DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-121-127

ВАРИАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПЛАСТИН С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНТУРОМ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА РЕЛЕЯ – РИТЦА

Г.А. Мануйлов

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Для тонких упругих пластин произвольного очертания с гладким защемленным или шарнирно опертым контуром на основе модифицированного метода Релея-Ритца получены явные выражения для приближенных значений максимального прогиба от равномерно распределенной нагрузки, прогиба в точке приложения сосредоточенной силы, критической силы равномерного сжатия и основной частоты собственных колебаний. Поперечные перемещения аппроксимировались специальными функциями, имеющими линии уровня, подобные контуру пластины. Приведены результаты расчета пластины в форме грушевидного овала, которые хорошо согласуются с двусторонними геометрическими оценками соответствующих решений.

Ключевые слова: метод Релея-Ритца, прогиб, частота собственных колебаний, потеря устойчивости, пластина

THE APPROXIMATE SOLUTION FOR PLATES USING MODIFIED RAYLEIGH-RITZ METHOD

Gaik A. Manuylov

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: For thin elastic plates of arbitrary shape with a smooth pinched or hinged contour based on the modified Rayleigh-Ritz method, explicit expressions are obtained for the approximate values of the maximum deflection from a uniformly distributed load, the deflection at the point of application of the concentrated force, the critical force of uniform compression, and the first eigenfrequency. The lateral movements were approximated by special functions having level lines similar to the plate contour. The results of calculating the plate in the form of a pear-shaped oval are presented, which are in good agreement with the two-sided geometric estimates of the corresponding solutions.

Keywords: Rayleigh-Ritz method, deflection, eigenfrequency, loss of stability, plate

Рассмотрим возможности получения вариационно-геометрических оценок максимального прогиба W_q от действия равномерно распределенной нагрузки q , прогиба W_{PP} под сосредоточенной силой P , критической силы равномерного сжатия N_{KP} и основной частоты колебаний ω_1 . Будем определять указанные элементы решений для защемленных и шарнирно опертых пластин, ограниченных гладким выпуклым контуром Γ по известным вариационным представлениям.

$$W_q = \iint q \cdot f(x, y) dA / 2n_{\mathcal{G}}(f(x, y)); \quad (1)$$

$$\omega_1^2 = \min \{ 2n_{\mathcal{G}}(f(x, y)) / \iint f^2(x, y) dA \}; \quad (1a)$$

$$W_{PP} = \max \{ P / 2n_{\mathcal{G}}(f(x, y)) \}; \quad (2)$$

$$N_{KP} = \min \left\{ \frac{2n_{\mathcal{G}}(f(x, y))}{\iint grad^2 f(x, y) dA} \right\}. \quad (2a)$$

Здесь $f(x, y)$ – «единичные» функции ($0 \leq f(x, y) \leq 1$), удовлетворяющие граничным условиям защемления или шарнир-

ного опирания; Δ – оператор Лапласа; Π_0 – потенциальная энергия упругой деформации; dA – элемент площади пластины.

При этом

$$W_q(x, y) = W_q \cdot f(x, y);$$

$$W_p(x, y) = W_{pp} \cdot f(x, y).$$

Для получения приближенных значений рассматриваемых прогибов, а также критической силы и основной частоты колебаний применим модифицированный метод Релея-Ритца, в котором используются как «допустимые функции сравнения», некоторые функции $f^*(x, y)$, имеющие линии уровня, подобные контуру пластины, и подобно расположенные с центром подобия в начале координат. Это позволяет двумерную задачу свести к одномерной, поскольку такие функции имеют вид

$$f^*(x, y) = g(t/r(\varphi)) = g(\rho), \quad (0 \leq \rho \leq 1),$$

где $r(\varphi)$ – полярное уравнение контура Γ с центром в начале координат; $g(\rho)$ – функция, управляющая законом распределения линий уровня от «центра» к периферии. Впервые эти функции были применены Д.Полиа и Г.Сеге [1] в задачах о колебаниях закрепленных мембран и кручении стержней. Для интегралов от функции типа $f^*(x, y)$, входящих в выражения (1,2), ими были получены следующие выражения

