $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$. Таким образом, здесь имеем лишь $n - m$ переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, которые уже независимы, и задача сводится по существу к исследованию функции $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ на безусловный экстремум.

Заметим, что для решения рассматриваемой задачи более удобен другой метод решения, называемый методом неопределенных множителей, сохраняющий полное равноправие переменных. Как известно, данный метод при исследовании на экстремум функции (3.1) при наличии связей (3.3) заключается в том, что составляется новая вспомогательная функция

$$z^* = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i, \quad (2.61)$$

где λ_i – некоторые постоянные множители.

Далее функция (2.61) исследуется уже на безусловный экстремум, т.е. составляется система уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.62)$$

дополненная уравнениями связей (2.60), из которой определяются все $n + m$ неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Совершенно аналогично может быть решена задача на условный экстремум для функционалов вида (2.28) с граничными условиями типа

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (2.63)$$

Здесь составляют функционал

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i \right) dx \quad (2.64)$$

или

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx, \quad (2.65)$$

где

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i, \quad (2.66)$$

который уже исследуется на безусловный экстремум, т.е. решают систему уравнений Эйлера, дополненную соответствующими уравнениями связей

$$\left. \begin{aligned} F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \varphi_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Вообще, количества уравнений $m+n$, очевидно, достаточно для определения $m+n$ неизвестных функций y_1, y_2, \dots, y_n и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Граничные условия

$$y_j(x_0) = y_{j,0}, \quad y_j(x_1) = y_{j,1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.68)$$

не должны противоречить уравнениям связей и, в принципе, позволяют определить $2n$ произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Можно показать [18], что найденные данным путем кривые, на которых достигается минимум или максимум функционала (2.64), будут решениями исходной вариационной задачи (2.28), (2.63).

Заметим, что также можно обосновать и справедливость описанной ниже теоремы.

Функции y_1, y_2, \dots, y_n , реализующие экстремум функционала (2.22) при наличии условий (2.63) удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала (2.64) или, что эквивалентно, (2.65). Функции $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ и $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ определяются из уравнений Эйлера и уравнений связей (2.67) [18]. Следует отметить, что уравнения связей в (2.67) можно считать уравнениями Эйлера для функционала (2.64) или (2.65), если аргументами функционала считать не только функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, но также и $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$. Уравнения связей в (2.67) предполагаются независимыми, т.е. один из соответствующих якобианов порядка m отличен от нуля, например [18]

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь более сложный случай, при котором уравнения связей являются дифференциальными уравнениями вида

$$\varphi_i(x, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.69)$$

В механике связи такого вида называются *неголономные связи*, а связи вида (3.6) – *голономные связи*.

Для функционала (2.28) с условиями (2.31) и при наличии связей вида (3.69) можно показать [18], что его условный экстремум достигается при тех функциях, на которых реализуется безусловный экстремум функционала (2.64) или (2.65) (т.е., иными словами, можно доказать *правило множителей* [18]).

Изопериметрические задачи – это вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала (2.22) при наличии условий, называемых *изопериметрическими условиями* и имеющих соответственно вид

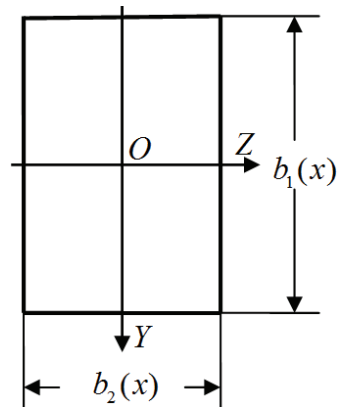


Рисунок 2.1. Поперечное сечение стержня.

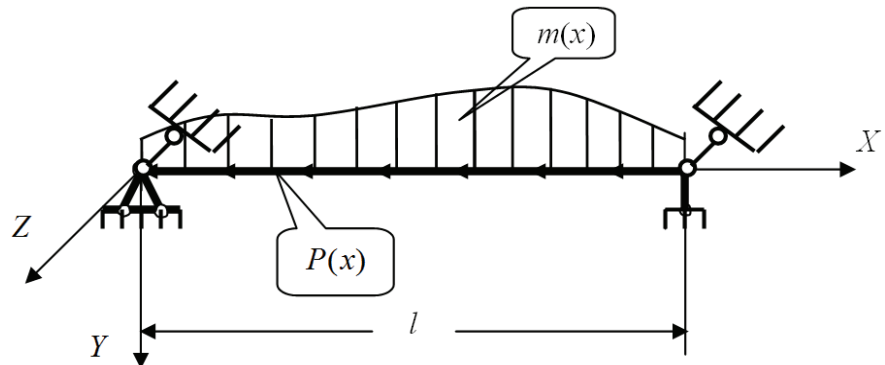


Рисунок 2.2. Схема рассматриваемого стержня.

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = l_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.70)$$

где l_i – постоянные; число m здесь может быть больше, меньше или равно числу n , а также аналогичные задачи для других, более сложных функционалов.

Пример 2.8. Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.1), представленный на рис. 2.2, несущий распределенную массу и нагруженный продольной силой, причем в общем случае величины массы и продольной силы могут изменяться по длине стержня, граничные условия могут быть произвольными. Положим, что требуется сформулировать задачу поиска стержня минимальной материалоемкости при ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний.

Следуя рассуждениям, приведенным в [10], варьируемые параметры здесь – это размеры поперечного сечения стержня $b_1(x)$ и $b_2(x)$, а функционал цели – это объем материала стержня

$$V_0 = \int_0^l b_1(x)b_2(x)dx, \quad (2.71)$$

где l – длина стержня; V_0 – объем материала стержня.

Ограничения по устойчивости или на величину низшей частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции могут быть записаны в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega \leq \omega_{1,1}; \quad \omega_0 k_\omega \leq \omega_{2,1}, \quad (2.72)$$

где ω_0 – заданная частота; k_ω – установленный коэффициент запаса; $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$ – соответственно низшие частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции.

Если ограничения (2.72) будут выполняться в виде равенств, то они, очевидно, могут быть переписаны в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1}. \quad (2.73)$$

Соответственно в оптимизационной задаче требуется отыскать функции $b_1(x)$, $b_2(x)$, которые придадут функционалу (2.71) минимальное значение при условии, что будут выполнены ограничения (2.73).

Как отмечено в [10], в виду того, что при выполнении ограничений (2.73) соответствующие энергетические функционалы принимают нулевые значения, можно сформировать функционал $V_{0\omega}$, экстремум которого при варьировании $b_1(x)$ и $b_2(x)$ должен обеспечить как минимум функционала цели

(2.71), так и нулевые значения энергетических функционалов:

$$\mathcal{E}_{\omega 1} = \frac{1}{2} \int_0^l \{EJ_1(x)(v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 [m(x) + \rho F(x)v_{\omega}^2]\} dx = 0; \quad (2.74)$$

$$\mathcal{E}_{\omega 2} = \frac{1}{2} \int_0^l \{EJ_2(x)(w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 [m(x) + \rho F(x)w_{\omega}^2]\} dx = 0, \quad (2.75)$$

$$\text{где} \quad F(x) = b_1(x)b_2(x) \quad (2.76)$$

$$v'_{\omega} = dv_{\omega} / dx; \quad v''_{\omega} = d^2 v_{\omega} / dx^2; \quad (2.77)$$

$$w'_{\omega} = dw_{\omega} / dx; \quad w''_{\omega} = d^2 w_{\omega} / dx^2; \quad (2.78)$$

– площадь поперечного сечения; E – модуль упругости материала стержня; ρ – плотность материала стержня; v_{ω} и w_{ω} – ординаты первых форм собственных колебаний в соответствующих главных плоскостях инерции; $m(x)$ и $P(x)$ показаны на рис. 2.2; $\mathcal{E}_{\omega 1}$, $\mathcal{E}_{\omega 2}$ – энергетические функционалы собственных колебаний в главных плоскостях инерции; $J_1(x)$, $J_2(x)$ – соответствующие моменты инерции сечения.

С учетом вышеизложенного имеем:

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = & \int_0^l \{b_1(x) * b_2(x) - \\ & - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^3(x)b_2(x)}{12} (v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - \\ & - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1(x)b_2(x))v_{\omega}^2] - \\ & - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_1(x)b_2^3(x)}{12} (w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - \\ & - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1(x)b_2(x))w_{\omega}^2]\} dx, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где $\lambda_{\omega 1}$, $\lambda_{\omega 2}$ – неопределенные множители.

Таким образом, рассматриваемая задача является изопериметрической [18], а $\lambda_{\omega 1}$, $\lambda_{\omega 2}$ постоянными величинами.

Экстремум функционала (2.79) определялся решением уравнений [2]

$$(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)} = 0; \quad (\delta V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0, \quad (2.80)$$

где $(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)}$ и $(\delta V_{0\omega})_{b_2(x)}$ – соответственно вариации функционала $V_{0\omega}$ по $b_1(x)$ и $b_2(x)$. Заметим, что данная задача более подробно рассмотрена в [10] ■.

Изопериметрические задачи могут быть сведены к задачам на условный экстремум, рассмотренным ранее, посредством введения новых неизвестных функций.

Введем обозначения

$$\int_{x_0}^x F_i dx = z_i(x), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.81)$$

Следовательно,

$$z_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.82)$$

Из условия

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

имеем, что

$$z_i(x_1) = l_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.83)$$

Дифференцируя $z_i(x)$ по x , получим:

$$z'_i(x_1) = F_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.84)$$

Таким образом, интегральные изопериметрические связи вида (2.70) заменились связями дифференциальными (2.84), и, следовательно, рассматриваемая задача свелась к задаче, уже рассмотренной ранее.

Применяя правило множителей, можно вместо исследования на экстремум функционала (2.28) при наличии связей (2.84) исследовать на безусловный экстремум функционал

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)(F_i - z'_i) \right) dx \quad (2.85)$$

или, что эквивалентно, функционал

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx, \quad (2.86)$$

$$\text{где} \quad F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)(F_i - z'_i), \quad (2.87)$$

Уравнения Эйлера для функционала (2.85) или (2.86) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j}'^* &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ F_{z_j}^* - \frac{d}{dx} F_{z_j}'^* &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

или

$$F_{y_j}^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{i y_j} - \frac{d}{dx} \left(F_{y_j}'^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{i y_j}' \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (2.89)$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.90)$$

Из последних m уравнений получаем, что все λ_i постоянны, а первые n уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала

$$J^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \right) dx. \quad (2.91)$$

Таким образом, имеет место следующее правило: для получения основного необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала (2.28) при наличии связей (2.70) необходимо составить вспомогательный функционал (2.91), где λ_i – постоянные и сформулировать для него уравнения Эйлера.

Произвольные постоянные C_1, C_2, \dots, C_{2n} в общем решении системы уравнений Эйлера и постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ определяются из граничных условий (2.31) и из изопериметрических условий (2.70).

Следует отметить, что система уравнений Эйлера для функционала (2.91) не изменится, если функционал (2.91) умножить на некоторый множитель μ_0 – данное свойство называется *принцип взаимности*.

В завершении настоящего раздела упомянем об еще одной задаче на условный экстремум, называемой *задача об оптимальном управлении*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.92)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.93)$$

Здесь помимо неизвестной функции (или вектор-функции) $x(t)$ в уравнении содержится и так называемая *управляющая функция* (или соответствующая вектор-функция) $u(t)$. Управляющую функцию $u(t)$ необходимо выбрать таким образом, чтобы заданный функционал вида

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t)) dt \quad (2.94)$$

достигал экстремума.

Функция $u(t)$, дающая решение поставленной задачи, называется *оптимальная функция* или *оптимальное управление*.

Описанную задачу можно рассматривать как задачу на условный экстремум функционала (2.94) с дополнительными связями (2.92), однако в практических задачах оптимальные функции часто лежат на границе множества допустимых управляющих функций. В таких ситуациях изложенная выше теория задач на

условный экстремум, предполагавшая возможность двусторонних вариаций, неприменима. В этой связи для решения задач оптимального регулирования традиционно используются иные методы, разработанные Л.С. Понтрягиным [12], Р. Беллманом [2] и другими учеными.

В заключение здесь отметим, что многие задачи оптимального проектирования строительных конструкций могут быть сформулированы в терминах теории оптимального управления, и для их решения можно применять *метод динамического программирования* (преимущественно для дискретных задач) и *принцип максимума Л.С. Понтрягина* (преимущественно для непрерывных задач).

3. ЗАДАЧИ ПОИСКА МАКСИМУМА И МИНИМУМА ИНТЕГРАЛА, РАССМАТРИВАЕМОГО ОДНОВРЕМЕННО КАК ФУНКЦИОНАЛ И КАК ФУНКЦИЯ

Пример 3.1. Рассмотрим особый случай сформулированной в примере 2.8 задачи оптимизации стержня с прямоугольным поперечным сечением и ограничением в обеих главных плоскостях инерции по устойчивости или величине первой частоты собственных колебаний, когда варьируются оба размера поперечного сечения стержня, но один из этих размеров не зависит от x [10].

Для определенности положим, что варьируемый размер сечения b_1 не меняется по длине стержня, тогда как второй варьируемый размер $b_2(x)$ определяется в виде функции от x . Функция цели в этом случае принимает форму

$$V_0 = b_1 \int_0^l b_2(x) dx. \quad (3.1)$$

Итак, оптимизационная задача формулируется следующим образом: требуется отыс-

кать величину b_1 и функцию $b_2(x)$, которые придадут функции цели (3.1) минимальное значение при условии выполнения ограничений на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции (2.73).

Сформируем интеграл, условия экстремума которого должны обеспечить как минимум функции цели (3.1), так и условие, что заданная частота ω_0 будет низшей собственной в обеих главных плоскостях инерции (т.е. условие (2.73)):

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = & b_1 \int_0^l b_2(x) dx - \\ & - \lambda_{\omega 1} \int_0^l [E \frac{b_1^3 b_2(x)}{12} (v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - \\ & - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) v_{\omega}^2] dx - \\ & - \lambda_{\omega 2} \int_0^l [E \frac{b_1 b_2^3(x)}{12} (w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - \\ & - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) w_{\omega}^2] dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как одна из двух варьируемых величин b_1 не является функцией, зависящей от x , а другая $b_2(x)$, напротив, является, интеграл (3.2) относительно b_1 должен рассматриваться как функция, а относительно $b_2(x)$ как функционал.

С учетом (2.74)-(2.75) приходим к изопериметрической задаче.

Очевидно, что вариации функционала $V_{0\omega}$ по v и w приведут к уравнениям собственных колебаний в главных плоскостях инерции, а вариации функционала $V_{0\omega}$ по $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ – к выполнению условий (2.74), (2.75).

С учетом вышеизложенного для отыскания минимума функционала (3.2) требуется выполнение следующих условий:

$$(\delta V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0; \quad \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_1} = 0, \quad (3.3)$$

где соответствующие принятые обозначения описаны в примере 2.8 ■.

В общем случае выше описана ситуация, когда, например, вместо (2.2) приходится иметь дело с интегралами вида

$$J[y_1(x), \dots, y_m(x), \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n] \quad (3.4)$$

(в более общем случае можно перенумеровать соответствующим образом аргументы функционала так, чтобы последний принял вид (3.4)) или вместо (2.4) с интегралами вида

$$J[y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n), \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n]. \quad (3.5)$$

В частности, функции, реализующие экстремум интеграла (3.4) должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} (\delta J)_{y_i(x)} = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial J}{\partial \beta_i} = 0, & i = m+1, m+2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $(\delta J)_{y_i(x)}$ – вариация интеграла (рассматриваемого как функционал) по $y_i(x)$.

Таким образом, еще раз подчеркнем, что когда часть варьируемых величин

$$y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

являются функциями, зависящими от x , а другая часть

$$\beta_i, \quad i = m+1, m+2, \dots, n, \quad (3.8)$$

напротив, не являются функциями, зависящими от x , то интеграл (3.4) относительно (3.7) должен рассматриваться как функционал, а относительно (3.8) как функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. **Беллман Р.** Динамическое программирование. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
3. **Дмитриева Т.Л., Нгуен Ван Ты.** Современные концепции решения задач оптимизации конструкций. // Вестник ИрГТУ, №10(69), 2012, с. 104-110.
4. **Дмитриева Т.Л., Соболев В.И.** Концепция многоуровневой оптимизации в выборе вариантов конструктивных решений металлических сооружений. // Вестник ИрГТУ №10(57), с. 2011, с. 91-94.
5. **Жадрасинов Н.Т., Заикина А.Г.** Методы решения задач оптимизации строительной механики. // Труды университета, 2005, №4, с. 69-71.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
7. **Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М.** Численные методы решения задач строительной механики. – М.: АСВ, 2005. – 425 с.
8. **Кирсанов М.Н.** Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем. // Строительная механика и расчет сооружений, 2010, №2(229), с. 60-63.
9. **Лалин В.В., Колосова Г.С.** Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 2001. – 72 с.
10. **Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.** Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 2017, Volume 13, Issue 1, pp. 9-22.

11. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 2014, Volume 10, Issue 2, pp. 14-23.
12. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 388 с.
13. **Рыбаков В.А.** Методы решения научно-технических задач в строительстве. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2013. – 167 с.
14. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
15. **Стрелецкий Н.С., Стрелецкий Д.Н.** Проектирование и изготовление экономических металлических конструкций. – М.: Стройиздат, 1964. – 359 с.
16. **Филиппович А.П.** Смешанный метод конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика». – Одесса: Одесский орден Трудового Красного знамени государственный университет им. И.И. Мечникова, 1984 с. – 200 с.
17. **Чирас А.А.** Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
18. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
2. **Bellman R.** Dinamicheskoe Programirovanie [Dynamic Programming]. Moscow, Inostrannaja literatura, 1960, 400 p.
3. **Dmitrieva T.L., Nguen Van Ty.** Sovremennye Konceptii Reshenija Zadach Optimizacii Konstrukcij [Modern Concepts for Solving of Design Optimization Problems]. Vestnik IrGTU, 2012, No. 10(69), pp. 104-110.
4. **Dmitrieva T.L., Sobolev V.I.** Konceptija Mnogourovnevoj Optimizacii v Vybere Variantov Konstruktivnyh Reshenij Metallicheskih sooruzhenij [The concept of multi-level optimization in the selection of options for constructive solutions of metal structures]. // Vestnik IrGTU, No. 10(57), 2011, pp. 91-94.
5. **Zhadrasinov N.T., Zaikina A.G.** Metody reshenija zadach optimizacii stroitel'noj mehaniki [Method for Solving of Optimization Problems of Structural Mechanics]. Trudy Universiteta, 2005, No. 4, pp. 69-71.
6. **Zolotov A.B., Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Mnogourovnevye Diskretnye i Diskretno-Kontinual'nye Realizacii Variacionno-Raznostnogo Metoda [Multilevel Discrete and Discrete-Continual Versions of the Variational-Difference Method]. – М.: ASV, 2013. – 416 s.
7. **Il'in V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M.** Chislennye metody reshenija zadach stroitel'noj mehaniki [Numerical Methods of Structural Analysis]. Moscow, ASV, 2005, 425 p.
8. **Kirsanov M.N.** Geneticheskij algoritm optimizacii sterzhnevnyh sistem [Genetic Algorithm of Optimization of Truss Structure]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2010, No. 2(229), pp. 60-63.
9. **Lalin V.V., Kolosova G.S.** Chislennye metody v stroitel'stve. Reshenie odnomernykh zadach metodom konechnykh jelementov [Numerical Methods in Construction. Finite Element Solution of One-Dimensional Problems]. Saint-Petersburg, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta, 2001, 72 p.

REFERENCES

1. **Abovskij N.P., Andreev N.P., Deruga A.P.** Variacionnye principy teorii uprugosti i teorii obolochek [Variational Principles of the Theory of Elasticity and the Theory of Shells]. Moscow, Nauka, 1978, 288 p.

10. **Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.** Kriterii minimal'noj materialoemkosti sterzhnej prjamougol'nogo poperechnogo sechenija pri ogranichenijah po ustojchivosti ili na velichinu pervoj sobstvennoj chastoty [Criteria of Minimum Materials Consumption for Bars with Rectangular Cross-Section and Restrictions on Stability or Limitations on the Value of the first Natural Frequency]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, Volume 13, Issue 1, pp. 9-22.
 11. **Ljahovich L.S., Perel'muter A.V.** Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovanija stroitel'nyh konstrukcij [Some Aspects of Optimal Design of Building Structures]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2014, Volume 10, Issue 2, pp. 14-23.
 12. **Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F.** Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov [Mathematical Theory of Optimum Processes]. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 388 p.
 13. **Rybakov V.A.** Metody reshenija nauchno-tekhnicheskikh zadach v stroitel'stve [Methods for Solving of Scientific and Technical Problems in Construction]. Saint-Petersburg, Izdatel'stvo Politehnicheskogo universiteta, 2013, 167 p.
 14. **Slivker V.I.** Stroitel'naja mehanika. Variacionnye osnovy [Structural Mechanics. Variational Foundations]. Moscow, ASV, 2005, 736 p.
 15. **Streleckij N.S., Streleckij D.N.** Proektirovanie i izgotovlenie jekonomichnyh metallicheskih konstrukcij [Design and Manufacturing of Cost Effective Steel Structures]. Moscow, Strojizdat, 1964, 359 p/
 16. **Filippovich A.P.** Smeshannyj metod konechnykh jelementov v zadachah o deformacii pologih obolochek [A Mixed Finite Element Method in Problems on the Deformation of Shallow Shells]. Ph.D. Thesis, Odessa, 1984, 200 p.
 17. **Chiras A.A.** Stroitel'naja mehanika [Structural Mechanics]. Moscow, Strojizdat, 1989, 255 p.
 18. **Elsgolts L.Je.** Differencial'nye uravnenija i variacionnoe ischislenie [Differential Equations and Variational Calculus]. Moscow, Editorial URSS, 2000, 320 p.
-
- Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: lls@tsuab.ru
- Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: prtsuab@mail.ru
- Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Head of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: lls@tsuab.ru
- Pavel A. Akimov, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Boris A. Tukhfatullin, Associate Professor, Ph.D, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: prtsuab@mail.ru

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКАХ РАЗЛИЧИЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА КРИВОЙ РАВНОВЕСИЙ

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Безичев

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II
(МГУПС (МИИТ)), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В работе обсуждаются особенности исследования типа критической точки на кривой равновесий (точка бифуркации или предельная точка). Дются новые представления о пополнении исходного равновесия при прохождении предельной точки или точки бифуркации. На примерах фермы Мизеса, пологой арки и пологой цилиндрической панели показаны особенности рождения и перемещения точек бифуркации по кривой равновесных состояний.