$$\iint f^*(x, y) dA = 2A \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho,$$

$$\iint f^{*2}(x, y) dA = 2A \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho,$$

$$\iint \text{grad}^2 f^*(x, y) dA = B \int_0^1 g^{\odot 2}(\rho) d\rho,$$

$$B = \int_0^{2\pi} (1 + r^{\odot 2}(\varphi) / r^2(\varphi)) d\varphi \geq 2\pi$$

Здесь B – характеристика правильности формы пластины.

Развивая идеи работы [1], В.И. Коробко [2] вывел важную формулу для интеграла от квадрата лапласиана функции $f^*(x, y)$ в полярных координатах

$$D \iint (\Delta f^*(x, y))^2 dA = D(J_1 \int_0^1 g'^2 \rho d\rho + J_2 \int_0^1 2g' g'' \rho d\rho + J_3 \int_0^1 (g'^2 / \rho) d\rho), \quad (3)$$

где J_1, J_2, J_3 – интегралы по замкнутому контуру ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $r = r(\varphi)$,

$$J_1 = \int (1 + r'^2 / r^2)^2 d\varphi / r^2, \quad (4)$$

$$J_2 = \int (1 + r'^2 / r^2)(1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r) d\varphi / r^2, \quad (4a)$$

$$J_3 = \int (1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r)^2 d\varphi / r^2. \quad (5)$$

В расчетах пластин эти формулы, насколько известно автору, до сих пор не применялись; В.И. Коробко пошел дальше, и с помощью неравенства Коши-Буняковского получил интересную изопериметрическую оценку

$$D \iint (\Delta f^*(x, y))^2 dA \approx D(B^2 / 2A) \cdot \int_0^1 (g'^2 \rho + 2g' g'' + g'^2 / \rho) d\rho \quad (6)$$

Равенство здесь достигается для круглых пластин и в некоторых задачах изгиба защемленных эллиптических пластин.

Отметим, что равенство (3) дает представление потенциальной энергии защемленных пластин с гладким контуром, если деформация изгиба задается «единичной» функцией типа $f^*(x, y)$. При этом второй член правой части равен нулю. Для пластин с гладким шарнирно опертым контуром выведем ана-

логичную формулу при помощи известного выражения

$$2\Pi_{\mathfrak{O}} = D \iint (\Delta f)^2 dA - 2(1-\nu) \iint (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) dA, \quad (7)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, ν – коэффициент Пуассона; индексами отмечены вторые производные по x и по y . Второй интеграл в этой формуле есть интеграл от гауссовой кривизны поверхности прогибов пластины; он равен нулю для любых пластин с заштрихованным контуром, а также для полигональных пластин с шарнирно опертым контуром. Поэтому для таких пластин в выражении потенциальной энергии упругой деформации остается только интеграл от квадрата лапласиана. Для шарнирно опертых пластин с кусочно-гладким криволинейным контуром интеграл от гауссовой кривизны не равен нулю; имеются пластины с гладким контуром, поверхность прогибов которых при действии ряда нагрузок оказывается всюду выпуклой. В связи с этим для дальнейшего второй интеграл в (7) удобно преобразовать в контурный (М.Ш. Бирман, [3, 4]). Будем иметь

$$2n_{\mathfrak{O}} = D \iint (\Delta f)^2 dA - (1-\nu) \oint \frac{\mathcal{F}(s)^2}{\partial n} \cdot \frac{ds}{R(s)}, \quad (8)$$

где $R(s)$ – радиус кривизны контура, $\mathcal{F}(s)/\partial n$ – производная по нормали к контуру (угол поворота), ds – элемент дуги контура:

$$ds = r \cdot d\varphi \sqrt{1 + r'^2 / r^2}.$$

Чтобы получить для величины $2\Pi_{\mathfrak{O}}(f^*)$ выражение, аналогичное (3), воспользуемся следующими соотношениями

$$\frac{1}{R(s)} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r}{r(1 + r'^2 / r^2)^{3/2}};$$

$$\left(\frac{\mathcal{F}^*}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{F}^*}{\partial}\right)^2 = g'^2 \left(\frac{t}{r} = 1\right) \cdot \frac{1}{r^2} = g'^2(1) \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Подстановка этих соотношений в (7) дает выражение $2\Pi_{\mathfrak{O}}(f^*)$ для шарнирно опертых пластин с гладким контуром, аналогичное (3):

$$2n_{\mathfrak{O}}(f^*) = D(J_1 \cdot \int_0^1 g'^2 \rho d\rho + J_2 \cdot \int_0^1 2g'g'' d\rho + J_3 \cdot \int_0^1 (g'^2 / \rho) d\rho - J_4(1-\nu) \cdot g'^2(1)), \quad (9)$$

где интегралы J_1, J_2, J_3 вычисляются согласно (4,5); интеграл J_4 имеет вид

$$J_4 = \oint (1 + 2r'^2 / r^2 - r' / r) d\varphi / r^2 (1 + r'^2 / r^2).$$

Использование формул (3, 9) для получения приближенных значений функционалов (1,2) требует предварительного исследования области их возможного корректного применения. Дело в том, что на прямолинейных участках контура интегралы J_2, J_3 и J_4 равны нулю, поскольку в ноль обращается выражение

$$1 + 2r'^2 / r^2 - r' / r,$$

стоящее в числителе формулы для кривизны контура. Поэтому для полигональных пластин в соотношениях (3) и (9) для $2\Pi_{\mathfrak{O}}(f^*)$ остается только интеграл J_1 , а линии уровня функций типа $f^*(x,y)$ оказываются замкнутыми многоугольниками. Функции с такими линиями уровня использовались авторами [1] в задачах о колебаниях мембран многоугольной формы и кручении стержней с многоугольными сечениями. Казалось бы, что и для многоугольных пластин подобные функции также являются допустимыми. На самом деле функции $f^*(x,y)$ с линиями

уровня в виде замкнутых многоугольников не могут принадлежать области определения функционалов (1,2) для пластин, поскольку в ряде задач применение таких функции приводит к нарушению соответствующих вариационных принципов. Например, для квадратной защемленной пластины при использовании в качестве собственной формы функции $f^*(x,y)$ с квадратными линиями уровня вычисленная основная частота собственных колебаний оказалась меньше точной:

$$\omega_1^* = 34,29\sqrt{D/m/a^2}$$

вместо

$$\omega_1 = 35,985\sqrt{D/m/a^2}.$$

Точно также при вычислении критической силы равномерного сжатия для защемленной квадратной пластины было получено

$$N_{KP}^* = 38,07D/a^2$$

вместо точного значения

$$N_{KP} = 52,344D/a^2$$

(a – сторона квадрата).

Есть и еще одно соображение, которое указывает на неприменимость функции $f^*(x,y)$ с линиями уровня в виде замкнутых кусочно гладких кривых с угловыми точками для получения вариационных оценок решений в бигармонических задачах, связанных с пластинами. Такие функции имеют ребристую поверхность с линиями сосредоточенных кривизн, идущих от вершины “холма” функции $f^*(x,y)$ к каждой угловой точке контура Γ . Вдоль ребра первая производная по нормали будет ступенчатой функцией, а вторая производная $\partial^2 f^* / \partial n^2$ “на ребре” оказывается δ – функцией. В выражения потенциальной энергии упругой деформации

(3,9) входят интегралы от квадратов вторых производных. Но операции возведения δ – функции в квадрат и интегрирования этого квадрата в математике не определены (на это обстоятельство внимание автора обратил А.А. Космодемьянский).