Ключевые слова: бифуркация, предельная точка, потеря устойчивости

ON COMPUTATIONAL DIFFERENCES OF CRITICAL POINTS ON EQUILIBRIUM CURVE

Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: In this paper, we discuss the features of investigating the type of the critical point on the equilibrium curve (bifurcation point or limit point). There are new ideas about the completion of the initial equilibrium at the limit point or bifurcation point. Examples as the Mises farm, a shallow arch and a shallow cylindrical panel show shows the features of the birth and movement of bifurcation points along the curve of equilibrium.

Keywords: bifurcation, critical point, loss of stability

1. ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ИЛИ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

В данной работе обсуждаются вычислительные признаки различия критических точек (точка бифуркации или предельная точка).

Пусть система нелинейных уравнений равновесия для конечноэлементной модели упругой системы представлена в виде некоторого оператора, зависящего от узловых перемещений v , представительной координаты q (по которой строится кривая равновесных состояний), параметра нагрузки λ и вектора единичных узловых нагрузок \vec{P} .

$$G(v(q), \lambda(q), \vec{P}) = 0$$

Производная нелинейного оператора (матрица Якоби или матрицы касательной жесткости) выражается в следующем виде:

$$K(v, \lambda) = \frac{\partial G(v, \lambda)}{\partial v}$$

Производная по параметру нагрузки λ дает упомянутый единичный вектор нагрузки \vec{P} :

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \lambda} = \vec{P}$$

Точки критического равновесия $(\lambda_{кр}, v_{кр})$ определяются двумя главными соотношениями:

$$\det K(\lambda_{кр}, v_{кр}) = 0$$

$$K(\lambda_{кр}, \nu_{кр}) \cdot \vec{W}_1^0 = 0 \quad (1)$$

Здесь \vec{W}_1^0 – первый «нулевой» собственный вектор потери устойчивости, соответствующий «нулевому» собственному значению матрицы жесткости в предкритическом равновесии.

Основное соотношение, определяющее тип критической точки, получим путем умножения слева упомянутого транспонированного нулевого собственного вектора $(W_1^0)^T$ на производную нелинейного оператора по координате q . После некоторых преобразований с учетом соотношения (1) получим основную формулу:

$$(W_1^0)^T \frac{\partial \vec{G}}{\partial q} \rightarrow \dots \rightarrow ((W_1^0)^T \cdot \vec{P}) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial q} = 0 \quad (2)$$

Если в этой формуле скалярное произведение не равно нулю

$$(\vec{W}_1^0 \cdot \vec{P}) \neq 0,$$

а в ноль обращается производная

$$\partial \lambda / \partial q = 0,$$

то критическая точка есть предельная точка. Если же, наоборот, скалярное произведение равно нулю

$$(\vec{W}_1^0 \cdot \vec{P}) = 0,$$

а производная

$$\partial \lambda / \partial q \neq 0,$$

то критическая точка есть точка бифуркации. Другим признаком точки бифуркации является выполнение условия ортогональности предкритической формы равновесия и нулевого собственного вектора:

$$(\vec{W}_1^0 \cdot \vec{W}_{предкр}) = 0. \quad (3)$$

В случае предельной точки упомянутое условие ортогональности не выполняется:

$$(\vec{W}_1^0 \cdot \vec{W}_{предкр}) \neq 0.$$

Отметим, что формула (2) в самом общем виде была впервые дана в работах А. Джепсона и А. Спенса (1982, 1985 г.) [1, 2].

Независимо от работ этих авторов соотношение (2) было сформулировано в работах Г.А. Мануйлова, С.Б. Косицына и К.А. Жукова [3] (Строительная механика №5, 1989 г.). Там же была дана энергетическая интерпретация формулы (2), которая заключается в следующем:

Если работа внешней нагрузки на перемещения, задаваемых собственным вектором матрицы касательной жесткости для предкритического равновесия равна нулю, то критическая точка есть точка бифуркации. В противном случае эта критическая точка есть предельная точка.

Формальное доказательство было приведено в работе А. Демила и В. Вундерлихта [4] (1997 г.). Развернутое изложение рассматриваемых вопросов дано в книге В. Галишниковой, П. Дунайского и П.Дж. Паля в 2009 г. [5] (на английском), а также в работе авторов [6].

В терминах КЭ расчетов «перевод» математических результатов Джепсона и Спенса на язык, доступный рядовым вычислителям, был сделан П. Вриггерсом и Дж. Симо [7] (1990 г.). Авторы указали также признаки различия типов предельных точек и точек бифуркации при выполнении некоторых дополнительных условий, которые выражены через константы a, b, c, d , вычисляемые согласно следующим формулам:

$$a = (\vec{W}_1^0)^T \nabla_{\nu} (K \vec{W}^0) \vec{W}_1^0,$$

$$\begin{aligned} b &= (\vec{W}_1^0)^T \nabla_\lambda (K \vec{W}_1^0) + (\vec{W}_1^0)^T \nabla_\nu (K \vec{W}_1^0) \tilde{\nu}, \\ c &= (\vec{W}_1^0)^T \nabla_\lambda P + 2(\vec{W}_1^0)^T \nabla_\lambda (K \tilde{\nu}) + \\ &\quad + (\vec{W}_1^0)^T \nabla_\nu (K \tilde{\nu}) \tilde{\nu}, \\ d &= b^2 - ac. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\nu} = K^{-1} \vec{P}$, ∇_ν , ∇_λ – геометрические производные «по направлению» матрицы K

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (K \vec{W}) \Delta \nu &= \frac{d}{d\varepsilon} (K(\nu + \varepsilon \Delta \nu, \lambda) \vec{W}_1^0)_{\varepsilon=0} \\ \nabla_\lambda (K \vec{W}) \Delta \lambda &= \frac{d}{d\varepsilon} (K(\nu, \lambda + \varepsilon \Delta \lambda) \vec{W}_1^0)_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

Чтобы различать типы предельных точек Джепсон и Спенс [2] предложили следующее условия.

Если в критической точке скалярное произведение

$$\left((\vec{W}_1^0)^T \cdot \vec{P} \right) \neq 0$$

и коэффициент $a \neq 0$, то это простая (квадратичная) предельная точка (точка поворота) (рис. 1б).

Если же скалярное произведение

$$\left((\vec{W}_1^0)^T \cdot \vec{P} \right) \neq 0,$$

но коэффициент $a = 0$, то критическая точка есть двойная (кубическая) предельная точка (точка перегиба с горизонтальной касательной (рис. 1а). Ее называют «слабо устойчивой» точкой равновесия, поскольку именно с образования этой точки начинается явление потери устойчивости пологих арок и оболочек при увеличении параметра подъемистости. Появление и развитие предельных точек можно представить с помощью многообразия катастрофы сборки (рис. 2)

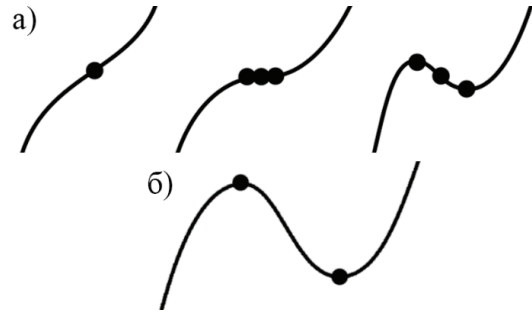


Рисунок 1. Двойная (кубическая) и простая (квадратичная) предельные точки.

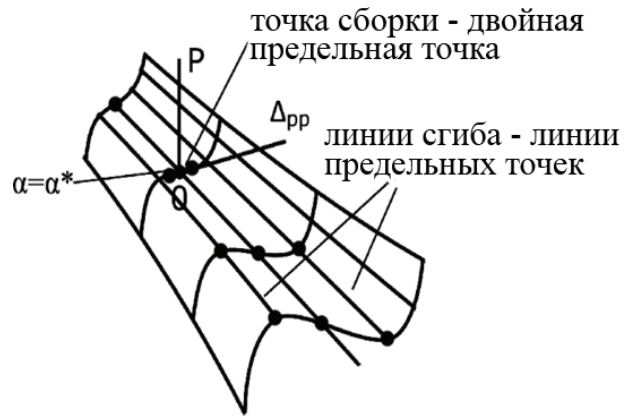


Рисунок 2. Предельные точки и многообразие катастрофы сборки.

Чтобы различать типы точек бифуркации используются следующие условия.

Если

$$\left((\vec{W}_1^0)^T \cdot \vec{P} \right) = 0, \quad a \neq 0, \quad d > 0,$$

то точка бифуркации простая и асимметричная (рис. 3в).

Если

$$\left((\vec{W}_1^0)^T \cdot \vec{P} \right) = 0, \quad a = 0, \quad b \neq 0,$$

то точка бифуркации симметричная (неустойчивая при $b < 0$, рис. 3а, устойчивая при $b > 0$, рис. 3б).

Если

$$\left((\vec{W}_1^0)^T \cdot \vec{P} \right) = 0, \quad d < 0,$$

то точка бифуркации изолированная (изола, рис. 3г).

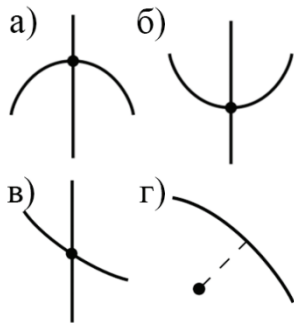


Рисунок 3. Точки бифуркации: симметричная (а, б), асимметричная (в) и изолированная (г).

Отметим, что несмотря на кажущуюся исключительность изолированных точек бифуркации они встречаются порой в самых неожиданных задачах. Например, точка бифуркации симметричного равновесия круговой подъемистой двухшарнирной арки ($2\alpha > 135^\circ$), нагруженной двумя одинаковыми симметрично расположенными силами, является изолированной.

Рассмотрим еще одну особую точку бифуркации, которая встречается при изменении типа критической точки (наименьшей критической нагрузке вместо предельной точки с некоторого момента соответствует точка бифуркации). Описанный переход от предельной точки к точке бифуркации совершается через двукратную критическую точку типа «ветвление в вершине холма» (вариант катастрофы гиперболической омбилики) [8, 9].

Эта двукратная критическая точка (рис. 4) характеризуется такими соотношениями:

$$(P_1 \cdot \overline{w}_1^0) \neq 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q_1^2} < 0, \\ (P_1 \cdot \overline{w}_2^0) = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q_2^2} < 0.$$

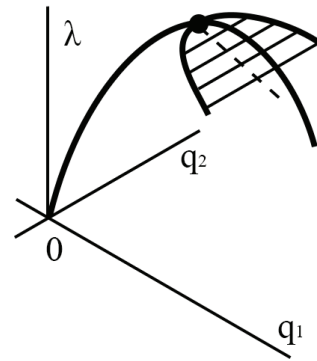


Рисунок 4. Двукратная критическая точка «ветвление в вершине холма».

При переходе через критическую точку равновесия существенным является вопрос о пополнении послекритических равновесий по сравнению с предкритическими. Как известно [6,10], начальное послекритическое равновесие есть сумма предкритического равновесия и нулевого собственного вектора с масштабным множителем ξ :

$$\vec{W}_{нач.п / кр} = \vec{W}_{предкр} + \xi \vec{W}_1^0 + \dots \quad (4)$$

В точке бифуркации предкритическое равновесие $\vec{W}_{предкр}$ — неполное равновесие. Поэтому для него существует энергетически ортогональное дополнение. Неполное равновесие, в принципе, может терять устойчивость как в точке бифуркации так и в предельной точке. Если же предкритическое равновесие полное (энергетически ортогональное дополнение нулевое), то потеря устойчивости возможна только в предельной точке. Данные положения вытекают из соотношений ортогональности (2), (3).

После прохождения точки бифуркации пополнение предкритического равновесия возможно в двух вариантах:

- 1) Добавляются новые материальные компоненты (например, безмоментное равновесие переходит в моментное);
- 2) Добавляются относительно новые (иначе «организованные») компоненты, которые ранее присутствовали в предкритическом равновесии (симметричные равновесия +

кососимметричные из состава дополнения дают в сумме несимметричное послекритическое равновесие).

Формально высказанные соображения можно представить в виде следующих соотношений

$$W_1^0 \in \text{Don}^{\perp} \{ \vec{W}_{\text{предкр}} \} \rightarrow \left(\vec{W}_1^0 \cdot \vec{W}_{\text{предкр}} \right) = 0$$

В предельной точке условие ортогональности (3) не справедливо

$$\left(W_1^0 \cdot W_{\text{предкр}} \right) \neq 0.$$

Однако для этой точки символически можно записать некоторое (условное) разложение нулевого собственного вектора

$$W_1^0 = c_1 W_{\text{пред}} + c_2 W_1^{0 \text{ биф}}$$

Если предельная точка близка к неустойчивой точке бифуркации (которой она «подчинена» согласно иерархии катастроф [11]), то

$$c_2 \gg c_1, c_1 \neq 0,$$

и в этом случае начальное послекритическое равновесие $W_{\text{нач.п./кр}}$ оказывается более

полным, чем предкритическое $W_{\text{предкр}}$.

Подробности рассмотрения примера, связанного с потерей устойчивости в предельной точке цилиндрической оболочки см. [10].

Если же предельная точка не связана с точкой бифуркации или расположена достаточно далеко от нее ($c_2 = 0$ или $c_2 \ll c_1$), то нулевой собственный вектор пропорционален (или почти пропорционален) вектору предкритического равновесия

$$(W_1^0 = c_1 W_{\text{пред}}).$$

Тогда начальное послекритическое равновесие (после прохождения предельной точки) повторяет предкритическое равновесие, но будет неустойчивым

$$\vec{W}_{\text{нач.п./кр}} = \vec{W}_{\text{предкр}} + \xi c_1 \vec{W}_{\text{предкр}} = (1 + \xi c_1) \vec{W}_{\text{предкр}}.$$

2. РОЖДЕНИЕ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ И ИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО КРИВОЙ РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что некоторая упругая система имеет кривую равновесия с двумя предельными точками. Точки бифуркации рождаются парами и могут появиться либо в некоторой точке устойчивой части кривой равновесия (до верхней предельной точки), либо после прохождения этой предельной точки (т.е. на неустойчивой части кривой равновесия). Пример первого варианта дает «высокая» ферма Мизеса ($\alpha_0 \geq 67^\circ, 36$, рис. 5). Пока угол наклона стержней меньше $67^\circ, 36$, ферма Мизеса теряет устойчивость исключительно в предельной точке. Известно, что критический угол наклона стержней в предельной точке, а также величина критической силы удовлетворяют соотношениям [12]:

$$\cos^3 \alpha_{\text{кр}}^* = \cos \alpha_0, \quad P_{\text{кр}}^* = 2cl \sin^3 \alpha_{\text{кр}},$$

где величина c для стержней:

$$c = \frac{EA}{l}.$$

При достижении угла $67^\circ, 36$ в некоторой точке восходящей устойчивой ветви равновесий рождается новая пара критических точек, определяющих симметричную бифуркацию. Это следует из анализа решений уравнения [12]

$$\cos^3 \alpha^{\text{биф}} - \cos \alpha^{\text{биф}} = \cos \alpha_0$$

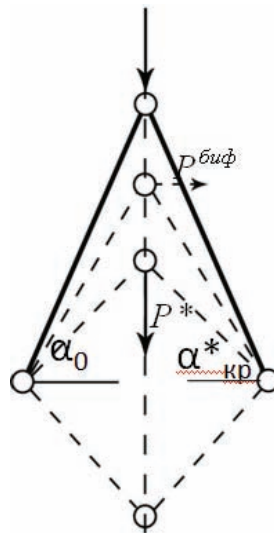
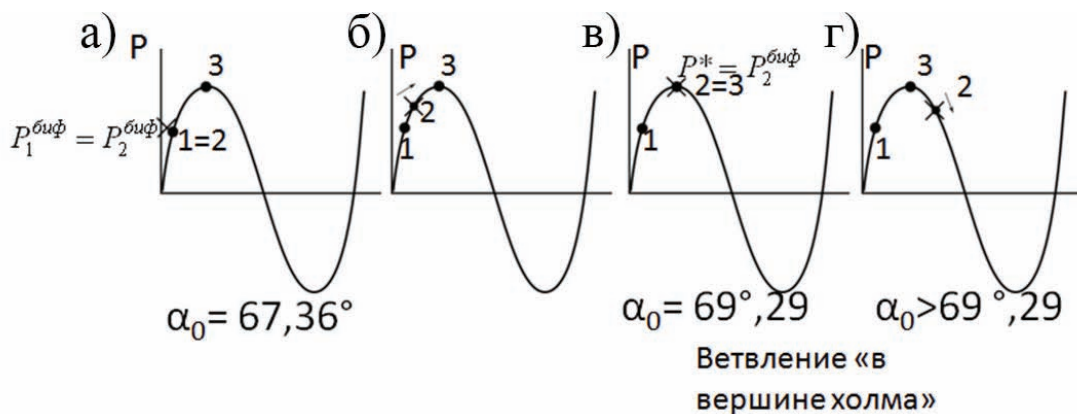


Рисунок 5. «Высокая» ферма Мизеса.



Ветвление «в
вершине холма»

Рисунок 6. Перемещение точек бифуркации «высокой» фермы Мизеса по кривой равновесий.

которое можно представить как кубическое вида:

$$x^3 - x + a = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D=0$ когда

$$\alpha_1^{\text{биф}} = \alpha_2^{\text{биф}}$$

при $\alpha_0 = 67,36^\circ$. Это равенство свидетельствует о рождении двукратного вещественного корня (рис. 6а). Начиная с этого момента у высоких ферм Мизеса наименьшей критической нагрузке соответствует потеря устойчивости в симметричной неустойчивой точке бифуркации. Соответствующая критическая

бифуркационная нагрузка вычисляется по формуле:

$$P_{\text{биф}} = 2cl \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha^{\text{биф}}} \right) \sin \alpha^{\text{биф}}$$

При увеличении угла $\alpha_0 > 67,36^\circ$ две точки бифуркации начинают расходиться вдоль устойчивой ветви (рис. 6б). При увеличении начального угла до $\alpha_0 = 69,29^\circ$ вторая точка бифуркации достигает предельной точки, образуется двукратная критическая точка типа «ветвление в вершине холма». Далее эта точка бифуркации проходит предельную точку и попадает на неустойчивую ветвь равновесий (рис. 6г). На этом рисунке

показаны две петли неустойчивых бифуркационных равновесий. Однако во многих случаях (арочные конструкции, удлиненные цилиндрические панели) точки бифуркации рождаются на неустойчивой ветви равновесий. Но их рождение не означает немедленной смены типа потери устойчивости, как это было в предыдущем случае (ферма Мизеса). Рассмотрим простейшую пологую арку синусоидального очертания:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l},$$

нагруженную синусоидальной нагрузкой

$$p = p_0 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Детальный анализ развития критических точек для такой арки дан в работе [12].

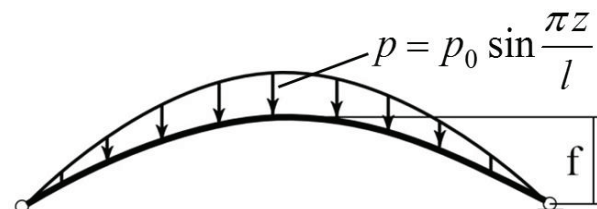


Рисунок 7. Пологая синусоидальная арка под действием синусоидальной нагрузки.

Анализ рождения точек бифуркации удобно рассмотреть с использованием безразмерного параметра

$$s = 4I / Af^2.$$

Пока $s > 1,0$ очень пологая арка устойчивости не теряет. При $s = 1,0$ на кривой равновесия появляется двойная предельная точка (точка перегиба с горизонтальной касательной). Начиная с этого момента все арки, имеющие параметр $s < 1,0$ вплоть до значения $s^* = 2/11$ ($\approx 0,182$) теряют устойчивость в предельных точках. Однако при $s^{**} = 0,25$ происходит

рождение двукратной точки бифуркации на неустойчивой части ветви кривой равновесий (рис. 5б). При дальнейшем уменьшении параметра s ($s < 0,25$) точки бифуркации расходятся друг от друга. Перемещаясь вдоль неустойчивой части кривой равновесий, одна из них стремится к верхней предельной точке, другая – к нижней. При достижении параметром значения $s^* = 2/11$ ($\approx 0,182$) точки бифуркации достигают предельных точек. В этот момент образуется двукратные критические точки («ветвление в вершине холма»).

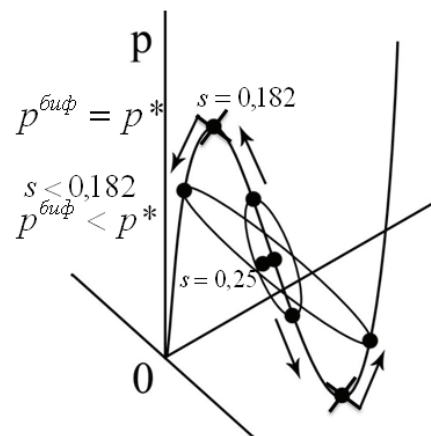


Рисунок 8. Рождение и перемещение точек бифуркации вдоль основной кривой равновесий арки.

При еще большем уменьшении параметра s ($s < 2/11$), наименьшей критической нагрузке будет соответствовать потеря устойчивости арки в точке симметричной неустойчивой бифуркации. Соответствующие петли неустойчивых послебифуркационных равновесий показаны на рис. 5б. Безразмерные критические нагрузки для арки в предельной точке и точке бифуркации определяются соотношениями:

$$P_{кр}^* = 1 \pm \sqrt{\frac{1(1-s)^3}{27s^2}}; P_{кр}^{биф} = 1 \pm 3\sqrt{1-4s}.$$

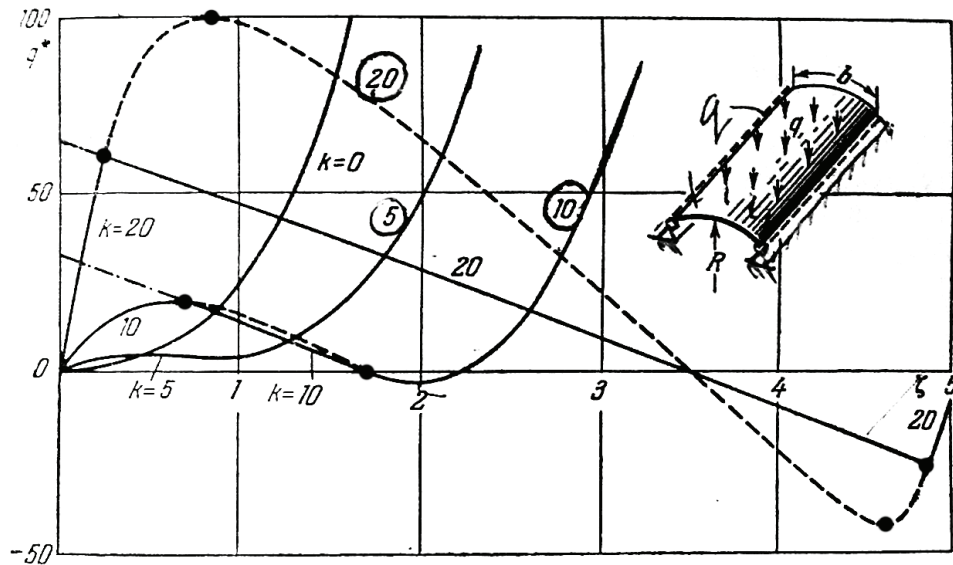


Рисунок 9. Кривые равновесий и точки бифуркации для удлиненной пологой цилиндрической панели.

P – безразмерный параметр нагрузки:

$$P = \frac{P_0 l^4}{\pi^4 E J f}.$$

Похожая картина поведения точек бифуркации имеет место и в случае потери устойчивости пологой удлиненной цилиндрической панели, шарнирно закрепленной вдоль прямолинейных краев, и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой [13] (рис. 9). Пока параметр

$$k = b^2 / R \delta$$

меньше 5, панель не теряет устойчивости симметричного равновесия. При $k=5$ появляется двойная предельная точка и в пределах от $k=5$ до $k \approx 9$ потеря устойчивости панели происходит в предельной точке. При некотором значении k , близком к $k \approx 8$, на неустойчивой ветви равновесий (рис. 6) рождается двукратная точка бифуркации. С увеличением k эта двукратная точка бифуркации расщепляется в две простых, расходящихся друг от друга вдоль неустойчивой ветви, и при $k \approx 10$ верхняя точка бифуркации достигает верхней предельной

точки. Начиная с этого момента рассматриваемая панель теряет устойчивость в точках бифуркации (симметричных и неустойчивых). Соответствующие петли неустойчивых бифуркационных равновесий показаны на рис. 9. Отметим, что развитие точек бифуркации удлиненной цилиндрической панели фактически повторяет развитие этих точек для синусоидальной арки.

В заключение отметим, что в работе Керра и Зейферта [14] при исследовании устойчивости круговой защемленной арки под действием радиальной нагрузки (с учетом геометрической нелинейности), было установлено, что при достижении параметра $k=5,024$ рождается двукратная точка бифуркации. Однако, рождение бифуркационного параметра еще не означает начала потери устойчивости арки в точке бифуркации. На самом деле упомянутая двукратная точка бифуркации рождается на неустойчивой ветви равновесий, и для того, чтобы перейти через предельную точку необходимо увеличить параметр k до значения $k=5,18$. Только после этого минимальной критической нагрузке будет соответствовать потеря устойчивости арки в симметрично точке бифуркации.

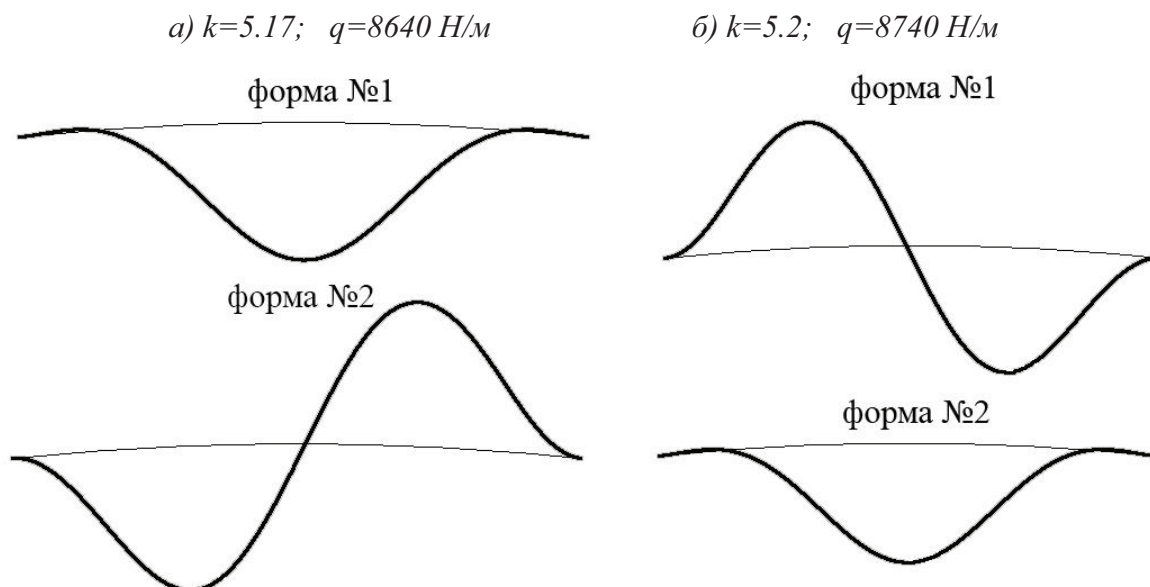


Рисунок 9. Собственные формы потери устойчивости защемленной арки по действием радиальной нагрузки.

Об этом свидетельствуют первые собственные формы потери устойчивости для такой арки (рис. 10), вычисленные при параметрах $k=5,17$ и $k=5,2$.

При параметре $k=5,17$ первая собственная форма симметричная, она соответствует потере устойчивости в предельной точке. Вторая форма – кососимметричная. При значении параметра $5,2$ для предкритического равновесия первая форма уже кососимметричная, что указывает на бифуркационную потерю устойчивости. Еще раз подчеркнем, что момент рождения точек бифуркации не означает немедленную смену типа потери устойчивости. Такое изменение произойдет только в том случае, если эта точка бифуркации рождается на устойчивой ветви кривой равновесий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Spence A., Jepson A.D.** The Numerical Computation of Turning Points of Nonlinear Equations. // The Numerical Treatment of Integral Equations, eds. C.T.H. Baker and G.F. Miller, Academic Press, 1982, pp. 169-183.
2. **Jepson A.D., Spence A.** Folds in Solutions of Two Parameter Systems and Their Calculations, Part I. // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1985, 22, pp. 347-368.
3. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Жуков К.А.** Метод неособенных продолжений в задачах устойчивости нелинейно деформируемых систем. // Строительная механика и расчет сооружений, 1989, №5, с. 68-72.
4. **Deml M., Wunderlich W.** Direct Evaluation of the Worst Imperfection Shape in Shell Buckling. // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1997, 149, pp. 201-222.
5. **Galishnikova V.V., Dunaiski P., Pahl P.J.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames. // Stellenbosch (Republic of South Africa), SUNMeDIA, 2009, pp. 382.
6. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегищев М.М.** О критических и послекритических равновесиях в задачах устойчивости упругих систем. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015, №5, с. 47-54.
7. **Wriggers P., Simo J.C.** A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points. // International

- Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30(1), pp. 155-176.
8. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.** Исследование устойчивости круговых двухшарнирных арок с учетом влияния начальных несовершенств. // Строительная механика и расчет сооружений, 2009, №1, с. 17-23.
9. **Томпсон Дж.М.Т.** Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
10. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.** О явлении потери устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки. Часть 1: О после-критическом равновесии оболочки. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 3, pp. 58-72.
11. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф. Часть 1. – М.: Мир, 1984. – 350 с.
12. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы Том 1: Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем. – М.: СКАД СОФТ, 2010. – 681 с.
13. **Вольмир А.С.** Гибкие пластинки и оболочки. – М. Изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
14. **Kerr A.D., Soifer M.T.** The Linearization of the Prebuckling State and its Effect on the Determined Instability Loads // Journal of Applied Mechanics, 1969, Volume 36(4), pp 775-783.
3. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Zhukov K.A.** Metod Neosobennyh Prodolzhenij v Zadachah Ustojchivosti Nelinejno Deformiruemyh System [The Method of Nonsingular Extending's in Problems of Stability of Nonlinearly Deformable Systems]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 1989, No. 5, pp. 68-72.
4. **Deml M., Wunderlich W.** Direct Evaluation of the Worst Imperfection Shape in Shell Buckling. // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1997, 149, pp. 201-222.
5. **Galishnikova V.V., Dunaiski P., Pahl P.J.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames. // Stellenbosch (Republic of South Africa), SUNMeDIA, 2009, pp. 382.
6. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Begichev M.M.** O Kriticheskikh i Poslekriticheskikh Ravnovesijah v Zadachah Ustojchivosti Uprugih Sistem [On critical and postcritical equilibria in stability problems of elastic systems]. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij, 2015, No. 5, pp. 47-54.
7. **Wriggers P., Simo J.C.** A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30(1), pp. 155-176.
8. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Begichev M.M.** Issledovanie Ustojchivosti Krugovyh Dvuhsharnirnyh Arok s Uchetom Vlijanija Nachal'nyh Nesovershenstv [Stability Analysis of Circular Two-Hinged Arches with Allowance for the Influence of Initial Imperfections]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2009, No. 1, pp. 17-23.
9. **Tompson Dzh.M.T.** Neustojchivosti i Katastrofy v Nauke i Tehnike [Instability and Catastrophe in Science and Technology]. Moscow, Mir, 1985, 254 p.
10. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Begichev M.M.** O Javlenii Poteri Ustojchivosti Prodol'no Szhatoy Krugovoj Cilindricheskoj Obolochki. Chast' 1: O Poslekriticheskom

REFERENCES

1. **Spence A., Jepson A.D.** The Numerical Computation of Turning Points of Nonlinear Equations. In The Numerical Treatment of Integral Equations, eds. C.T.H. Baker and G.F. Miller, Academic Press, 1982, pp. 169-183.
2. **Jepson A.D., Spence A.** Folds in Solutions of Two Parameter Systems and Their Calculations, Part I. // SIAM Journal on

- Ravnovesii Obolochki [On the Phenomenon of Loss of Stability of a Longitudinally Compressed Circular Cylindrical Shell. Part 1: On the Postcritical Equilibrium of the Shell]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 3, 2016, pp. 58-72.
11. **Gilmor R.** Prikladnaja teorija katastrof. Chast' 1. M.: Mir. – 1984. – 350 s.
 12. **Perel'muter A.V., Slivker V.I.** Ustojchivost' Ravnovesija Konstrukcij i Rodstvennye Problemy Tom 1: Obshhie Teoremy. Ustojchivost' Otdel'nyh Jelementov Mehanicheskikh Sistem [Stability of Structural Equilibrium and Related Problems Volume 1: General Theorems. Stability of Individual Elements of Mechanical Systems]. Moscow, SKAD SOFT, 2010, 681 p.
 13. **Vol'mir A.S.** Gibkie Plastinki i Obolochki [Flexible plates and shells]. Moscow, Izd-vo Tehniko-teoreticheskoy literatury, 1956, 419 p.
 14. **Kerr A.D., Soifer M.T.** The Linearization of the Prebuckling State and its Effect on the Determined Instability Loads // Journal of Applied Mechanics, 1969, Volume 36(4), pp 775-783.
-

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 972-49-81

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика»

Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax +7(499)972-49-81.

Sergey B. Kositsyn, Dr.Sc., Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Maxim M. Begichev, Ph.D., Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАНОВЫХ НАГРУЗОК И РАСЧЕТНЫЕ СОЧЕТАНИЯ УСИЛИЙ

А.В. Перельмутер

НП ООО SCAD Soft, г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: Обращается внимание на то, что расчетные сочетания нагрузок и расчетные сочетания усилий, вызванных этими нагрузками, имеют различную вероятность реализации. Это иллюстрируется примером крановых нагрузок, для которых в традиционных расчетах не учитываются такие случайные факторы, как положение моста крана и положение тележки на крановом мосту. Анализ выполнен при помощи статистического моделирования. Представлены характерные результаты такого моделирования. Выдвигается предложение об особом способе включения в расчетные формулы коэффициентов сочетания нагрузок, при котором включение в комбинацию временной нагрузки выполняется с комбинационным значением, уменьшающимся при включении каждой новой нагрузки.

Ключевые слова: крановая нагрузка, расчетное сочетание усилий, статистическое моделирование, обеспеченность

CRANE LOAD STATISTICAL MODELLING AND DESIGN COMBINATIONS OF THE INTERNAL FORCES

Anatoly V. Perelmuter

SCAD Soft Ltd., Kiev, UKRAINE

Abstract: Attention has been paid to the fact that design load case combinations and design combinations of the internal forces caused by these loads have got a different probability of implementation. This fact has been illustrated by the example of the crane loads, where the traditional calculation does not take into account such random factors as position of the crane bridge and position of the trolley on the crane bridge. Analysis has been performed using statistical modelling. Results of the modelling has been also presented. It has been suggested that there is a specific way to include load combination factors into the calculation formulas by which inclusion of temporary load in a design load case combination should be performed with combinational value of the load combination factor decreased when including each new temporary load.

Keywords: crane load, design combinations of internal forces, statistical modelling, security probability

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование крановых нагрузок на конструкции производственных зданий имеет давнюю историю [7], и большинство работ, выполненных по данной тематике, опираются на результаты натурных наблюдений. Поскольку целью таких исследований была выработка рекомендаций для норм проектирования, то, естественно, что наблюдения производились в зданиях с наиболее интенсивным режимом использования кранов. Такими зданиями в основном были цеха заводов черной металлургии [2, 7]. Статистическая обработка результатов натурных из-

мерений, на основании которой были получены практические рекомендации по нормированию крановых нагрузок, касалась, в основном, вопроса о нагрузках, которые кран передает на подкрановый рельс. На уровне головки рельса вероятностная картина заканчивалась, и все дальнейшие результаты уже получались детерминированным способом. А перенос полученных результатов на другие случаи обосновывался тем соображением, что таким образом получается решение в запас надежности, хотя вопрос о величине такого запаса оставался открытым.

В настоящей работе сделана попытка получить соответствующую оценку на основе вероятностного анализа проблемы. Точные вероятностные постановки задач о действии случайных нагрузок на строительные конструкции очень редко поддаются аналитическому решению. Здесь зачастую используются различные упрощающие предположения (например, гипотеза о нормальном распределении) или игнорируются некоторые элементы случайности. В качестве альтернативы естественно использовать численное статистическое моделирование, с помощью которого можно сделать расчетную модель более реалистичной.

Таким способом в свое время было выполнено исследование коэффициентов сочетаний усилий от вертикальных крановых нагрузок для подкрановых балок и колонн крайних и средних рядов [3, 6]. При этом случайными величинами считались только положение первого мостового крана в пролете и положение второго крана относительно первого. Кроме того, вычислительные возможности того времени были ограниченными и число случайных испытаний в каждой задаче было относительно невелико (всего 1000). Выполненные в те же годы аналогичные исследования [12], [13], также основывались на относительно небольшом числе случайных испытаний. Это давало пищу для некоторых сомнений в достаточной обоснованности полученных в свое время результатов и послужило определенным стимулом к выполнению настоящего исследования, в котором были задействованы современные вычислительные возможности.

2. РАСЧЕТНЫЕ СОЧЕТАНИЯ НАГРУЗОК ИЛИ РАСЧЕТНЫЕ СОЧЕТАНИЯ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Требования к прочности любого сечения формулируются в виде сопоставления

нагрузочного эффекта F и несущей способности R (естественно, выраженных в одних и тех же единицах). При анализе безотказности, когда отыскивается вероятность выполнения неравенства $F \leq R$, вероятностные характеристики нагрузочного эффекта чаще всего отождествляются с вероятностными характеристиками нагрузки. Это положение является принципиально ошибочным, хотя на эту ошибку почему-то не принято обращать внимание.

Но ведь расчетная комбинация нагрузок или же расчетная комбинация внутренних реакций системы (усилий, напряжений, перемещений) — разные вещи, их вероятности могут отличаться на несколько порядков. Например, для крановой нагрузки:

- локальное давление в стенке подкрановой балки реализуется от действия одного крана — вероятность равна вероятности реализации максимального давления колеса;
- расчетная нагрузка для поперечного сечения большепролетной подкрановой балки реализуется от действия двух кранов, и ее вероятность равна вероятности реализации одновременного возникновения максимальных давлений на колесо у разных кранов в сочетании с вероятностью установки колес крана в невыгодную позицию на линии влияния;
- расчетная вертикальная нагрузка на колонну — то же самое, но следует рассматривать случай одновременного совпадения максимальных давлений на колесо и невыгодного позиционирования уже четырех кранов;
- расчетная горизонтальная нагрузка на колонну — реализация относится к вероятности определенной установки двух кранов на линию влияния, плюс вероятность одновременного торможения в одну сторону тележек с максимально возможным грузом или одновременного появления боковых сил с совпадающими для всей четверки кранов направлениями действия.

Заметим, что распределение веса поднимаемых грузов может сильно отличаться для кранов с четким технологическим циклом работы, например такими, как в разливочном пролете мартеновского цеха, и для кранов с широкими условиями использования, такими как в цехах машиностроительного предприятия [7]. В первом случае разброс значений веса очень мал и можно принимать этот параметр как детерминированный, во втором случае существует некоторая статистика весов поднимаемого груза. В настоящей работе рассматривался второй случай.

Учет «пространственной вероятности» может заметно изменить результаты анализа надежности. Например, частотная характеристика кранового воздействия сильно зависит от того, какое внутреннее усилие в конструктивной схеме рассматривается. Вряд ли можно полагать, что эффективная частота появлений напряжений от крановой нагрузки для расчетного сечения колонны

имеет порядок 100 1/час [0, стр. 95], который является характерным для напряжений в расчетном сечении подкрановой балки.

Все эти соображения учитывались при численном моделировании, когда для каждого испытания определялись давления на колеса крана, изгибающий момент в середине пролета подкрановой балки и усилия передаваемые на колонну.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК ОТ МОСТОВЫХ КРАНОВ

В предпринятом исследовании случайными величинами для каждого из кранов полагались не только позиции кранов (X_3, X_4, X_7, X_8) но еще и веса поднимаемых грузов (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), а также положение тележек на мосту крана (X_1, X_2, X_5, X_6). Предполагалось, что в двух смежных пролетах работают по два крана, и каждый из них манипулирует независимо (рис. 1).

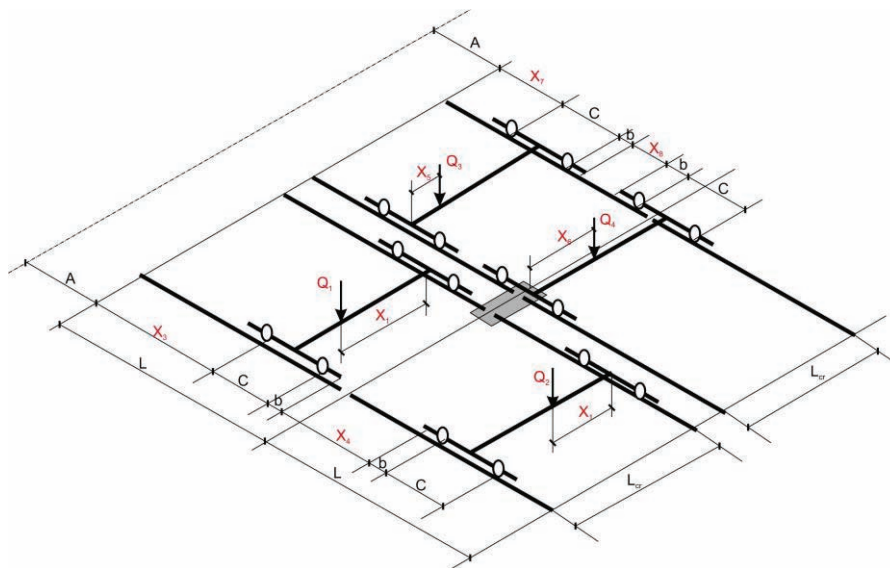


Рисунок 1. Расчетная схема.

На каждом шаге испытаний осуществлялся случайный выбор значений для всех упомянутых случайных факторов. Предполагалось, что веса поднимаемых грузов Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 имеют нормальное распределение

со средним значением, равным половине номинальной грузоподъемности крана, и с коэффициентом вариации $V=0,3$.