Из сказанного вытекает, что выражения (3) и (9) для $2\Pi_2(f^*)$ корректны только в случае гладкого контура (возможно, частично прямолинейного [5, 6]).

Что касается неравенства (6), то оно справедливо только для областей, ограниченных гладким, всюду криволинейным звездным контуром, поскольку лишь для таких замкнутых контуров справедливо равенство [7]

$$B = \oint_{2\pi} (1 + r'^2 / r^2) d\varphi = \oint_{2\pi} (1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r) d\varphi.$$

При вычислении оценок существенным оказывается выбор функций $g(\rho)$. Наилучшие результаты дают функции, являющиеся точными (или почти точными) решениями соответствующих задач для круглых пластин. Поэтому в оценках прогибов W_q и W_{pp} используем известные точные решения. Для защемленного контура:

$$g_q(\rho) = (1 - \rho^2)^2;$$

$$g_p(\rho) = 1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln \rho.$$

Для шарнирно опертого контура:

$$g_q(\rho) = 1 - \rho^2(6 + 2\nu)/(5 + \nu) + \rho^4(1 + \nu)/(5 + \nu);$$

$$g_p(\rho) = 1 - \rho^2 + 2\rho^2(1 + \nu) \ln \rho / (3 + \nu).$$

В оценках критической силы N_{KP} защемленных пластин использовалось точное решение, выраженное через функцию Бесселя.

$$J_0(x) - (g(\rho) = 1 - J_0(\lambda_1 \rho) / J_0(\lambda_1));$$

($\lambda_1 = 3,831706$). При шарнирном опирании контура в качестве $g(\rho)$ приближенно принималась функция $g_q(\rho)$. Эта же функция использовалась и при определении основной частоты колебаний ω_1 . В случае защемленного контура в этой задаче использовалось «достаточно хорошее» приближенное решение [8]

$$g(\rho) = (1 - \rho^2)^2 + 0,325(1 - \rho^2)^3.$$

Окончательно вариационно-геометрические оценки W_q, W_{pp}, N_{kp} и ω_1 для защемленных пластин с гладким контуром запишутся так

$$\tilde{W}_q = qA / D(24J_1 + 8J_3) \approx W_q \quad (10)$$

$$\tilde{W}_{pp} = P / 4D(J_1 + J_3) \leq W_{pp} \quad (11)$$

$$\tilde{N}_{kp} = D(9,5173 \cdot J_1 + 5,16468 \cdot J_3) / B \geq N_{kp} \quad (12)$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = D(36,7436 \cdot J_1 + 15,4488 \cdot J_3) / mA \geq \omega_1^2 \quad (13)$$

Для шарнирно опертых пластин с гладким контуром эти оценки имеют вид

$$\tilde{W}_q = \frac{qA(7 + \nu)(5 + \nu)}{D \cdot [24(3 + \nu^2)J_1 + 192 \cdot J_2 + 8(19 + 8\nu + \nu^2)J_3 - 192(1 - \nu)J_4]} \approx W_q \quad (14)$$

$$\tilde{W}_{pp} = \frac{P(3 + \nu)^2}{4D \cdot [(1 + \nu^2)J_1 + 4 \cdot J_2 + (5 + 4\nu + \nu^2)J_3 - 4(1 - \nu)J_4]} \leq W_{pp} \quad (15)$$

$$\tilde{N}_{kp} = \frac{D \cdot [12(3 + \nu^2)J_1 + 96 \cdot J_2 + B(33 + 10\nu + \nu^2) + 4(19 + 8\nu + \nu^2)J_3 - 96(1 - \nu)J_4]}{B} > N_{kp} \quad (16)$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{D[24(3 + \nu^2)J_1 + 192 \cdot J_2 + mA(22,6 + 7,2\nu + 0,6\nu^2) + 8(19 + 8\nu + \nu^2)J_3 - 192(1 - \nu)J_4]}{mA} > \omega_1^2 \quad (17)$$