Параметры X_1, X_2, X_5 и X_6 , характеризующие положение тележки на мосту крана,

считались равномерно распределенными на интервале от 0,0 до L_{cr} , а параметры X_3 , X_4 , X_7 и X_8 , определяющие положение кранов на подкрановой балке, считались равномерно распределенными величинами на участке длиной $A+2L$ (см. рис. 1).

Для того, чтобы к результатам моделирования можно было применить методы статистического анализа необходима их статистическая устойчивость, т.е. необходимо многократное повторение шагов. Представленные далее результаты получены при числе испытаний, равном одному миллиону. Выборочный контроль с использованием десяти миллионов испытаний подтвердил статистическую устойчивость результатов. В качестве примера приведем данные о моделировании работы кранов грузоподъемностью 50/12,5 т, установленных в здании с пролетами 30 м с шагом поперечных рам каркаса 12 м. По ГОСТ 25711-83 пролет такого крана $L_{cr}=28,5$ м, длина крана $B=6800$ мм, база крана $C=5600$ мм, масса кранового моста $G=42,3$ т, масса тележки $g=13,5$ т, давление колеса $P=46$ т.

Обычный детерминированный расчет дает следующие результаты. При работе двух кранов в пролете на разрезной подкрановой балке пролетом $L=12$ м можно разместить только три колеса. Чтобы воспользоваться правилом Винклера [4] для отыскания максимального изгибающего момента, следует найти положение равнодействующей, которая равна $3P$. Исходя из условия $3Px=P(1,2+5,6)$ получаем $x=2,233$ м. Расстояние от равнодействующей до ближайшего колеса $2,333-1,2=1,033$ м (рис. 2.а). Неблагоприятное расположение трех колес на балке реализуется, когда равнодействующая и ближайшее колесо будут отдалены от середины балки на $1,033/2=0,567$ м (рис. 2.б). При этом изгибающий момент в балке достигает значения 249,52 тм. Невыгодная установка нагрузки для определения давления на колонну (рис. 2.с) приводит к значению реакции 132,29 т (при учете еще одной пары кранов в смежном пролете - 264,58 т).

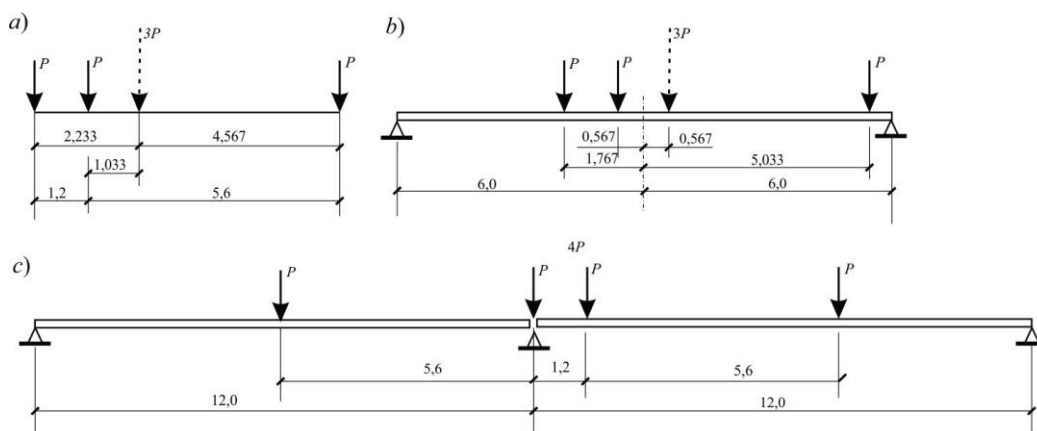


Рисунок 2. Установка кранов в невыгодную позицию: а – положение равнодействующей давления трех колес, б – установка для определения момента в балке по правилу Винклера, с – установка для определения давления на колонну

Результаты статистического моделирования представлены ниже в виде полигонов нормированных значений. Нормировка производилась по отношению к данным детерминированного расчета, т.е. значения давления от колеса были

отнесены к величине $P=46$ т, значения изгибающих моментов — к величине $M=249,52$ тм, а значения нагрузки на колонну — к величине 264,58 т.

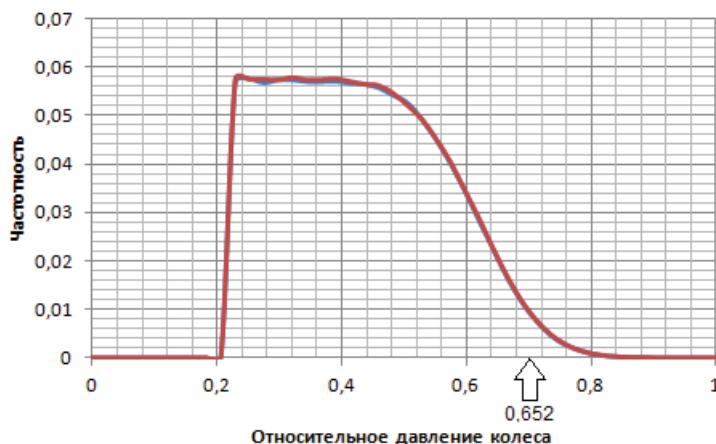


Рисунок 3. Полигон нагрузок на колесо.

Полигон распределения давлений от колеса (рис. 3) по своему очертанию очень близок к полигонам, показанным в работе [7, стр. 170], где такие полигоны построены на основании статистической обработки натурных измерений.

Максимальное зафиксированное значение давления колеса равнялось 44,43 т. Нормативному значению нагрузки, которое должно иметь обеспеченность 95%, соответствует величина относительного давления 0,652, что свидетельствует о заметном завышении нормируемых значений нагрузок.

Полигоны распределения изгибающих моментов в подкрановой балке (рис. 4) и вертикальной нагрузки на колонну (рис.5) ха-

рактеризуются тем, что в окрестности нулевого значения сосредоточено очень большое число испытаний (порядка 53% для момента от одного крана и порядка 66% для момента от двух кранов). Поскольку нас мало интересуют нулевые значения, то для наглядности соответствующие графики усечены.

Вызванному нагрузкой от двух кранов нормативному значению изгибающего момента в подкрановой балке обеспеченности 95%, соответствует относительная величина 0,294. Максимальное значение момента от действия двух кранов, зафиксированное миллионе испытаний, составило 138 тм, что примерно вдвое меньше детерминированного значения.

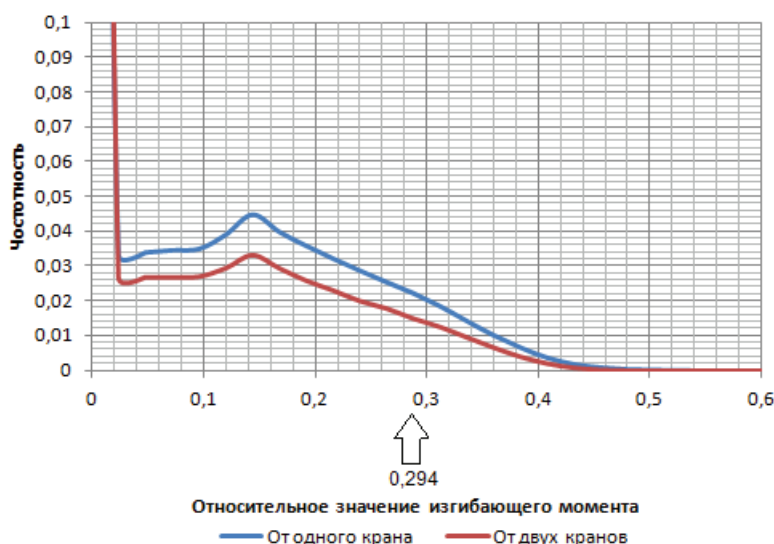


Рисунок 4. Полигон изгибающих моментов (вертикальная ось урезана).

Для результатов моделирования нагрузки на колонну рассматривалось воздействие одного, двух и четырех кранов. Соответствующие полигоны представлены на рис. 5. Здесь также большое число испытаний

(около 18%) показало нулевое значение. Нагрузка на колонну от четырех кранов, имеющая обеспеченность 95%, составила 15,63 т, что соответствует примерно 6% от детерминированного значения.

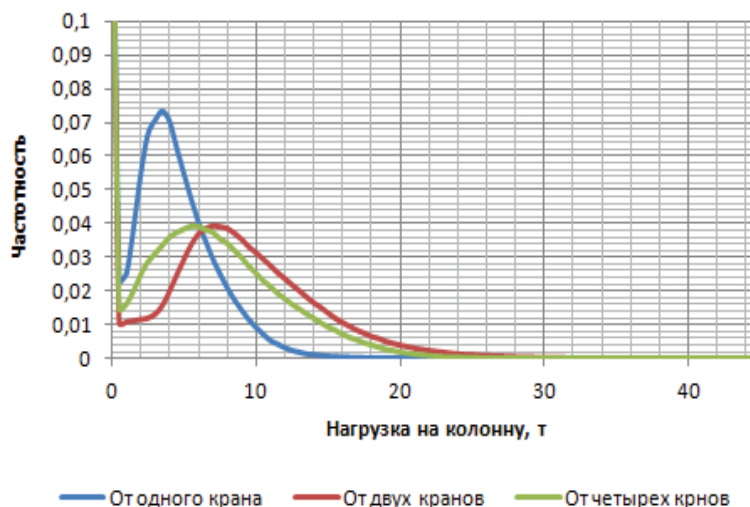


Рисунок 5. Полигон вертикальных нагрузок на колонну (вертикальная ось урезана).

Заметим, что если значение давления на колесо крана, полученные в результате статистического моделирования отклоняются от детерминированного значения примерно на 35%, то для моментов в балке и для давления на колонну расхождение заметно увеличивается. Оно растет по мере «отдаленности» рассматриваемого внутреннего усилия от давления колеса крана на рельс. Это есть результат пренебрежения вкладом «пространственной вероятности», когда используется предположение о том, что давления всех колес крана имеют максимальные значения и при этом одновременно занимают невыгодную позицию на конструкции. Как показывает статистическое моделирование, вероятность реализации этого предположения чрезвычайно мала.

4. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О КОЭФФИЦИЕНТАХ СОЧЕТАНИЯ

Полученные результаты имитационного моделирования свидетельствуют о заметном влиянии числа независимых нагрузок, учитываемых в расчете, на обеспеченность окончательного результата. Такой эффект не обязательно связан с

нагрузками от мостовых кранов, очевидно, что он относится к вероятности совместного появления случайных нагрузок любой природы, и этот факт следовало бы каким-то образом учитывать при назначении коэффициентов сочетаний.

Для комбинации двух воздействий в Еврокоде-0 используется правило Туркстра. В соответствии с этим правилом принято, что когда одна нагрузка принимает свой экстремум в течение опорного времени T , то для этого состояния рассматривается распределение во времени другой нагрузки. И если ее распределение является нормальным, то это правило приводит к коэффициенту комбинационного действия ψ_0 . Очень близкая рекомендация реализована в последних редакциях Российских норм.

И Еврокод-0 и СП 20.13330.2011 исходят из того, что при включении некоторой временной загрузки в расчетную комбинацию используется не ее расчетное значение $\gamma_{f,i}P_i$, а комбинационное значение $\gamma_{f,i}\psi_{0,i}P_i$. Оно суммируется с полным расчетным значением

«ведущей» загрузки $\gamma_{f,1}P_1$ и таким способом учитывается малая вероятность одновременной реализации расчетных значений у двух независимых временных нагрузок с номерами 1 и i . Но здесь процесс учета малой вероятности совпадения редко реализуемых расчетных значений вдруг обрывается и сколько бы таких нагрузок не попадало в расчетную комбинацию расчет идет по формуле

$$S_d = \gamma_{f,1}P_1 + \sum_{i=2}^n \gamma_{f,i}\psi_{0,i}P_i.$$

Представляется более логичным использовать суммирование типа

$$\begin{aligned} S_d &= \gamma_{f,1}P_1 + \psi_{0,2} \left\{ \gamma_{f,2}P_2 + \psi_{0,3} \left[\gamma_{f,3}P_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \psi_{0,4} \left(\gamma_{f,4}P_4 + \dots \right) \right] \right\} = \\ &= \gamma_{f,1}P_1 + \psi_{0,2}\gamma_{f,2}P_2 + \psi_{0,2}\psi_{0,3}\gamma_{f,3}P_3 + \\ &\quad + \psi_{0,2}\psi_{0,3}\psi_{0,4}\gamma_{f,4}P_4 + \dots, \end{aligned}$$

основанное на том, что совместное действие первой пары нагрузок является некоторой комплексной нагрузкой, для которой рассматривается сочетание с третьей случайной нагрузкой, совместное действие первой тройки нагрузок является такой же комплексной нагрузкой, сочетающейся с четвертой нагрузкой и т.д.

Здесь видно, что включение в комбинацию временной нагрузки выполняется с комбинационным значением, уменьшающимся при включении каждой новой нагрузки, что более правильно отображает вероятностную картину события. Так, например, для семи вариантов нагружения, которые для простоты будем полагать равноценными по степени влияния (каждая из них вносит в суммарное напряженное состояние одну и ту же величину σ_0), мы имели бы по СП 20.13330.2011 суммарное напряжение

$$(1,0 + 0,9 + 5 \times 0,7) \sigma_0 = 5,4 \sigma_0,$$

а по предлагаемому варианту

$$\begin{aligned} &(1,0 + 0,9 + 0,9 \times 0,7 \\ &+ 0,9 \times 0,7^2 + 0,9 \times 0,7^3 + 0,9 \times 0,7^4 + 0,9 \times 0,7^5) \sigma_0 = \\ &3,363 \sigma_0. \end{aligned}$$

Расхождение весьма существенное, а ведь во многих случаях в расчетную комбинацию входит значительно большее число временных нагрузок.

Нетрудно видеть, что при различающихся вкладах нагрузок в суммарный результат подсчет по предлагаемой формуле будет зависеть от последовательности включения нагрузок в расчетную комбинацию. Наиболее неблагоприятный вариант получится, когда последовательность включения соответствует величине вкладов. Иными словами, первой рассматривается нагрузка с наибольшим вкладом, второй следующая по величине вклада и т.д.

Против чисто вероятностного похода к учету возможных сочетаний временных нагрузок зачастую выдвигают довод типа «но ведь такое возможно». В большинстве случаев это связано с неким предубеждением против «подмены логического анализа игрой в рулетку», но существуют ситуации, когда с упомянутым доводом следует считаться.

Например, возможна спаренная работа двух мостовых кранов поднимающих с помощью специальной траверсы общий груз. Случаи такого рода обычно являются весьма редкими, и для соответствующей исключительной расчетной ситуации можно было бы принять, что такую комбинацию можно вводить в расчетное сочетание только с постоянными и длительно действующими нагрузками, подобно тому, как это делается для аварийных сочетаний.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании результатов, полученных при численном моделировании, можно сделать следующие выводы:

1. Используемая в проектных расчетах концепция расчетных сочетаний нагрузок во многих случаях должна быть заменена концепцией расчетных сочетаний внутренних усилий. Неэквивалентность этих понятий продемонстрирована в статье.
2. Значения крановых нагрузок и коэффициентов сочетаний таких нагрузок, представленные в нормах проектирования, по-видимому, являются сильно завышенными. Имеется возможность с С использованием методов статистического моделирования выполнить цикл исследований, направленных на уточнение норм.
6. **Нищета С.А.** Исследование воздействий мостовых кранов на стальные конструкции промышленных зданий. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1982. – 18 с.
7. **Пичугин С.Ф.** Крановые нагрузки на строительные конструкции. – Полтава: ООО АСМИ, 2014. – 504 с.
8. **Ржаницын А.Р.** Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
9. **Dymond J.S.** Reliability Based Codification for the Design of Overhead Travelling Crane Support Structures. Matieland, University of Stellenbosch, 2005, 355 p.
10. **Dunaiski P.E., Barnard H., Krige G., Mackenzie R.** Review of Provision of Loads to Structures Supporting Overhead Travelling Cranes. // Proceedings of the International Conference on Structural Engineering Mechanics and Computation, 2001, pp. 1321-1328.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гордеев В.Н., Лантух-Лященко А.И., Махинько А.В., Пашинский В.А., Перельмутер А.В., Пичугин С.Ф.** Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во Ассоциации строительных вузов, ДМК Пресс, 2011. – 514 с.
2. **Кикин А.И., Васильев А.А., Кошутин Б.Н., Уваров Б.Ю., Вольберг Ю.Л.** Повышение долговечности металлических конструкций промышленных зданий. – М.: Стройиздат, 1984. – 301 с.
3. **Кошутин Б.Н., Кунин С.А., Нищета С.А.** Исследование вертикальных и горизонтальных крановых воздействий от мостовых кранов методом статистического моделирования. // Облегченные конструкции покрытий зданий, Ростов-на-Дону, 1979, с. 195-199.
4. **Кудишин Ю.И., Беленя Е.И., Игнатьева В.С. и др.** Металлические конструкции. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 688 с.
5. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Академия, 2006. – 368 с.
11. **Grigorov O., Stepochkina O.** Motion of Cranes of Bridges Type Simulation in the MS EXCEL Environment. // Advanced Logistic Systems, 2014, Vol. 8, No. 1, pp. 33–40.
12. **Köppe U.** Nutzlastkollektive von Kranen. // Hebezeuge und Fördermittel, 1981, Vol. 21, No. 2, pp. 36-39.
13. **Pasternak H., Rozmarynowski B., Wen Y.-K.** Crane Load Modelling. // Structural Safety, 1996, Vol. 17, pp. 205-224.
14. **Wen Y.-K.** Structural Load Modelling and Combination for Performance and Safety Evaluation. Amsterdam, Elsevier, 1990, 219 p.
15. **Warren J.S., Retief J.V., Dunaiski P.E.** Reliability Models of Overhead Traveling Crane Loading for Code Calibration. // Proceedings of the Ninth International Conference on Structural Safety and Reliability, 2005, pp. 811-818.

REFERENCES

1. **Gordeev V.N., Lantuh-Ljashhenko A.I., Mahin'ko A.V., Pashinskij V.A., Perel'muter A.V., Pichugin S.F.** Nagruzki i Vozdejstvija na Zdanija i Sooruzhenija [Loads and Impacts on Buildings and Structures]. Moscow, Izd-vo SKAD SOFT, Izd-vo Asociacii stroitel'nyh vuzov, DMK Press, 2011, 514 p.
2. **Kikin A.I., Vasil'ev A.A., Koshutin B.N., Uvarov B.Ju., Vol'berg Ju.L.** Povyshenie Dolgovechnosti Metallicheskih Konstrukcij Promyshlennyh Zdanij [Increasing the Durability of Steel Structures in Industrial Buildings]. Moscow, Strojizdat, 1984, 301 p.
3. **Koshutin B.N., Kunin S.A., Nishheta S.A.** Issledovanie Vertikal'nyh i Gorizonta'nyh Kranovyh Vozdejstvij ot Mostovyh Kranov Metodod Statisticheskogo Modelirovanija [Investigation of Vertical and Horizontal Crane Impacts from Power Cranes Using Statistical Modeling]. Rostov-na-Donu, Oblegchennye konstrukcii pokrytij zdanij, 1979, pp. 195-199.
4. **Kudishin Ju.I., Belenja E.I., Ignat'eva V.S. et al.** Metallicheskie konstrukcii [Steel Structures]. Moscow, Izdatel'skij centr «Akademija», 2011, 688 p.
5. **Mihajlov G.A., Vojtishek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo [Numerical Statistical Modeling. Monte Carlo Methods]. Moscow, Akademija, 2006, 368 p.
6. **Nishheta S.A.** Issledovanie Vozdejstvij Mostovyh Kranov na Stal'nye Konstrukcii Promyshlennyh Zdanij [Analysis of the Impact of Bridge Cranes on Steel Structures of Industrial Buildings]. Abstract of Ph.D. thesis. Moscow, 1982, 18 p.
7. **Pichugin S.F.** Kranovye Nagruzki na Stroitel'nye Konstrukcii [Crane Loads on Building Structures]. Poltava: OOO ASMI, 2014, 504 p.
8. **Rzhanicyn A.R.** Teorija Rascheta Stroitel'nyh Konstrukcij na Nadezhnost' [Theory of Reliability Analysis of Building Structures]. Moscow, Strojizdat, 1978, 239 p.
9. **Dymond J.S.** Reliability Based Codification for the Design of Overhead Travelling Crane Support Structures. Matieland, University of Stellenbosch, 2005, 355 p.
10. **Dunaiski P.E., Barnard H., Krige G., Mackenzie R.** Review of Provision of Loads to Structures Supporting Overhead Travelling Cranes. Proceedings of the International Conference on Structural Engineering Mechanics and Computation, 2001, pp. 1321-1328.
11. **Grigorov O., Stepochkina O.** Motion of Cranes of Bridges Type Simulation in the MS EXCEL Environment. Advanced Logistic Systems, 2014, Vol. 8, No. 1, pp. 33-40.
12. **Köppe U.** Nutzlastkollektive von Kranen. Hebezeuge und Fördermittel, 1981, Vol. 21, No. 2, pp. 36-39.
13. **Pasternak H., Rozmarynowski B., Wen Y.-K.** Crane Load Modelling. Structural Safety, 1996, Vol. 17, pp. 205-224.
14. **Wen Y.-K.** Structural Load Modelling and Combination for Performance and Safety Evaluation. Amsterdam, Elsevier, 1990, 219 p.
15. **Warren J.S., Retief J.V., Dunaiski P.E.** Reliability Models of Overhead Traveling Crane Loading for Code Calibration. Proceedings of the Ninth International Conference on Structural Safety and Reliability, 2005, pp. 811-818.

Перельмутер Анатолий Викторович, иностранный член РААСН, профессор, доктор технических наук, НПО СКАД Софт, 03037, Украина, г.Киев, ул. Провсящения, дом 3а, офис 2.
e-mail: anatolyperelmutter@gmail.com

Anatolii V. Perelmutter, Foreign member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor, SCAD Soft, Ltd, Kiev, Ukraine
e-mail: anatolyperelmutter@gmail.com

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-2-145-153

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Санкт-Петербург, РОССИЯ

Аннотация: В работе рассматриваются пологие ортотропные оболочки двоякой кривизны, квадратные в плане, при динамическом нагружении. Приводятся соотношения математической модели их деформирования с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов и ортотропии материала. Для формирования системы ОДУ применяется метод Л. В. Канторовича. Полученная система решается методом Розенброка. Показана верификация предложенной методики для изотропных оболочек. Для нескольких вариантов ортотропных оболочек из стеклопластика и углепластика проведено исследование их устойчивости и получены значения критических нагрузок.

Ключевые слова: оболочечные конструкции, пологие оболочки, ортотропия, динамическая устойчивость, динамическое нагружение

METHODOLOGY RESEARCH OF STABILITY OF SHALLOW ORTHOTROPIC SHELLS OF DOUBLE CURVATURE UNDER DYNAMIC LOADING

Alexey A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,
Saint Petersburg, RUSSIA

Abstract: The paper deals with shallow orthotropic shells of double curvature, square in plan, under dynamic loading. Outlines the ratios of the mathematical model of deformation considering the geometric nonlinearity, transverse shear and orthotropy material. For the formation of the ODE system is used method of Kantorovich. The resulting system is solved by the method of Rosenbrock. It is shown the verification of the proposed method for isotropic shells. For several options orthotropic shells made of fiberglass and carbon fiber studied their stability and obtained values of critical loads.

Keywords: shell structures, shallow shells, orthotropy, dynamic stability, dynamic loading

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение динамического поведения конструкций имеет существенное значение для различных областей промышленности, в том числе для судостроения, машиностроения и строительства. Наиболее изученным является поведение оболочечных конструкций при динамическом нагружении для однослойных оболочек из изотропных материалов [1–4]. В

последнее время большой интерес представляют конструкции из композиционных материалов (стеклопластик, графитопластик, углепластик и др.), и исследование поведения оболочек из таких материалов является актуальной задачей [5–12]. Основными задачами исследования оболочечных конструкций при динамическом нагружении являются исследования их устойчивости, прочности и колебаний, о чем свидетельствуют обзорные статьи и монографии [13–20].

Целью данной работы является разработка методики исследования процесса потери устойчивости пологих ортотропных оболочек при динамическом нагружении.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Будем рассматривать пологие ортотропные оболочечные конструкции двоякой кривизны, квадратные в плане (Рисунок 1), шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру и находящиеся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки q . Нагрузка направлена по нормали к срединной поверхности, линейно зависит от времени t и задается в виде

$$q = A_1 t,$$

где A_1 – скорость нагружения.

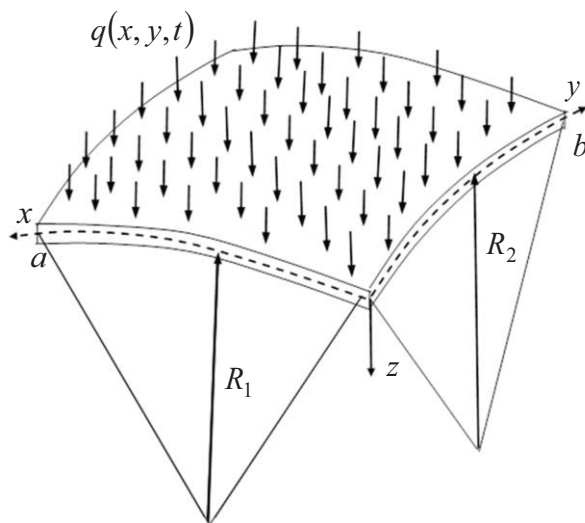


Рисунок 1. Схематичное изображение полой оболочечной конструкции двоякой кривизны, квадратной в плане.

Математическая модель деформирования таких конструкций строится из трех групп соотношений: геометрических (связывающих перемещения и деформации), физических (связывающих напряжения и деформации) и функционала полной энергии деформации.

Будем рассматривать геометрически нелинейный вариант модели, также учитывающий ортотропию материала и поперечные сдвиги (модель типа Тимошенко). В таком случае, неизвестными функциями будут три функции перемещений

$$U = U(x, y, t), \quad V = V(x, y, t), \quad W = W(x, y, t)$$

и две функции углов поворота нормали

$$\Psi_x = \Psi_x(x, y, t), \quad \Psi_y = \Psi_y(x, y, t),$$

а геометрические соотношения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \theta_1 \theta_2, \\ \chi_1 &= \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}, \quad 2\chi_{12} = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; γ_{xy} – деформация сдвига в плоскости xOy ; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ – функции изменения кривизны и кручения;

$$k_x = 1/R_1, \quad k_y = 1/R_2$$

– главные кривизны оболочки вдоль осей x и y ; R_1, R_2 – главные радиусы кривизны;

$$\theta_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right). \quad (2)$$

Физические соотношения при линейно-упругом деформировании для ортотропного материала при плоском напряженном состоянии будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right].\end{aligned}\quad (3)$$

Полная энергия деформации полой оболочки двоякой кривизны может быть записана с помощью функционала:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (K - E_p) dt, \quad (4)$$

где K – кинетическая энергия деформации системы;

$$E_p = \Pi - A$$

– функционал статической задачи, равный разности потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил:

$$\begin{aligned}E_p &= \frac{E_1}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_0^a \int_0^b \left\{ h \left[\varepsilon_x^2 + \bar{G}_2 \varepsilon_y^2 + 2\mu_{21}\varepsilon_x \varepsilon_y + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{G}_{12} \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23} k (\Psi_y - \theta_2)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{12} \left[\chi_1^2 + \bar{G}_2 \chi_2^2 + 2\mu_{21}\chi_1 \chi_2 + 4\bar{G}_{12} \chi_{12}^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{q(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1} W \right\} dx dy, \\ K &= \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dy.\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом того, что для ортотропного материала

$$E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12},$$

здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\bar{G}_{12} &= \frac{G_{12}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{13} = \frac{G_{13}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \\ \bar{G}_{23} &= \frac{G_{23}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}; \quad k = \frac{5}{6}.\end{aligned}\quad (6)$$

3. МЕТОДЫ

Классический вариант метода Л.В. Канторовича – метода сведения многомерного функционала к одномерному, состоит в следующем [21]. Искомые функции перемещений и углов поворота нормали представляются в виде

$$\begin{aligned}U &= U(x, y, t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) Z1(i, x, y), \\ V &= V(x, y, t) = \sum_{i=1}^N V_i(t) Z2(i, x, y), \\ W &= W(x, y, t) = \sum_{i=1}^N W_i(t) Z3(i, x, y), \\ \Psi_x &= \Psi_x(x, y, t) = \sum_{i=1}^N P S_i(t) Z4(i, x, y), \\ \Psi_y &= \Psi_y(x, y, t) = \sum_{i=1}^N P N_i(t) Z5(i, x, y),\end{aligned}\quad (7)$$

где $U_i - P N_i$

– неизвестные функции переменной t ; $Z1 - Z5$ – известные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям. Эти функции, как правило, являются различными комбинациями тригонометрических функций с различными аргументами.

Далее функции (7) подставляются в функционал полной энергии деформации оболочки

(5). После вычисления интегралов по переменным x и y от известных функций, функционал I представляет собой одномерный функционал от функций

$$U_i(t) - PN_i(t).$$

Из условий минимума этого функционала

$$\delta I = 0$$

находятся уравнения движения, которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Также получаемая таким образом система носит название многомерного варианта уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(K - E_p)}{\partial \dot{X}_k(t)} - \frac{\partial(K - E_p)}{\partial X_k(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5N, \quad (8)$$

где $X(t) = (U_i(t), V_i(t), W_i(t), PS_i(t), PN_i(t))^T$, $i = 1, \dots, N$,

а точкой обозначена производная по времени. Так как производные от искомым функций по переменной t содержатся только в выражении для кинетической энергии, а сами функции – только в выражении для E_p , то справедливо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{X}_k(t)} + \frac{\partial E_p}{\partial X_k(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5N. \quad (9)$$

Притом

$$\frac{\partial E_p}{\partial X_k(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5N$$

– система уравнений задачи статики [22]. Процесс формирования системы (9) был запрограммирован в среде аналитических вычислений Maple 2016. Полученная система

ОДУ решалась численно методом Розенброка [23, 24], который эффективен при решении жестких систем.

Процесс потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении отличается от процесса потери устойчивости в статике. Хотя любые критерии потери устойчивости в своей основе используют критерий Ляпунова (при малом изменении входных данных происходит существенное изменение в решении задачи), в динамике используется свой критерий потери устойчивости.

На рисунке 2 схематично показаны кривые «нагрузка – прогиб» для оболочки при статическом нагружении (кривая 1) и динамическом нагружении (кривая 2). Критерием потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении является нагрузка точки перегиба графика «нагрузка – прогиб». Этот критерий предложен А. С. Вольмиром [25]. Как видно из графика, после потери устойчивости оболочка совершает колебания вокруг кривой равновесных состояний статической задачи. Если нагрузка

$$q = A_1 t,$$

то при увеличении скорости нагружения A_1 критическая нагрузка увеличивается (происходит запаздывание реакции конструкции на воздействие).

4. РАСЧЕТЫ

Для верификации предложенной методики проведем расчеты устойчивости пологих оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении, выполненных из изотропных материалов, которые рассматривались в работах В. В. Карпова [26]. Параметры материалов приводятся в Таблице 1.

Геометрические параметры всех рассматриваемых вариантов конструкций приводятся в Таблице 2.

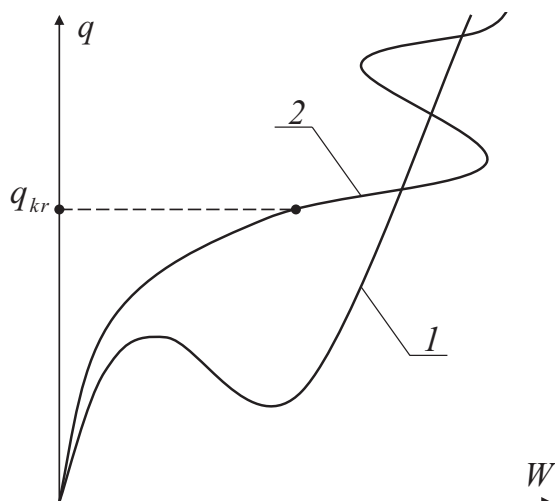


Рисунок 2. Схематичное изображение кривых «нагрузка – прогиб» при статическом и динамическом нагружении.

Таблица 1. Характеристики материалов

Характеристика	Сталь (изотропный)	Углепластик М60Л/Ероху	Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27
E_1 , МПа	$2.1 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$0.294 \cdot 10^5$
μ_{12}	0.3	0.32	0.123
E_2 , МПа	$2.1 \cdot 10^5$	$0.59 \cdot 10^4$	$1.78 \cdot 10^4$
G_{12} , МПа	$0.807 \cdot 10^5$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$
G_{13} , МПа	$0.807 \cdot 10^5$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$
G_{23} , МПа	$0.807 \cdot 10^5$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$
Пл-ть, кг/м ³	7800	1500	1800

Таблица 2. Геометрические параметры конструкций

Вариант	$a = b$, м	$R_1 = R_2$, м	h , м
1	$60h$	$225h$	0.09
2	$120h$	$450h$	0.09

Оболочки рассматривались при шарнирно-неподвижном способе закрепления контура и двух вариантах скоростей нагружения: $A_1 = 100$ и $A_1 = 1000$. Далее все результаты будут приведены в безразмерных параметрах:

$$\bar{t} = \frac{h}{a^2 A^2} \sqrt{\frac{E_1}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \rho}} \cdot t, \quad \bar{W} = \frac{W}{h},$$

$$\bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}. \quad (10)$$

На Рисунке 3 показано сравнение графика зависимости «нагрузка – прогиб» (в безразмерных параметрах), полученного для стальной оболочки варианта 1 при двух скоростях нагружения ($A_1 = 100$ и $A_1 = 1000$).

Черным кривым соответствуют значения, полученные В. В. Карповым [26], красным кривым – полученные в данной работе. Значения соответствуют прогибу конструкции в ее центре ($x = a/2, y = b/2$), данные получены при $N = 9$. Наблюдаемая разница в значениях объясняется использованием более точной модели типа Тимошенко (в отличие от модели Кирхгофа – Лява [26]), а также увеличенной точностью вычислений, которой позволяет достичь пакет аналитических вычислений Maple 2016 и использование метода Розенброка для решения системы ОДУ.

В Таблице 3 приведены значения нагрузок потери устойчивости \bar{P}_{kr} для всех рассмотренных вариантов оболочек. В скобках указаны значения, полученные в работе [26].

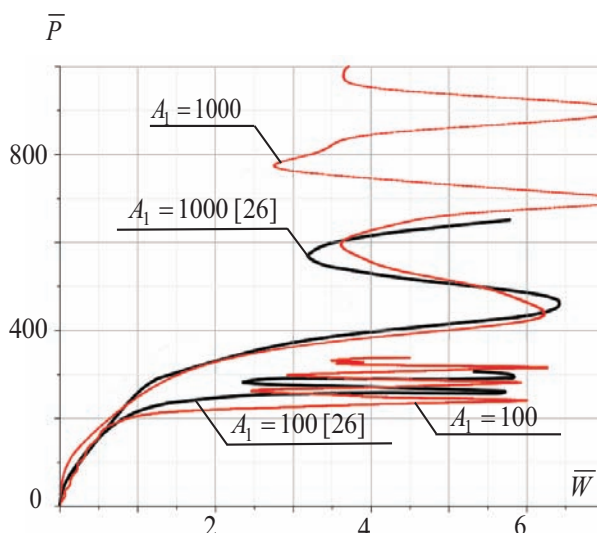


Рисунок 3. Сравнение графика зависимости «нагрузка – прогиб» для стальной оболочки варианта 1 при $A_1 = 100$ и $A_1 = 1000$ из работы [26] и полученных автором

Таблица 3. Значения нагрузок потери устойчивости

Вар.	A_1	Материал	Критическая нагрузка \bar{P}_{kr}
1	100	Сталь	223.3 (256)
		Т-10/УПЭ22-27	151.7
		М60J/Ероху	110
	1000	Сталь	395.9 (383)
		Т-10/УПЭ22-27	353.8
		М60J/Ероху	334.5
2	100	Сталь	825
		Т-10/УПЭ22-27	526.8
		М60J/Ероху	269.5
	1000	Сталь	1000
		Т-10/УПЭ22-27	806
		М60J/Ероху	514.5

На Рисунке 4 приводится график зависимости «нагрузка – прогиб» для ортотропной оболочки варианта 1, выполненной из углепластика М60J/Ероху, а на Рисунке 5 – для ортотропной оболочки варианта 2, выполненной из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27. В обоих случаях скорость нагружения принималась $A_1 = 1000$. Красная кривая соответствует прогибу в центре конструкции, синяя – в четверти.

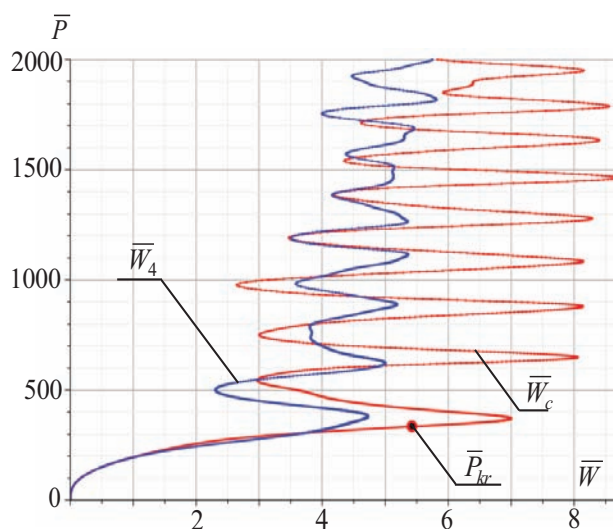


Рисунок 4. График зависимости «нагрузка – прогиб» для оболочки варианта 1 из углепластика М60J/Ероху.

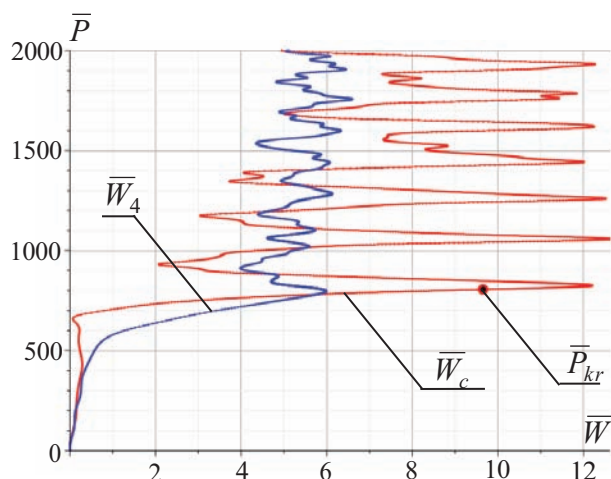


Рисунок 5. График зависимости «нагрузка – прогиб» для оболочки варианта 2 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27.

Точкой на красной кривой показан перегиб графика, соответствующий нагрузке потери устойчивости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложена методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении. Учитывается геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги. Алгоритм исследования математической модели строится на основе методов Л. В. Канторовича и метода Розенброка.

Результаты расчетов тестовых задач показали хорошую согласованность с результатами, полученными в работе других авторов, поэтому предложенная методика может быть использована в дальнейших исследованиях.

На основании проведенных расчетов ортотропных пологих оболочек можно сделать вывод о том, что при использовании современных ортотропных материалов (углепластик, стеклопластик) возможно уменьшение значения критической нагрузки в несколько раз, однако такие конструкции существенно легче, чем конструкции, выполненные из традиционных изотропных материалов (сталь).

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H.** Buckling and Dynamic Instability Analysis of Stiffened Shell Panels. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 44 (2006), pp. 321-333.
2. **Ng T.Y., Lam K.Y., Reddy J.N.** Dynamic Stability of Cylindrical Panels with Transverse Shear Effects. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36 (1999), pp. 3483-3496.
3. **Fan H.-G., Chen Z.-P., Feng W.-Z., Zhou F., Cao G.-W.** Dynamic Buckling of Cylindrical Shells with Arbitrary Axisymmetric Thickness Variation under Time Dependent External Pressure. // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 15, No. 3 (2015) 1450053 (21 pages).
4. **Крысько В.А., Кравцова И.В.** Динамика и статика секториальных оболочек. // *Вестник СГТУ*, 2004, №2(3), с. 27-36.
5. **Less H., Abramovich H.** Dynamic Buckling of a Laminated Composite Stringer-Stiffened Cylindrical Panel. // *Composites: Part B*, Vol. 43 (2012), pp. 2348-2358.
6. **Ravi Kumar L., Datta P.K., Prabhakara D.L.** Tension Buckling and Dynamic Stability Behavior of Laminated Composite Doubly Curved Panels Subjected to Partial Edge Loading. // *Composite Structures*, Vol. 60 (2003), pp. 171-181.
7. **Schokker A., Sridharan S., Kasagi A.** Dynamic Buckling of Composite Shells // *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 1 (1996), pp. 43-53.
8. **Gao Y., Hoo Fatt M.S.** Dynamic Pulse Buckling of Single Curvature Composite Shells Under External Blast. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 52 (2012), pp. 149-157.
9. **Thang P.-T., Nguyen-Thoi T.** A New Approach for Nonlinear Dynamic Buckling of S-FGM Toroidal Shell Segments with Axial and Circumferential Stiffeners. // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 53 (2016), pp. 1-9.
10. **Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H.** Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells. // *Composite Structures*, Vol. 96 (2013), pp. 384-395.
11. **Kiani Y., Sadighi M., Eslami M.R.** Dynamic Analysis and Active Control of Smart Doubly Curved FGM Panels. // *Composite Structures*, Vol. 102 (2013), pp. 205-216.
12. **Sofiyev A.H., Kuruoglu N.** Domains of Dynamic Instability of FGM Conical Shells Under Time Dependent Periodic Loads. // *Composite Structures*, Vol. 136 (2016), pp. 139-148.
13. **Абросимов Н.А., Баженов В.Г.** Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
14. **Коган Е.А., Юрченко А.А.** Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор). // *Известия МГТУ «МАМИ»*. Серия «Естественные науки», 2014, Т. 4, №1(19), с. 55-70.
15. **Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.** Nonlinear Problems of the Dynamics of Elastic Shells Partially Filled with a Liquid. // *International Applied Mechanics*, Vol. 36 (2000), pp. 421-448.
16. **Кубенко В.Д., Ковальчук П.С.** Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор). // *Прикладная механика*, 1998, Т.34, №8, с. 3-31.
17. **Amabili M., Païdoussis M.P.** Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels, with and without Fluid – Structure Interaction. // *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56 (2003), pp. 349-381.
18. **Moussaoui F., Benamar R.** Non-Linear Vibrations of Shell-Type Structures: A Review with Bibliography. // *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255 (2002), pp. 161-184.