Отметим, что интегралы $J_1 - J_4$ - размерные величины,

$$J_k = \bar{J}_k / [L]^2,$$

и для их вычисления (как правило, численного) необходимо иметь полярное уравнение контура пластины $r = r(\varphi)$. Если Γ -окружность радиуса R , и начало координат помещено в ее центре, то

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 2\pi / R^2.$$

Если же начало координат смещено от центра на расстояние

$$a = \xi R$$

так, что $r(0) > R$, то получим

$$J_1 = R^{-2} \int \frac{d\varphi}{(1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^2 [\xi \cos \varphi + (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}]^2}, \quad (18)$$

$$J_2 = R^{-2} \int \frac{d\varphi}{(1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} [\xi \cos \varphi + (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}]^2}, \quad (19)$$

$$J_3 = R^{-2} \int d\varphi / (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^3, \quad (20)$$

$$J_4 = R^{-2} \int \frac{d\varphi}{[\xi \cos \varphi + (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}](1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2). \quad (21)$$

В частном случае при $\xi = 1$ интегралы оказываются табличными. Для эллиптических контуров с началом координат в центре эллипса были также выведены формулы для интегралов $J_1 - J_4$. При интегрировании по замкнутому контуру эллипса для интегралов J_1 и J_3 получено конечное представление

$$J_1 = J_3 = (0,75 \cdot B^2 - \pi^2) / A, \\ A = \pi ab, \\ B = \pi(a/b + b/a),$$

где a и b – полуоси эллипса. Для этого использованы результаты работы [2]. Для прямолинейного участка контура

$$J_2=J_3=J_4=0, J_1 = (tg\varphi_2 - tg\varphi_1)/a^2$$

(a – расстояние от начала координат до прямой, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$).

В заключение приведем приближенные значения решений W_q , W_{pp} , N_{kp} и ω_1 для пластины в виде грушевидного овала, ограниченного двумя дугами окружностей (с радиусами R и $0,5R$), соединенных между собой двумя касательными прямыми. Дуга большего радиуса охватывает угол 240° , меньшего – 120° ; расстояние между центрами дуг $0,5R$; начало координат (предполагаемая точка максимума прогибов) принято на расстоянии $0,15R$ от центра большей дуги. Площадь овала $A=3,441216R^2$, характеристика $B=6,810055$. В случае защемленного контура приближения согласно (10-13), (18-21), и двусторонние оценки имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{W}_q &= 0,001453 qA^2 / D ; \\ (0,001394 < W_q < 0,001583) qA^2 / D ; \\ \tilde{W}_{pp} &= 0,01921 PR^2 / D ; \\ (0,01989 < W_{pp} < 0,02179) PR^2 / D ; \\ \tilde{N}_{kp} &= 13,698 D / R^2 ; \\ (13,404 < N_{kp} < 14,682) D / R^2 ; \\ \tilde{\omega}_1 &= 9,7714(D/m)^{1/2} / R^2 ; \\ (9,3256 < \omega_1 < 10,215)(D/m)^{1/2} / R^2 .\end{aligned}$$

Аналогичные двусторонние оценки и приближенные решения на основе (14)-(17) и (18)-(21) были получены и для шарнирно опертого овала (при $\nu = 0,3$)

$$\begin{aligned}\tilde{W}_q &= 0,0666 qR^4 / D ; \\ (0,0637 < W_q < 0,07643) qR^4 / D ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{pp} &= 0,04697 PR^2 / D ; \\ (0,0505 < W_{pp} < 0,05532) PR^2 / D ; \\ \tilde{N}_{kp} &= 4,0437 D / R^2 ; \\ (3,8311 < N_{kp} < 4,1965) D / R^2 ; \\ \tilde{\omega}_1 &= 4,8385(D/m)^{1/2} / R^2 ; \\ (4,5074 < \omega_1 < 4,9373)(D/m)^{1/2} / R^2 .\end{aligned}$$