19. **Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.** Recent Research Advances on the Dynamic Analysis of Composite Shells: 2000 – 2009 (Review). // *Composite Structures*, Vol. 93 (2010), pp. 14-31.
20. **Sahu S.K., Datta P.K.** Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987 – 2005 – Part I: Conservative Systems. // *Appl. Mech. Rev.* (2007), pp. 60-65.
21. **Канторович Л.В.** Один прямой метод приближенного решения задач о минимуме двойного интеграла. // *Известия АН СССР, Отд. матем. и ест. наук*, 1933, №5, с. 647-652.
22. **Semenov A.A.** Strength and Stability of Geometrically Nonlinear Orthotropic Shell Structures // *Thin-Walled Structures*, Vol. 106 (2016), pp. 428-436.
23. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II. 2nd ed. New York: Springer, 1996.
24. **Shampine L.F., Corless R.M.** Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments. // *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 125(1-2) (2000), pp. 31-40.
25. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
26. **Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю.** Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: Изд-во АСБ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
3. **Fan H.-G., Chen Z.-P., Feng W.-Z., Zhou F., Cao G.-W.** Dynamic Buckling of Cylindrical Shells with Arbitrary Axisymmetric Thickness Variation under Time Dependent External Pressure. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 15, No. 3 (2015) 1450053 (21 pages).
4. **Krys'ko V.A., Kravcova I.V.** Dinamika i Statika Sektorial'nyh Obolochek [Dynamics and statics of sectorial shells]. *Vestnik SGTU*, 2004, No. 2(3), pp. 27-36.
5. **Less H., Abramovich H.** Dynamic Buckling of a Laminated Composite Stringer-Stiffened Cylindrical Panel. // *Composites: Part B*, Vol. 43 (2012), pp. 2348-2358.
6. **Ravi Kumar L., Datta P.K., Prabhakara D.L.** Tension Buckling and Dynamic Stability Behavior of Laminated Composite Doubly Curved Panels Subjected to Partial Edge Loading. // *Composite Structures*, Vol. 60 (2003), pp. 171-181.
7. **Schokker A., Sridharan S., Kasagi A.** Dynamic Buckling of Composite Shells // *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 1 (1996), pp. 43-53.
8. **Gao Y., Hoo Fatt M.S.** Dynamic Pulse Buckling of Single Curvature Composite Shells Under External Blast. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 52 (2012), pp. 149-157.
9. **Thang P.-T., Nguyen-Thoi T.** A New Approach for Nonlinear Dynamic Buckling of S-FGM Toroidal Shell Segments with Axial and Circumferential Stiffeners. // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 53 (2016), pp. 1-9.
10. **Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H.** Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells. // *Composite Structures*, Vol. 96 (2013), pp. 384-395.
11. **Kiani Y., Sadighi M., Eslami M.R.** Dynamic Analysis and Active Control of Smart Doubly Curved FGM Panels. // *Composite Structures*, Vol. 102 (2013), pp. 205-216.
12. **Sofiyev A.H., Kuruoglu N.** Domains of Dynamic Instability of FGM Conical Shells 3483-3496.

REFERENCES

1. **Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H.** Buckling and Dynamic Instability Analysis of Stiffened Shell Panels. *Thin-Walled Structures*, Vol. 44 (2006), pp. 321-333.
2. **Ng T.Y., Lam K.Y., Reddy J.N.** Dynamic Stability of Cylindrical Panels with Transverse Shear Effects. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36 (1999), pp.

- Under Time Dependent Periodic Loads. // Composite Structures, Vol. 136 (2016), pp. 139-148.
13. **Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.** Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnyh konstrukcij [Nonlinear problems of the dynamics of composite structures]. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo NNGU, 2002, 400 p.
14. **Kogan E.A., Jurchenko A.A.** Nelinejnye kolebanija trehslojnyh i mnogoslojnyh plastin i obolochek pri periodicheskikh vozdeystvijah (obzor) [Nonlinear oscillations of three-layered and multilayered plates and shells under periodic actions (review)]. Izvestija MGTU "MAMI". Serija "Estestvennye nauki", 2014, Vol. 4, No. 1(19), pp. 55-70.
15. **Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.** Nonlinear Problems of the Dynamics of Elastic Shells Partially Filled with a Liquid. // International Applied Mechanics, Vol. 36 (2000), pp. 421-448.
16. **Koval'chuk P.S., Kubenko V.D.** Nelinejnye zadachi kolebanij tonkih obolochek (obzor) [Nonlinear Problems of Oscillations of Thin Shells (review)]. Prikladnaja mehanika, 1998, Vol. 34, No. 8, pp. 3-31.
17. **Amabili M., Païdoussis M.P.** Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels, with and without Fluid – Structure Interaction. // Applied Mechanics Reviews, Vol. 56 (2003), pp. 349-381.
18. **Moussaoui F., Benamar R.** Non-Linear Vibrations of Shell-Type Structures: A Review with Bibliography. // Journal of Sound and Vibration, Vol. 255 (2002), pp. 161-184.
19. **Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.** Recent Research Advances on the Dynamic Analysis of Composite Shells: 2000 – 2009 (Review). // Composite Structures, Vol. 93 (2010), pp. 14-31.
20. **Sahu S.K., Datta P.K.** Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987 – 2005 – Part I: Conservative Systems. // Appl. Mech. Rev. (2007), pp. 60-65.
21. **Kantorovich L.V.** Odin Prjamoj Metod Priblizhennogo Reshenija Zadach o Minime Dvojnogo Integrala [One Direct Method for the Approximate Solution of Problems on the Minimum of the Double Integral]. Izvestija AN SSSR, Otdelenie matematicheskikh i estestvennyh nauk, 1933, No. 5, pp. 647-652.
22. **Semenov A.A.** Strength and Stability of Geometrically Nonlinear Orthotropic Shell Structures // Thin-Walled Structures, Vol. 106 (2016), pp. 428-436.
23. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II. 2nd ed. New York: Springer, 1996.
24. **Shampine L.F., Corless R.M.** Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments. // J. Comp. Appl. Math, Vol. 125(1-2) (2000), pp. 31-40.
25. **Vol'mir A.S.** Nelinejnaja Dinamika Plastinok i Obolochek [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 p.
26. **Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Sal'nikov A.Ju.** Nelinejnye Matematicheskie Modeli Deformirovanija Obolochek Peremennoj Tolshhiny i Algoritmy ih Issledovanija [Nonlinear Mathematical Models of Deformation of Shells of Variable Thickness and Algorithms for their Analysis]. Moscow, Izdatel'stvo ASV; Saint-Petersburg, SPbGASU, 2002, 420 p.

Семенов Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет; 190005, Россия, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4;
e-mail: sw.semenov@gmail.com.

Alexey A. Semenov, Ph.D., Assistant Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; 4, Vtoraja Krasnoarmejskaja ul., Saint Petersburg, 190005, Russian Federation;
e-mail: sw.semenov@gmail.com

К ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТИ НА СФЕРЕ С УЗЛАМИ НА ОДНОМ УРОВНЕ

В.Д. Антошкин

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, РОССИЯ

Аннотация: Исследован один из методов образования треугольных сетей на сфере. Поставлены условия задачи размещения треугольной сети на сфере. Критерием оценки эффективности решения задачи является минимальное число типоразмеров панелей купола, возможность укрупнительной сборки и предварительного напряжения. Приведено решение одного варианта задачи размещения треугольной сети в совместимом сферическом треугольнике и, соответственно, на сфере. Размещение на сфере правильных и неправильных шестиугольников, вписанных в окружности, т.е. фигур плоских или составленных в свою очередь из сферических треугольников с минимальными размерами ребер, имеет эффективное решение в виде сети, образованной на основе окружностей минимальных радиусов, т.е. окружностей на сфере, полученных при касании двух смежных окружностей, центры которых находятся на наименьшем расстоянии друг от друга. Задача выравнивания опор на одном уровне может быть решена размещением в системе правильных шестиугольников и пятиугольников неправильных шестиугольников, вписанных в окружности минимальных размеров.

Ключевые слова: сборная сферическая оболочка, треугольная геометрическая сеть, описанная окружность, правильный шестиугольник, разрезка, купол, оптимизация

THE PROBLEM OF EMPLACEMENT OF TRIANGULAR GEOMETRIC NET ON THE SPHERE WITH NODES ON THE SAME LEVEL

Vasilij D. Antoshkin

Mordovian State University, Saransk, Russia

Abstract: One of the methods of formation of triangular networks in the field is investigated. Conditions of the problem of locating a triangular network in the area are delivered. The criterion for assessing the effectiveness of the solution of the problem is the minimum number of sizes of the dome panels, the possibility of pre-assembly and pre-stressing. The solution of the problem of one embodiment of a triangular network of accommodation in a compatible spherical triangle and, accordingly, on the sphere. Placing on the area of regular and irregular hexagon inscribed in a circle, ie, flat figures or composed in turn of spherical triangles with minimum dimensions of the ribs, is an effective solution in the form of a network formed by circles of minimum radii, ie, circles on a sphere obtained at the touch of three adjacent circles whose centers are at the shortest distance from each other. Task align the supports at one level can be resolved by placement in the regular hexagons and irregular pentagons hexagons inscribed in a circle of minimum size..

Keywords: assembled spherical shell, triangular geometric network, described circle, a regular hexagon, cutting, dome, optimization.

ВВЕДЕНИЕ

В геодезическом куполе на основе трехсотдвадцатигранника (320-гранника) имеется возможность такого размещения неправиль-

ных шестиугольников и правильных пятиугольников, с сохранением минимального числа типоразмеров, которое обеспечит эффективное расположение опорных узлов значительно ниже экватора и на одном, вполне определенном уровне (рис. 1).

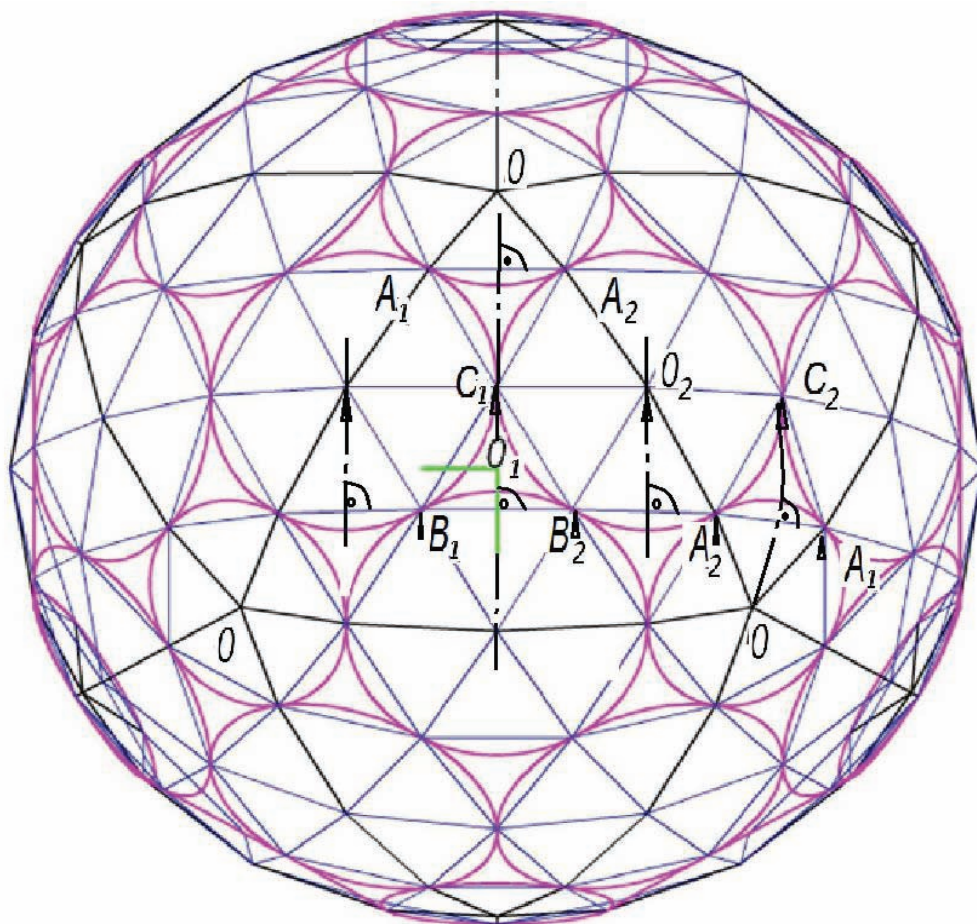


Рисунок 1. Сфера, составленная из совместимых сферических треугольников (сегментов, представляющих собой 1/6 грани икосаэдра), с разрезкой треугольной сети в виде 320-гранника, имеющая 4 типоразмеров элементов или 2 типоразмеров монтажных элементов (всего - 4 типоразмера); O_0 – центр грани икосаэдра и панели в виде правильного треугольника на сфере; O , O_2 – центры монтажных панелей в виде плоских шестиугольников и пятиугольников в сегменте с внутренними углами 36° , 90° , 60° .

Если анализировать возможность такого варианта треугольной сети на сфере, приходим к выводу, что если вершины граней правильного двадцатигранника и середины сторон его граней у экватора имеют равный шаг в виде секторов 36° , то это условие будет выполняться, если дуги A_1A_2 и B_1B_2 будут равны и симметрично расположены относительно границ этих секторов с осью, проходящей по точке O_2 , находящейся на экваторе (т.е. будут иметь значения $x+x$, как на рисунке 2).

РЕШЕНИЕ

На схемах рисунков 1 и 2 приведено размещение описанных окружностями пятиугольника и шестиугольника в сферическом треугольнике (совместимом сегменте [1-9] сферического икосаэдра) с внутренними углами 36° , 90° и 60° . Указанное размещение центров окружностей, описывающих неправильные и правильные шестиугольники, выполним для разрезки в виде 320-гранника (рис. 1). При условии известного расположения центров окружностей и, соответственно, плоских пятиугольника и шестиугольника, задача формирования треугольной сети на

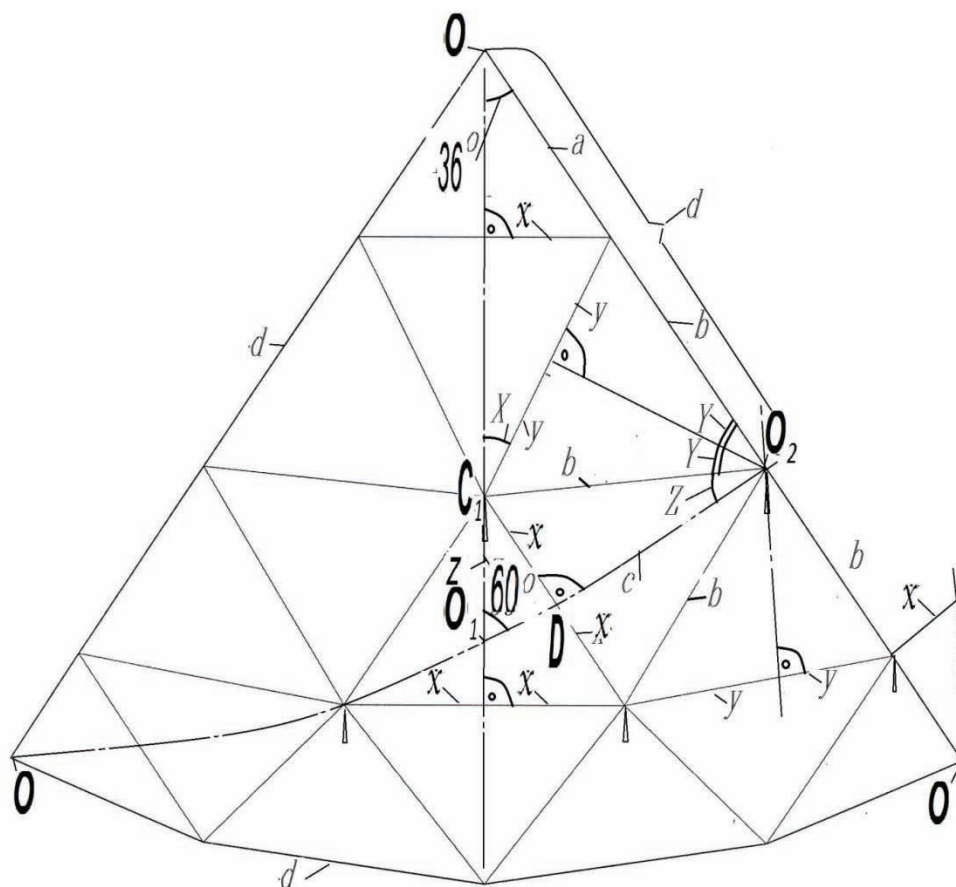


Рисунок 2. Определение расположения ребер многогранника в сферическом треугольнике $36\text{-}60\text{-}90^\circ$ для условия опорных узлов, расположенных на одном уровне от экватора сферы.

сфере с центрами узлов, расположенных на окружности, параллельной окружности экватора (т.е. на одной отметке), сводиться к решению системы уравнений в сферических треугольниках на совместимом сегменте сферы (рис. 2).

Размещение равнобедренных треугольников в сферических неправильных шестиугольниках, вписанных в окружности (т.е. таких, которые соответствуют по периметру плоским шестиугольникам), проведем на примере разрезки, показанной на рисунке 1, и ее фрагменте, показанном на рисунке 2. Предварительно определим параметры в на одной шестой грани правильного двадцатигранника $O O O$, вписанного в сферу, на сферическом треугольнике $O_1 O O_2$. По условию внутренние углы треугольника

$$O = 36^\circ, \quad O_1 = 60^\circ, \quad O_2 = Z + 2Y = 90^\circ, \\ \text{дуга } d = a + b.$$

Используя известные выражения Непера [4] для сторон и углов прямоугольных сферических треугольников, получим

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ \sin a &= \sin x, \\ \sin 60^\circ \sin z &= \sin x. \end{aligned} \quad (1)$$

где a и b – радиусы окружностей, описывающих шестиугольники и пятиугольники, в виде полярного угла; x, y, c и d – катеты прямоугольных сферических треугольников в виде полярных углов; $2y$ и z – гипотенузы в виде полярных углов.

Из треугольников в центре грани $O_1 D C_1$, $C D O_2$ и $O_1 C_1 O_2$ найдем связи величины c и искомых дуг b , z и x

$$\cos b = \cos c \cos z + \sin c \sin z \cos 60^\circ. \quad (2)$$

Из прямоугольных треугольников $C_1 D O_2$ и $C_1 D O_1$ и уравнений (1)

$$\sin 60^\circ \sin z = \sin 36^\circ \sin a \quad (3)$$

Так как $b = d - a$, подставим в уравнение (2) соотношения (3), (4 и 5)

$$\begin{aligned} \cos(d - a) &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 36^\circ}{\sin^2 60^\circ} \sin^2 a} + \\ &+ \sin c \frac{\sin 36^\circ \sin a}{\sin 60^\circ} \cos 60^\circ; \end{aligned}$$

Обозначим

$$n = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 60^\circ}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos(d - a) &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a} + n \sin c \sin a \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \cos d \cos a + \sin d \sin a &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a} + n \sin c \sin a \cos 60^\circ; \\ \cos d \cos a - (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a}; \\ [\cos d \cos a - (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a]^2 &= \\ &= \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a); \\ \cos^2 d \cos^2 a - 2 \cos d \cos a (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a = \cos^2 c (1 - \\ &- n^2 \sin^2 a); \\ \cos^2 d (1 - \sin^2 a) - \\ &- 2 \cos d \sqrt{1 - \sin^2 a} (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a = \cos^2 c (1 - \\ &- n^2 \sin^2 a); \\ \cos^2 d (1 - \sin^2 a) - \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a) + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a = \end{aligned}$$

Проведем преобразования системы уравнений, используя формулы (1, 2 и 3) сферической тригонометрии [5,10]

$$\sin z = \frac{\sin 36^\circ \sin a}{\sin 60^\circ}; \quad (4)$$

откуда

$$\cos z = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 36^\circ}{\sin^2 60^\circ} \sin^2 a}; \quad (5)$$

$$= 2 \cos d \sqrt{1 - \sin^2 a} (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a;$$

$$\begin{aligned} &[\cos^2 d - \cos^2 d \sin^2 a - \\ &- \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a) + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a]^2 = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{\cos^2 d - \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a)^2 + \\ &+ [n \sin c \cos 60^\circ - \sin d]^2 - \cos^2 d\} \sin^2 a\}^2 = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a; \\ &\{[\cos^2 d - \cos^2 c + \cos^2 c n^2 \sin^2 a] + \\ &+ [(n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d] \sin^2 a\}^2 = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\cos^2 d - \cos^2 c + \cos^2 c n^2 \sin^2 a]^2 + \\ &+ 2[(n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d] \\ &\sin^2 a [\cos^2 d - \cos^2 c + \cos^2 c n^2 \sin^2 a] + \\ &+ [(n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d]^2 \sin^4 a = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} t &= \sin a, m = (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d, \\ p &= \cos^2 d - \cos^2 c. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &(p + n^2 \cos^2 c t^2)^2 + 2 m t^2 (p + n^2 \cos^2 c t^2) + \\ &m^2 t^4 = \\ &= 4 [m + \cos^2 d] \cos^2 d (t^2 - t^4); \\ &p^2 + 2 p n^2 \cos^2 c t^2 + n^4 \cos^4 c t^4 + 2 p m t^2 + \\ &+ 2 m n^2 \cos^2 c t^4 + m^2 t^4 = \\ &= 4 m \cos^2 d t^2 - 4 m \cos^2 d t^4 + 4 \cos^4 d t^2 - \\ &- 4 \cos^4 d t^4; \\ &(n^4 \cos^4 c + 2 m n^2 \cos^2 c + 4 m \cos^2 d + m^2 + \\ &+ 4 \cos^4 d) t^4 + [2 p (n^2 \cos^2 c + m) - \\ &- 4 m \cos^2 d - 4 \cos^4 d] t^2 + p^2 = 0. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\beta_1 = n^4 \cos^4 c + 2mn^2 \cos^2 c + 4m \cos^2 d + m^2 + 4 \cos^4 d;$$

$$\beta_2 = 2p(n^2 \cos^2 c + m) - 4m \cos^2 d - 4 \cos^4 d. \quad (6)$$

Получим биквадратное уравнение относительно функции $\sin^2 \alpha$.

$$\beta_1 t^4 + \beta_2 t^2 + p^2 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) решается в явном виде [5, 11-16]. Подставим $d = 31,71747441146^0$, $c = 20,90515744789^0$.

$$(0,498838998125102782493771725e+28)t^4 - 0,4268489762778023 t^2 + 0,022222222 = 0.$$

Сделаем замену

$$y = t^2,$$

тогда биквадратное уравнение примет вид

$$0,4988389981251027824937717249e+28 y^2 - 0,4268489762778023 y + 0,022222222 = 0.$$

Решение уравнения:

$$t = 0,235978,$$

$$\alpha = 13,649279529197^0.$$

ВЫВОДЫ

Предлагаемое решение разрезки позволяет значительно упростить решения опорных узлов, а также производить укрупнительную сборку элементов купола, так как основания пирамид остаются плоскими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antoshkin V.D., Travush V.I., Erofeev V.T., Rimshin V.I., Kurbatov V.L. The Problem Optimization Triangular Geometric Line Field. // *Modern Applied Science*, 2015, Vol. 9, Issue 3, pp. 46-50.
2. Антошкин В.Д. Эффективные конструктивно-технологические решения сборных сферических куполов. // *Региональная архитектура и строительство*, 2015, №3(24), с. 112-121.
3. Антошкин В.Д., Гудожников С.С., Перфильева О.И., Ерофеева И.В. Перспективные конструктивно-технологические решения сборных сферических оболочек. // *Сборник трудов «Актуальные вопросы архитектуры и строительства»*. Материалы XIII международной научно-технической конференции (в 2 частях), 2014, с. 4-15.
4. Ежов Е.Ф., Юркин Ю.В., Антошкин В.Д., Ежов В.Е. Построение линии влияния в трехшарнирных арках. *Сборник трудов «Современные технологии строительных материалов и конструкций»*. Материалы всероссийской научно-технической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика В.Г. Шухова, Саранск, 2003, с. 160-164.
5. Software Scilab 5.4.1 – The Free Platform for Numerical Computation, 17.06.2014 (www.softkumir.ru/index).
6. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т. Сборная сферическая оболочка. Патент на изобретение, RUS №2520192, 27.06.2013.
7. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеева И.В., Антошкин Д.В. Сборная сферическая оболочка. Патент на изобретение, RUS №2564545, 28.07.2014.
8. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т., Гудожников С.С. Современные конструктивно-технологические решения сферических оболочек. // *Строительство и реконструкция*, 2012, №6(44), с. 45-55.
9. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т., Гудожников С.С. Конструктивно-технологические возможности сборных сферических оболочек. // *Строительство и реконструкция*, 2013, №6(50), с. 36-48.

10. **Korn G.A., Korn T.M.** Mathematical Handbook: For Scientists and Engineers, Dover Publications, 1968, 1152 p.
11. **Антошкин В.Д., Коновалов А.Г.** Сборные сферические оболочки из шестиугольных панелей. // Огарёв-Online, 2015, №13(54), с. 6.
12. **Антошкин В.Д., Курбаков Г.В., Бочкин В.С.** Способ монтажа криволинейной конструкции. // Stredoevropsky Vestnik pro Vedu a Vyzkum, 2015, т. 83, с. 1.
13. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 7 Forming Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
14. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 4 of Placement Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
15. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 5 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02003 (2017).
16. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 6 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02012 (2017).
4. **Ezhov E.F., Jurkin Ju.V., Antoshkin V.D., Ezhov V.E.** Postroenie Linii Vlijanija v Trehsharnirnyh Arkah [Construction of the Line of Influence in the Three-Arm Arches]. Sbornik trudov "Sovremennye tehnologii stroitel'nyh materialov i konstrukcij". Materialy vsrossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii, posvjashhennoj 150-letiju so dnja rozhdenija akademika V.G. Shuhova, Saransk, 2003, pp. 160-164.
5. Software Scilab 5.4.1 – The Free Platform for Numerical Computation, 17.06.2014 (www.softkumir.ru/index).
6. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T.** Sbornaja Sfericheskaja Obolochka [Prefabricated Spherical Shell]. Patent na izobretenie, Rossijskaia Federatsiia, No. 2520192, 27.06.2013.
7. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeeva I.V., Antoshkin D.V.** Sbornaja Sfericheskaja Obolochka [Prefabricated Spherical Shell]. Patent na izobretenie, Rossijskaia Federatsiia, No. 2564545, 28.07.2014.
8. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T., Gudozhnikov S.S.** Sovremennye Konstruktivno-Tehnologicheskie Reshenija Sfericheskikh Obolochek [Modern Structural and Technological Solutions of Spherical Shells]. Stroitel'stvo i rekonstrukcija, 2012, No. 6(44), pp. 45-55.
9. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T., Gudozhnikov S.S.** Konstruktivno-Tehnologicheskie Vozmozhnosti Sbornyh Sfericheskikh Obolochek [Structural and Technological Capabilities of Prefabricated Spherical Shells]. Stroitel'stvo i rekonstrukcija, 2013, No. 6(50), pp. 36-48.

REFERENCES

1. **Antoshkin V.D., Travush V.I., Erofeev V.T., Rimshin V.I., Kurbatov V.L.** The Problem Optimization Triangular Geometric Line Field. Modern Applied Science, 2015, Vol. 9, Issue 3, pp. 46-50.
2. **Antoshkin V.D.** Jefferktivnye Konstruktivno-Tehnologicheskie Reshenija Sbornyh Sfericheskikh Kupolov [Effective Structural and Technological Solutions of Prefabricated Spherical Domes]. Regional'naja arhitektura i stroitel'stvo, 2015, No. 3(24), pp. 112-121.
3. **Antoshkin V.D., Gudozhnikov S.S., Perfil'eva O.I., Erofeeva I.V.** Perspektivnye Konstruktivno-Tehnologicheskie Reshenija Sbornyh Sfericheskikh Obolochek [Perspective Constructive-Technological Solutions of Prefabricated Spherical Shells]. Sbornik trudov "Aktual'nye voprosy arhitektury i stroitel'stva". Materialy XIII mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii (v 2 chastjah), 2014, pp. 4-15.

10. **Korn G.A., Korn T.M.** Mathematical Handbook: For Scientists and Engineers, Dover Publications, 1968, 1152 p.
11. **Antoshkin V.D., Konovalov A.G.** Sbornye Sfericheskie Obolochki iz Shestiuhol'nyh Panelej [Prefabricated Spherical Shells of Hexagonal Panels]. Ogarjov-Online, 2015, No. 13(54), pp. 6.
12. **Antoshkin V.D., Kurbakov G.V., Bochkin V.S.** Sposob Montazha Krivolinejnoj Konstrukcii [Method of Erection of Curvilinear Structure]. Stredoevropsky Vestnik pro Vedu a Vyzkum, 2015, Vol. 83, pp. 1.
13. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 7 Forming Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
14. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 4 of Placement Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
15. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 5 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02003 (2017).
16. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 6 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02012 (2017).

Антошкин Василий Дмитриевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой зданий, сооружений и автомобильных дорог; Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68;
e-mail: antovd@mail.ru.

Vasilij D.Antoshkin, Ph.D., Associate Professor, Head of Department of Buildings, Structures and Roads, Mordovian State University; 48, ul. Bolshevistskaya, Saransk, 430005, Russia; e-mail: antovd@mail.ru.



ОБ ИТОГАХ ВЫБОРОВ ЧЛЕНОВ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК (РААСН) В 2017 ГОДУ

В соответствии с постановлением Президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 07 декабря 2016 г. № 12 о проведении выборов академиков РААСН и членов-корреспондентов РААСН научными организациями, действующими в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, и членами РААСН были выдвинуты 32 кандидата в академики РААСН и 83 кандидата в члены-корреспонденты РААСН. Общим собранием членов РААСН 20-21 апреля 2017 года, согласно уставу РААСН, академиками РААСН и членами-корреспондентами РААСН были избраны следующие ученые:

АКАДЕМИКИ РААСН

Фамилия, имя, отчество

По научному направлению (специальности)

Отделение архитектуры РААСН

<i>Буш Дмитрий Вильямович</i>	– архитектурная практика
<i>Посохин Михаил Михайлович</i>	– архитектурная практика
<i>Рапопорт Евгений Менделевич</i>	– архитектурная практика

Отделение градостроительства РААСН

<i>Бондаренко Игорь Андреевич</i>	– градостроительная наука
<i>Шубенков Михаил Валерьевич</i>	– градостроительная наука
<i>Малинова Ольга Валентиновна</i>	– градостроительная практика

Отделение строительных наук РААСН

<i>Акимов Павел Алексеевич</i>	– теоретические основы строительных наук
<i>Ерофеев Владимир Трофимович</i>	– теоретические основы строительных наук

ЧЛЕНЫ-КОРРЕСПОНДЕНТЫ РААСН

Фамилия, имя, отчество

По научному направлению (специальности)

Отделение архитектуры РААСН

<i>Орельская Ольга Владимировна</i>	– наука и образование
<i>Штиглиц Маргарита Сергеевна</i>	– наука и образование
<i>Казарян Армен Юрьевич</i>	– наука и образование*
<i>Полянцев Евгений Вадимович</i>	– наука и образование*
<i>Романов Олег Сергеевич</i>	– архитектурная практика
<i>Шумаков Николай Иванович</i>	– архитектурная практика
<i>Величкин Дмитрий Валентинович</i>	– архитектурная практика*

Отделение градостроительства РААСН

<i>Митягин Сергей Дмитриевич</i>	– градостроительная наука
<i>Птичникова Галина Александровна</i>	– градостроительная наука*
<i>Ким Валерий Александрович</i>	– градостроительная практика
<i>Ломакина Дарья Юрьевна</i>	– градостроительная практика*

Отделение строительных наук РААСН

<i>Каприелов Семен Суренович</i>	– теоретические основы строительных наук
<i>Кашеварова Галина Геннадьевна</i>	– теоретические основы строительных наук
<i>Копаница Дмитрий Георгиевич</i>	– теоретические основы строительных наук
<i>Морозов Валерий Иванович</i>	– теоретические основы строительных наук
<i>Емельянов Сергей Геннадьевич</i>	– теоретические основы строительных наук*
<i>Крылов Сергей Борисович</i>	– теоретические основы строительных наук*
<i>Мондрус Владимир Львович</i>	– теоретические основы строительных наук*
<i>Шубин Игорь Любимович</i>	– теоретические основы строительных наук*

Примечание: Символ * означает, что данная вакансия объявлена с ограничением возраста кандидата на момент избрания в члены-корреспонденты РААСН – до 61 года включительно.



*Утверждено постановлением
Общего собрания членов РААСН
от 21 апреля 2017 г.*

**ИТОГОВЫЙ ДОКУМЕНТ
НАУЧНОЙ ЧАСТИ ОБЩЕГО СОБРАНИЯ
ЧЛЕНОВ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И
СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК В 2017 ГОДУ
«Научные исследования – важнейший фактор
инновационного развития архитектурно-строительного
комплекса и градостроительной деятельности в России»**

В соответствии с постановлением Президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 07 декабря 2016 г. № 12 о проведении выборов академиков РААСН и членов-корреспондентов РААСН научными организациями, действующими в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, и членами РААСН были выдвинуты 32 кандидата в академики РААСН и 83 кандидата в члены-корреспонденты РААСН. Общим собранием членов РААСН 20-21 апреля 2017 года, согласно уставу РААСН, академиками РААСН и членами-корреспондентами РААСН были избраны следующие ученые:

26 марта 2017 года исполнилось 25 лет со дня выхода Указа Президента Российской Федерации «Об организации Российской академии архитектуры и строительных наук» от 26 марта 1992 г. №305, подписанного первым Президентом Российской Федерации Б.Н. Ельциным. За прошедшее время Российская академия архитектуры и строительных наук (далее – РААСН, Академия) сформировалась как ведущий федеральный научный центр, осуществляющий координацию фундаментальных исследований в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук и объединяющий крупнейших мастеров архитектуры и градостроительства, ученых в области архитектурной, градостроительной и строительной науки. РААСН активно включилась в разработку, реализацию и научное сопровождение государственных программ и иных программных документов в указанных областях.

Развитие Академии в ближайшие годы определяется принятым Федеральным Законом «О Российской академии наук, реорганизации государственных академий наук и внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации» от 27 сентября 2013 г.

№253-ФЗ и актуализированным Уставом Академии, утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации от 28 мая 2014 г. №488. В ходе реформирования государственных академий наук заложенные принципы организации жизнедеятельности РААСН позволили сохранить и развить интеллектуальный научно-творческий потенциал в области архитектуры, градостроительства и строительных наук, ядро российских академических исследований, способных ответить на вызовы времени. В рядах РААСН Лауреаты Государственных премий Российской Федерации, СССР и РСФСР, Лауреаты премий Правительства Российской Федерации и Совета Министров СССР, народные архитекторы Российской Федерации, Заслуженные деятели науки и техники Российской Федерации, Заслуженные деятели науки Российской Федерации, Заслуженные деятели искусств Российской Федерации, Заслуженные архитекторы Российской Федерации и РСФСР, Заслуженные работники высшей школы Российской Федерации, Почетные архитекторы России, Почетные строители России, Почетные работники высшего профессионального образования Российской Федерации.

■ Министерству строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации (Минстрой России) было передано в управление имущество академических институтов и региональных отделений РААСН, налажено эффективное взаимодействие с научными организациями, подведомственными Минстрою России (федеральное государственное бюджетное учреждение «Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации» (ФБГУ «ЦНИИП Минстроя России»), федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук» (НИИСФ РААСН)), обеспечивается научно-методическое сопровождение их деятельности.

■ В целях дальнейшего развития региональной деятельности, в 2015 году было сформировано восемь территориальных отделений РААСН (Центральное территориальное отделение, Приволжское территориальное отделение, Дальневосточное территориальное отделение, Сибирское территориальное отделение, Северо-Западное территориальное отделение, Уральское территориальное отделение, Южное территориальное отделение и Крымское территориальное отделение), осуществляющих свою деятельность в пределах территорий соответствующих федеральных округов Российской Федерации и объединяющих академиков, членов-корреспондентов, почетных членов и советников РААСН, проживающих и работающих на их территории.

■ Успешно выполняются (в части РААСН и научных организаций, подведомственных Минстрою России) Государственная программа «Развитие науки и технологий на 2013-2020 годы», утвержденная постановлением Правительства Российской Федерации от 15 апреля 2014 года № 301 (с учетом изменений внесенных постановлением Правительства Российской Федерации от 30 марта 2017 г. №363), Программа фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 3 декабря 2012 года № 2237-р (с учетом изменений внесенных распоряжением Правительства Российской Федерации от 31 октября 2015 г. № 2217-р) и Программа фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2013-2020 годы), утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 27 декабря 2012 г. № 2538-р (с учетом изменений внесенных распоряжением Правительства Российской Федерации от 28 октября 2015 г. № 2179-р).

■ Академия формирует, актуализирует и контролирует ежегодное исполнение Плана фундаментальных научных исследований РААСН и Минстроя России.

■ Академия участвует в мониторинге эффективности и оценке результативности дея-

тельности научных организаций, подведомственных Минстрою России, выполняющих научно-исследовательские, опытно-конструкторские и технологические работы гражданского назначения, мониторинге эффективности и результативности выполнения фундаментальных научных исследований в научных организациях, подведомственных Минстрою России.

■ Академия успешно организует и проводит конкурсы на выполнение научно-исследовательских работ в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, конкурсы на медали и дипломы РААСН, иные конкурсы, формирует и совершенствует их научно-методическое обеспечение. В рамках реализации Договора о сотрудничестве между Академией и Университетом Намибии (Республика Намибия) в 2016 году силами академиков, членов-корреспондентов, почетных членов и советников РААСН был успешно проведен Конкурс РААСН «Комплекс зданий факультета архитектуры и градостроительства Университета Намибии, в г. Онгуэндива».

■ Академия ежегодно определяет научные приоритеты в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, готовит предложений по видам и формам организации научных исследований.

■ Академия совершенствует экспертную деятельность, формируя и развивая институт независимой экспертизы. Эксперты из числа академиков, членов-корреспондентов, почетных членов и советников РААСН принимают активное деятельное участие в экспертизе проектов сводов правил и других нормативных технических документов в сфере строительства, а также в экспертизе научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, обеспечивающих определение нормируемых параметров, содержащихся в нормативных технических документах в сфере строительства (в рамках взаимодействия с федеральным автономным учреждением «Федеральный центр нормирования, стандартизации и технической оценки соответствия в строительстве» (ФАО «ФЦС»).

■ Академия осуществляет верификацию программных средств, применяемых при определении нагрузок и воздействий, напряженно-деформированного (и иного) состояния, динамических характеристик, оценке прочности, устойчивости и безопасности конструкций, зданий и сооружений.

■ Академия развивает инновационную деятельность, формируя банк инновационных предложений РААСН, готовых для практического применения.

■ Академия ведет накопление, систематизацию и обобщение информации по истории и современной практике архитектуры, градостроительства и строительных наук, обобщение мирового опыта и отечественной архитектурно-строительной практики.

■ Академия на регулярной основе ведет подготовку отчетных материалов для Президента Российской Федерации, Правительства Российской Федерации, Минстрою России, Минобрнауки России, Российской академии наук и др.

■ Академия обеспечивает издание и развитие журнала «Academia. Архитектура и строительство» (руководитель издания – президент РААСН А.В. Кузьмин) – основного периодического научного печатного издания в области архитектуры, градостроительства и строительных наук, в котором публикуются самые значительные работы, доклады и дискуссии наиболее выдающихся российских и иностранных ученых; Академия определяет научно-методическую, экспертную и информационную политику Международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” (руководитель издания – вице-президент РААСН по направлению «Строительные науки» В.И. Травуш); академики, члены-корреспонденты, почетные члены и советники РААСН традиционно активно публикуются в ведущих российских и зарубежных научных изданиях, в том числе входящих в Пе-

речень Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, а также индексируемых в международных базах данных «Сеть науки» (Web of Science) и Scopus, являются авторами монографий, учебников и учебных пособий.

■ Академия в 2016 году учредила Гриф РААСН для учебников и учебных пособий, призванный стать «знаком качества» учебных изданий в области архитектуры, градостроительства и строительства. Представляется, что гриф РААСН, присваиваемый по результатам комплексной (научной и учебно-методической) экспертизы учебных изданий Академией, будет важен как для рядовых читателей, так и для библиотек, стремящихся оперативно отобрать высококачественную учебную литературу.

■ Академия участвует в деятельности Технологической платформы «Строительство и архитектура» (прежде всего, в рамках секции «Культурное наследие»), миссией которой является формирование механизма прорывного развития отрасли на основе внедрения новейших российских разработок в области строительства, городской инженерной инфраструктуры, а также промышленности строительных материалов, машин и оборудования.

■ На базе, с участием или представительством Академии регулярно организуются и проводятся общественно-значимые мероприятия в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, в частности: III Международная научная конференция «Хан-Магомедовские чтения»; VI Международный симпозиум РААСН «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений»; V Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»); Международная научная конференция VII Академические чтения, посвященные памяти академика РААСН Г.Л. Осипова, «Актуальные вопросы строительной физики. Техническое регулирование в строительстве»; Общероссийская конференция с международным участием по геотехнике «Инженерно-геотехнические изыскания, проектирование и строительство оснований, фундаментов и подземных сооружений»; Научная конференция «Вопросы всеобщей истории архитектуры»; Международный форум высотного и уникального строительства 100+ Forum Russia и др.

■ В рамках формирования государственной отраслевой политики Академия выступила одним из основных разработчиков Стратегии инновационного развития строительной отрасли Российской Федерации на период до 2030 года, принимала активное участие в подготовке материалов и решений Государственного совета Российской Федерации по вопросам развития строительного комплекса и совершенствования градостроительной деятельности. Академия также участвовала в разработке Концепции культурной политики Российской Федерации до 2030 года и в реализации Стратегии государственной культурной политики на период до 2030 года, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 февраля 2016 г. №326-р, где особое внимание было уделено проблеме устойчивого развития исторических городов. В целях координации деятельности в этой сфере продолжалось выполнение соглашения РААСН с Союзом малых городов Российской Федерации и федеральным государственным учреждением культуры «Агентство по управлению и использованию памятников истории и культуры» (АУПИК). В Стратегии РААСН поручена популяризация результатов исследований в области отечественной и мировой архитектуры, активизация совместных с зарубежными учеными исследований и публикаций в этой области. Академия совместно с Союзом архитекторов России и Национальным объединением изыскателей и проектировщиков (НОПИЗ) продолжила разработку проекта Закона об архитектурной деятельности, государственных профессиональных стандартов архитектурно-градостроительного направления.

■ В новых условиях была налажена система эффективного взаимодействия с Российской академией наук (РАН), другими государственными академиями наук, Минстроем России, Министерством образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России), Министерством культуры Российской Федерации (Минкультуры России), другими государственными и профессиональными организациями.

■ В соответствии с Федеральным Законом №253-ФЗ и Уставом Академии в апреле 2017 года после более чем трехлетнего перерыва проводятся выборы академиков РААСН и членов-корреспондентов РААСН, при этом с целью привлечения более молодых талантливых специалистов значительная часть соответствующих вакансий объявлена с ограничениями возраста кандидатов.