В качестве двусторонних оценок принимались решения для круглых пластин, одна из которых имеет радиус, равный R , а другая равновеликая с данным овалом. Как видно из сопоставления почти все приближенные решения попали в интервалы двусторонних оценок. Более грубыми оказались приближения для прогиба под сосредоточенной силой при условиях шарнирного опирания. Возможно, что это объясняется несовпадением точки максимального прогиба $\max W_{pp}$ и начала координат [9, 10]. Для эллиптических пластин приближенные решения согласно (10)-(13) и (14)-(17) были также весьма близки к известным решениям или соответствующим оценкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поля Г., Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
2. **Коробко В.И.** Изопериметрические неравенства в строительной механике пластинок. – М.: Стройиздат, 1993. – 208 с.
3. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. – М.: ГТТИ, 1957. – 476 с.
4. **Van Gorder R.A.** Asymptotic solutions for the Föppl – von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 91, May 2017, Pages 8-21.

5. **Faroughi Sh., Goushegir S.M.H., Haddad Khodaparast H., Friswell M.I.** Nonlocal elasticity in plates using novel trial functions // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 130, 2017, pp. 221-233.
6. **Oliveri V., Milazzo A.** A Rayleigh-Ritz approach for postbuckling analysis of variable angle tow composite stiffened panels // *Computers & Structures*, Vol. 196, 2018, pp. 263-276
7. **Ржаницын А.Р.** Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. – М.: Стройиздат, 1954. – 285 с.
8. **Канторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
9. **Мануйлов Г.А.** Приближенные оценки решений для пластин на основе модифицированного метода Релея-Ритца. // Вестник МИИТа. Научно-технический журнал: МИИТ, Вып. 3, 2000, с. 111-115.
10. **Pradhan K.K., Chakraverty S.** Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, Iss. 3, 2015, pp. 721-734.

REFERENCES

1. **Polia G., Sege G.** Izoperimetricheskiye neravenstva v matematicheskoy fizike [Isoperimetric inequalities in mathematical physics]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 336 pages.
2. **Korobko V.I.** Izoperimetricheskiye neravenstva v stroitel'noy mekhanike platinok [Isoperimetric inequalities in the structural mechanics of plates]. Moscow, Stroyizdat, 1993, 208 pages.
3. **Mikhlin S.G.** Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, GTTI. 1957, 476 pages.
4. **Van Gorder R.A.** Asymptotic solutions for the Föppl – von Kármán equations

governing deflections of thin axisymmetric annular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 91, May 2017, Pages 8-21.

5. **Faroughi Sh., Goushegir S.M.H., Haddad Khodaparast H., Friswell M.I.** Nonlocal elasticity in plates using novel trial functions // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 130, 2017, pp. 221-233.
6. **Oliveri V., Milazzo A.** A Rayleigh-Ritz approach for postbuckling analysis of variable angle tow composite stiffened panels // *Computers & Structures*, Vol. 196, 2018, pp. 263-276
7. **Rzhanitsyn A.R.** Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov [Structural analysis with allowance for plastic properties of materials]. Moscow, Stroyizdat, 1954, 285 pages.
8. **Kantorovich L.V., Krylov V.I.** Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 708 pages.
9. **Manuylov G.A.** Priblizhennyye otsenki resheniy dlya platin na osnove modifitsirovannogo metoda Releya-Rittsa [Approximate estimates of solutions for plates based on the modified Rayleigh-Ritz method] // *Vestnik MIITa. Nauchnotekhnicheskij zhurnal*: MIIT, No. 3m 2000, pp. 111-115.
10. **Pradhan K.K., Chakraverty S.** Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, Iss. 3, 2015, pp. 721-734.

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика» Российский университет транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 972-49-81

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax +7(499)972-49-81.