В существующих геополитических условиях и внутриэкономической ситуации прогрессивное развитие страны требует наличия мощной фундаментальной и прикладной науки (крайне важным при этом является поиск необходимого баланса между фундаментальными и прикладными исследованиями), привлечения научно-экспертного сообщества, его высокого интеллектуального потенциала к решению актуальных общегосударственных задач. Только четкое видение магистрального пути развития страны, основу которого составляет научный анализ и обоснованный прогноз, позволяет системно и рационально решать оперативные и тактические задачи. В этом отношении показательно, что в Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, утвержденной Указом Президента Российской Федерации от 1 декабря 2016 г. №642, фундаментальная наука выделена отдельным приоритетом, а забота о ней отнесена к обязанностям государства. Решение поставленной в Стратегии научно-технического развития Российской Федерации задачи повышения качества жизни населения в большой степени зависит от архитектурно-градостроительной и строительной деятельности, которая должна выйти на новый уровень развития, для чего необходима системная поддержка отечественной науки, образования и проектного творчества. Очевидно, что реализация Стратегии практически невозможна без развития академической системы организации фундаментальных научных исследований. Участвуя в реализации научно-технических и социально-экономических программ страны, Академия должна обеспечивать гармоничное развитие всех значимых направлений исследований, не допускать проявления «научного монополизма» со стороны отдельно взятых групп ученых и организаций.

Несмотря на то, что к числу основных видов деятельности РААСН законодательно отнесены осуществление научно-методического обеспечения реализации государственных программ, научно-консультативное и экспертное обеспечение в области архитектуры, градостроительства и строительных наук, научно-методическое сопровождение деятельности подведомственных Минстрою России организаций, участие в разработке и экспертизе нормативных правовых актов и др., практическая реализация перечисленных положений нередко весьма затруднительна. В этой связи актуальны задачи совершенствования действующей нормативно-правовой базы, развития взаимодействия между Минстроем России и Академией по вопросам организации научных исследований, оснащения научных организаций, подведомственных Минстрою России, современным экспериментальным оборудованием и вычислительной техникой, развития центров коллективного пользования научным оборудованием, экспертного обеспечения и соответствующей целевой работы президиума РААСН с привлечением академиков, членов-корреспондентов, почетных членов и советников РААСН.

В Академии существует корпус экспертов РААСН, постоянно повышающих качество экспертиз, планируется внедрение системы аккредитации экспертов РААСН. Разработаны и внедрены ключевые принципы организации экспертизы различных объектов, ставятся задачи повысить прозрачность всех экспертных процедур посредством публикации списков экспер-

тов по направлениям; публикации результатов независимой экспертизы отчетов, выполненных за счет средств государственного бюджета; совершенствования экспертных анкет.

Одной из основных проблем в настоящее время является низкая востребованность науки российской промышленностью, экономикой, а в ряде случаев и системой государственного управления. В этой связи, например, для обеспечения признаваемого всеми как необходимого перехода строительной отрасли на инновационный путь развития требуется всемерное развитие конструктивного диалога между Минстроем России и РААСН.

Академия должна обеспечить научное сопровождение Стратегии инновационного развития строительной отрасли Российской Федерации, участвовать в научном сопровождении Стратегии национальной безопасности Российской Федерации, Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, Стратегии государственной культурной политики на период до 2030 года, а также в решении задач модернизации и развития отраслевой системы образования.

Современное состояние и будущее российской науки напрямую зависят от уровня и качества образовательной системы страны, для которой в результате ряда перманентных реформ, характерны кризисные явления. Одной из главных задач Академии в среднесрочной перспективе должно стать деятельное участие в профессионально-общественной аккредитации образовательных программ, в общественной аккредитации образовательных организаций, в подготовке научных кадров высшей квалификации. Необходимо всемерное развитие интеграции академической и вузовской науки, активное участие научных организаций, подведомственных Минстрою России, в подготовке и переподготовке специалистов с высшим образованием, в экспертизе учебников и иной учебной литературы, в частности, в рамках грифования в системе РААСН.

Международное сотрудничество является важной уставной обязанностью РААСН. Этот вид деятельности имеет особое значение в современных условиях обострившейся международной обстановки. Международные контакты мастеров архитектуры, ученых в области архитектурной, градостроительной и строительной науки способствуют налаживанию межгосударственного диалога. Очевидно, что в период глобализации российская наука не может нормально функционировать в отрыве от науки мировой.

Академия наук должна вести содержательный, активный и уважительный диалог с обществом, способствуя его просвещению и разъясняя роль, место и значение науки в современной жизни, бороться с проявлениями лженауки и невежества. Большие перспективы имеет информационное развитие интернет-сайта РААСН, в том числе в части его становления как отраслевого интернет-портала о науке и технологиях, ориентированного на широкий спектр посетителей. Необходимо добиваться существенного усиления распространения в средствах массовой информации и в интернете достоверной и объективной информации о деятельности РААСН, передовых научных знаниях, сведений о результатах научно-исследовательской и инновационной деятельности, а также о достижениях и открытиях ученых Академии.

В современных условиях важнейшей задачей РААСН становится развитие конструктивного диалога с органами государственной власти, при этом особое внимание должно быть уделено и следующим проблемам:

1. Признание необходимости приоритетного развития фундаментальных исследований как основы инновационного развития архитектурно-строительного комплекса и градостроительной деятельности.

2. Усиление роли РААСН в назначении руководителей научных организаций, в назначении руководителей филиалов научных организаций, в распределении средств на про-

ведение фундаментальных, поисковых и прикладных научных исследований, в совершенствовании и развитии системы технического регулирования в сфере архитектуры, градостроительства и строительства в Российской Федерации.

3. Определение ключевой роли РААСН в реструктуризации профильных научных и образовательных организаций.

4. Усиление борьбы с лженаукой в сфере архитектуры, градостроительства и строительства.

5. Усиление роли РААСН в субъектах Российской Федерации, повышение эффективности использования научного, образовательного и инновационного потенциала академиков, членов-корреспондентов, почетных членов и советников РААСН, образовательных организаций высшего образования и научных организаций, в том числе на основе создания сети региональных инновационных научно-образовательных центров на базе образовательных организаций высшего образования совместно с территориальными отделениями РААСН и их представительствами.

Важнейшим фактором обеспечения эффективности этой деятельности является в том числе и личное взаимодействие академиков, членов-корреспондентов, почетных членов и советников РААСН с представителями органов государственной власти, со средствами массовой информации, в ходе которых должны раскрываться реальные возможности Академии для решения стратегических задач развития государства и общества.

Общее собрание РААСН считает необходимым совместными усилиями всего научного сообщества обеспечить реализацию намеченных целей и задач, призванных усилить роль Академии в формировании и реализации государственной научно-технической политики Российской Федерации в сфере архитектуры, градостроительства и строительства, укрепить позиции РААСН как одного из ведущих научных, экспертных и интеллектуальных центров страны, институтов государственной социально-экономической, научно-технической и инновационной политики.



*Утверждено постановлением
Общего собрания членов РААСН
от 21 апреля 2017 г.*

**ПРЕДЛОЖЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК
ПО ПРИОРИТЕТНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ РАЗВИТИЯ
ИССЛЕДОВАНИЙ В СФЕРЕ АРХИТЕКТУРЫ,
ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК**

**1. Приоритетные направления развития фундаментальных
научных исследований отраслевого уровня**

- 1.1. Научные проблемы формирования средствами архитектуры и градостроительства среды жизнедеятельности, комфортной и благоприятной для развития человека, и сохранения природы.
- 1.2. Развитие исследований процессов урбанизации в Российской Федерации и в мире.
- 1.3. Создание условий для устойчивого развития общества средствами архитектурно-градостроительной и строительной деятельности.
- 1.4. Научные основы пространственного развития территории Российской Федерации, базирующиеся на концепции устойчивого развития территорий и поселений.
- 1.5. Разработка научных основ территориально-градостроительной политики Российской Федерации.
- 1.6. Развитие основ теории города.
- 1.7. Прогнозные исследования в области градостроительства.
- 1.8. Ресурсо- и энергоминимизация в архитектурно-строительном комплексе и разработка эффективных строительных материалов, конструкций, технологий, инженерного оборудования.
- 1.9. Обеспечение эксплуатационной безопасности зданий и сооружений при неординарных природных и техногенных воздействиях.

1.10. Разработка теоретических основ типологии зданий и сооружений нового поколения, способствующих развитию человеческого потенциала.

1.11. Развитие теоретических и экспериментальных основ строительной физики как фактора обеспечения комфортности проживания, творчества и здоровой жизнедеятельности человека.

1.12. Фундаментальные основы архитектурной, градостроительной и строительной профессиональной культуры и образования.

1.13. Разработка теории архитектурного формообразования и композиции на основе достижений гуманитарных, естественных и технических наук с учетом внедрения прогрессивных строительных конструкций, новых материалов, технологий и инженерного оборудования.

1.14. Развитие теории и методов реконструкции исторической застройки, сохранения, реставрации, регенерации, воссоздания и использования архитектурно-градостроительного наследия как базовой составляющей культурного достояния нации.

1.15. Разработка теоретических основ проектирования зданий и сооружений нового поколения с учетом природно-климатических условий и региональных особенностей территорий строительства, обеспечения безопасности, энергоэффективности, экологичности, и комфортности.

1.16. Исследование исторических этапов и процессов развития архитектуры и градостроительства.

1.17. Выявление и анализ новейших направлений архитектурно-теоретической мысли и творческих концепций архитекторов.

1.18. Создание и развитие основ конструктивной безопасности и живучести строительной инфраструктуры, зданий и сооружений.

1.19. Разработка теоретических основ реконструкции и развития инженерной инфраструктуры городов и других поселений.

1.20. Материаловедение в строительстве, получение новых материалов с использованием нанотехнологий. Новые высокопрочные, сверхвысокопрочные, легкие, сверхлегкие и долговечные бетоны, и другие строительные композиционные и некомпозиционные материалы. Физико-механические и реологические модели новых материалов.

1.21. Теория сооружений, прогноз влияния повреждений и диссипации энергии силового воздействия. Разработка адекватных расчетных моделей. Разработка расчетных моделей с полным учетом различных факторов физической, геометрической, конструктивной (структурной) и генетической нелинейностей. Развитие численных и численно-аналитических методов расчетов строительных конструкций, зданий, сооружений и комплексов.

1.22. Научные основы использования света в архитектуре (естественное освещение, инсоляция и солнцезащита, искусственный свет).

2. Приоритетные направления развития прикладных наук и поисковых исследований

2.1. Обеспечение энерго- и ресурсоэффективности пространственного развития территорий, городов и сельских поселений в условиях глобализации.

2.2. Информационные технологии, математическое и компьютерное моделирование в архитектуре, градостроительстве и строительных науках.

2.3. Формирование и развитие комфортной биосферно-совместимой архитектурно-градостроительной среды жизнедеятельности.

2.4. Разработка научных основ и методологии системы оценок качества среды обитания человека.

2.5. Возобновление полноценной среды жизнедеятельности в экологически неблагоприятных поселениях.

2.6. Состояние водной отрасли Российской Федерации и разработка научно-практических рекомендаций по гарантированному обеспечению населения Российской Федерации питьевой водой требуемого качества в необходимом количестве, рациональному водопользованию.

2.7. Разработка типологии жилища с учетом всего спектра потребностей населения страны.

2.8. Экологические технологии в архитектуре, градостроительстве и строительстве в условиях Севера.

2.9. Разработка новых принципов и методов защиты территорий для предотвращения подтоплений территорий в условиях изменения климата.

2.10. Быстрое возведение и трансформация жилья.

2.11. Применение металлов, древесных материалов и стекла в строительстве.

2.12. Применение полимеров и композитов в строительстве.

2.13. Экологические переработка, рециклинг и утилизация техногенных и коммунальных образований и отходов.

2.14. Научное обоснование технических возможностей строительства зданий и сооружений с нулевым потреблением энергии.

2.15. Разработка научных основ экологической и энергетической эффективности в рамках концепции «зеленой» архитектуры.

2.16. Разработка и обоснование научной концепции системы нормативных документов в области энергоэффективности и экологичности зданий и сооружений.

2.17. Развитие научных основ и принципов экологической безопасности микроклимата жилых и общественных зданий.

2.18. Развитие научных основ и системы нормирования безопасности зданий и сооружений при техногенных и других экстремальных воздействиях.

2.19. Разработка методологии комплексного обследования технического, технологического, экологического, экономического состояния производственных объектов для выработки научно обоснованных рекомендаций по их реконструкции, модернизации или сносу. Энергетический и экологический аудит.

2.20. Разработка научных рекомендаций по реконструкции существующих, созданию и внедрению новых инженерных систем, обеспечивающих значительное сокращение энерго- и ресурсопотерь в застройке городов и других поселений, отдельных зданий и сооружений в эксплуатационный период.

2.21. Выполнение комплекса проектно-экспериментальных работ по созданию демонстрационных зон высокой энергетической эффективности в городах и других поселениях России на базе реконструируемой застройки.

2.22. Защита от шума, акустическое благоустройство.

2.23. Сохранение и восстановление нарушенных земель, ландшафтов, биоразнообразия и исторически сложившейся среды поселений.

2.24. Разработка научно обоснованных предложений по модернизации предприятий домостроения и производства строительных конструкций, изделий и материалов на перспективу и программы реконструкции и переориентации производственной базы.

2.25. Разработка научно обоснованных предложений по инженерным системам жизнеобеспечения жилых, гражданских и производственных объектов.

2.26. Разработка научно обоснованных предложений по строительным машинам и механизмам, оснастке, инструменту и транспортным средствам.

2.27. Выполнение комплексного анализа состояния жилищного строительства и разработка научных рекомендаций и образцов проектных решений по реконструкции жилых домов и районов жилой застройки, обеспечивающих улучшение качества жизни в различных регионах Российской Федерации.

2.28. Разработка инженерных решений и методов, обеспечивающих защиту зданий, сооружений и территорий застройки в условиях сейсмического воздействия, изменения климата, обводнения и тайфуноопасности с учетом утилизации и захоронения производственных, техногенных и твердых бытовых отходов.

2.29. Создание автоматизированной системы неразрушающего контроля строительных конструкций на стадиях их изготовления и при эксплуатации строительных объектов. Построение калибруемых прогнозных математических и компьютерных моделей в составе систем мониторинга на этапах возведения и эксплуатации строительных объектов.

2.30. Выполнение анализа существующих в отечественной и мировой практике эффективных локальных систем жизнеобеспечения жилых и производственных объектов и разработка научных рекомендаций по использованию имеющихся и разработке новых эффективных видов автономных установок паро-, водо-, электроснабжения, очистки воздуха, стоков и других, в том числе, на базе возобновляемых источников энергии.

2.31. Обеспечение эксплуатационной надежности строительных конструкций при максимальном снижении материалоемкости и совершенствовании технологии изготовления, монтажа и эксплуатации.

2.32. Выполнение комплекса исследований и проектно-конструкторских работ по проблеме переработки и вторичного использования строительных конструкций, изделий и материалов, получаемых в результате разборки и реконструкции зданий, а также техногенных минеральных отходов промышленных производств.

2.33. Выполнение экспериментальных научно-проектных разработок по решению актуальных архитектурно-градостроительных проблем на основе поискового проектирования.

2.34. Развитие экспериментальных методов и современной экспериментальной базы по обеспечению заданного качества строительных материалов и силового сопротивления конструкций и элементов зданий и сооружений.

2.35. Развитие экспериментальных методов и современной экспериментальной базы по определению теплофизических, акустических и светотехнических показателей строительных материалов, изделий, конструкций, помещений, зданий и сооружений.

2.36. Разработка методологических основ создания нового поколения нормативных и рекомендательных документов в сфере архитектуры, градостроительства и строительства.

2.37. Выполнение экспериментальных исследований и научно-проектных разработок новых типов пространственных конструкций из различных материалов для покрытий большепролетных зданий и сооружений.

2.38. Разработка технологий градостроительного прогнозирования-проектирования-программирования, как часть модернизации градостроительной деятельности.

2.39. Разработка научных основ программы реабилитации и развития монопрофильных городов Российской Федерации.

2.40. Научно-методическое обеспечение градостроительного развития Московской агломерации.

2.41. Развитие и верификация методов численного и экспериментального моделирования ветровых потоков, снеговых отложений, различных типов нагрузок на строительные объекты и распространений вредных выбросов для решения актуальных задач в области строительства, в том числе на основе развития алгоритмов вычислительной аэродинамики.



УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ ДМИТРИЙ ГЕОРГИЕВИЧ КОПАНИЦА

24 апреля 2017 года на 65 году ушел из жизни член-корреспондент РААСН, заведующий кафедрой металлических и деревянных конструкций Томского государственного архитектурно-строительного университета, профессор, доктор технических наук Дмитрий Георгиевич Копаница.

Вся жизнь Д.Г. Копаницы была неразрывно была связана с развитием строительной науки и отраслевого образования. В 1979 году он окончил Томский инженерно-строительный институт, в 1985 году защитил кандидатскую диссертацию в Московском инженерно-строительном институте, с 1985 года начал трудовую деятельность в Томском инженерно-строительном институте (позднее Томском государственном архитектурно-строительном университете (ТГАСУ)) в должностях старшего научного сотрудника, старшего преподавателя, доцента, заведующего кафедрой металлических и деревянных конструкций.

В 2003 году Д.Г. Копаница защитил докторскую диссертацию. На основе полученных экспериментальных и теоретических результатов исследований им был разработан метод и алгоритм расчета железобетонных пространственных конструкций на действие воздушной ударной волны, с учетом факторов физической нелинейности, включая появление и развитие трещин. Под руководством Д.Г. Копаницы на кафедре металлических и деревянных конструкций ТГАСУ была сформирована научная школа по исследованию поведения конструкций под действием высокоскоростных нагрузок, были защищены 5 кандидатских диссертаций.

Результаты исследований Д.Г. Копаницы были опубликованы в 5 монографиях, 170 статьях и материалах конференций, в 6 учебных пособиях. Им были разработаны методы компьютерного моделирования и экспериментальных исследований по ударной прочности бетонных и железобетонных колонн, плит, разнесенных конструкций на действие однократных и повторяющихся ударных нагрузок; решены задачи по ударной прочности плит из высокопрочных порошковых бетонов, армированных фиброй различного типа. Под руководством Д.Г. Копаницы был проведен комплекс динамических исследований универсальной полносборной каркасной конструктивной системы, разработанной специалистами ТГАСУ и ОАО «ТДСК».

Д.Г. Копаница являлся экспертом совета ВАК РФ по строительству и архитектуре и членом двух диссертационных советов по защитах докторских диссертаций, состоял в редколлегиях научных журналов «Вестник ТГАСУ» и «Сейсмостойкость и сейсмостойкое строительство», являлся председателем научно-экспертного совета Российского экологического фонда (ТЕХЭКО, Москва). Под его научным руководством был разработан комплекс методов и рекомендации по анализу жизненного цикла зданий и сооружений повышенной ответственности на основе процессного подхода и методов расчета строительных конструкций, которые использованы для выполнения ряда комплексных исследований причин крупных аварий на 24 энергетических и промышленных объектах России.

Д.Г. Копаница был награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации», отмечен благодарностями и Почетными грамотами Министерства образования и науки Российской Федерации, Администрации Томской области, неоднократно награждался благодарностями и Почетными грамотами университета.

21 апреля 2017 года на Общем собрании членов РААСН Дмитрий Георгиевич Копаница был избран членом-корреспондентом РААСН по Отделению строительных наук РААСН.

Уход из жизни Дмитрия Георгиевича Копаницы – невосполнимая потеря для строительной науки, а также и для каждого, кто знал его лично. Благодарная память о нем навсегда сохранится в сердцах его друзей, учеников и коллег.

*Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”*



К ЮБИЛЕЮ АЛЕКСАНДРА МИХАЙЛОВИЧА БЕЛОСТОЦКОГО

3 июня 2017 года исполнилось 65 лет заместителю главного редактора Международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”, члену-корреспонденту РААСН, профессору, доктору технических наук, Почетному работнику высшего профессионального образования Российской Федерации, генеральному директору ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» Александру Михайловичу Белостоцкому!

А.М. Белостоцкий является признанным специалистом в нашей стране и за рубежом в области математического моделирования, разработки, исследования и использования численных методов и программно-алгоритмических комплексов расчета нагрузок и воздействий, состояний, прочности и устойчивости уникальных конструкций, зданий и сооружений для стадий проектирования, строительства, эксплуатации (мониторинга) и экспертизы. Разработал, верифицировал и внедрил в практику исследований оригинальные модели, численные методы и реализующие программные комплексы температурного, статического и динамического расчета пространственных строительных систем большой размерности с учетом эффектов физической, геометрической, структурной и генетической нелинейности. Под его руководством выполнены и прошли государственную экспертизу расчетные исследования нагрузок и воздействий, напряженно-деформированного состояния, динамики, прочности и устойчивости ряда высотных зданий Москвы, Санкт-Петербурга, Нижнего Новгорода, Владивостока и Краснодара, Центрального стадиона, Большой ледовой арены, санно-бобслейной трассы и трамплинного комплекса Олимпиады Сочи-2014, стадиона «Лужники», стадионов для проведения Чемпионата мира по футболу-2018 – «Спартак» (Москва), «Зенит» (С-Петербург), в Самаре, Нижнем Новгороде, Волгограде, Ростове-на-Дону и Екатеринбурге, основных сооружений ряда атомных (с реакторами РБМК, ВВЭР, нового поколения) и гидроэлектростанций (арочные, гравитационные, грунтовые плотины), многих других уникальных и ответственных объектов.

А.М. Белостоцкий является профессором кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ), профессором кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика»

Пермского национального исследовательского политехнического университета, руководителем Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, соруководителем крупной Научной школы Московского инженерно-строительного института (МИСИ) им. В.В. Куйбышева – Московского государственного строительного университета «Численное и экспериментальное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства», членом диссертационного совета Национального исследовательского университета «МЭИ», Ученого совета РААСН и Научных советов РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре» и «Строительство объектов энергетики», секций Экспертного Совета по аттестации программных средств, используемых в атомной энергетике (при Ростехнадзоре), членом редакционного совета журнала РААСН «ACADEMIA. Архитектура и строительство».

Желаем Александру Михайловичу дальнейших творческих успехов, активной жизненной позиции, доброго здоровья, счастья и удачи!

*Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”*