DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-14-36

О РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 2: ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

П.А. Акимов[1,2,3,4,5], А.М. Белостоцкий[2,3,4,5,6,7], Т.Б. Кайтуков[1], О.А. Негрозов[1,5,8]

[1] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[2] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
[3] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[4] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ
[5] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[6] Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ
[7] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ
[8] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Как известно, постановка многоточечной краевой задачи включает три основные составляющие: описание области, занимаемой конструкцией и соответствующих подобластей; описание условий внутри области, т.е. внутри соответствующих подобластей; описание условий на границе области, т.е. условий на границах «стыковки» подобластей. Данная статья является продолжением другой, опубликованной ранее работы, в которой рассматривались постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Отметим, что аппроксимация в пределах фрагментов конструкции, имеющих регулярные физико-геометрические параметры по одному из направлений, целесообразно проводить на основе дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), а для аппроксимации всех остальных фрагментов следует использовать стандартный метод конечных элементов (МКЭ). В настоящей публикации приводятся адаптированные для алгоритмической реализации формулы определения перемещений, производных от перемещений, деформаций и напряжений в рамках конечноэлементной модели (причем как в пределах конечного элемента, так и соответствующие узловые значения с учетом осреднения), проводится анализ вариантов условий стыковки на границах подобластей (соответственно дискретных моделей и дискретно-континуальных моделей и условия типа «шарнирное опирание», «свободных край», «идеальный контакт» (в общей сложности выделено двенадцать основных (базовых) вариантов стыковок, к которым сводятся большинство возникающих на практике условий)), для каждого из таких случаев представлены адаптированные для алгоритмической реализации формулы вычисления элементов соответствующих матриц коэффициентов и векторов правых частей.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, двумерные задачи, постановки задач, аппроксимация, многоточечная краевая задача

ABOUT SOLUTION OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL

FINITE ELEMENT METHOD PART 2: SPECIAL ASPECTS OF FINITE ELEMENT APPROXIMATION AND BOUNDARY CONDITIONS

Pavel A. Akimov[1,2,3,4,5], Alexander M. Belostotsky[2,3,4,5,6,7], Taymuraz B. Kaytukov[1], Oleg A. Negrozov[1,5,8]

[1] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[2] Scientific Research Center "StaDyO", Moscow, RUSSIA
[3] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[4] Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA
[5] Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[6] Russian University of Transport» (RUT – MIIT), Moscow, RUSSIA
[7] Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA
[8] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: As is well known, the formulation of a multipoint boundary problem involves three main components: a description of the domain occupied by the structure and the corresponding subdomains; description of the conditions inside the domain and inside the corresponding subdomains, the description of the conditions on the boundary of the domain, conditions on the boundaries between subdomains. This paper is a continuation of another work published earlier, in which the formulation and general principles of the approximation of the multipoint boundary problem of a static analysis of deep beam on the basis of the joint application of the finite element method and the discrete-continual finite element method were considered. It should be noted that the approximation within the fragments of a domain that have regular physical-geometric parameters along one of the directions is expedient to be carried out on the basis of the discrete-continual finite element method (DCFEM), and for the approximation of all other fragments it is necessary to use the standard finite element method (FEM). In the present publication, the formulas for the computing of displacements partial derivatives of displacements, strains and stresses within the finite element model (both within the finite element and the corresponding nodal values (with the use of averaging)) are presented. Boundary conditions between subdomains (respectively, discrete models and discrete-continual models and typical conditions such as "hinged support", "free edge", "perfect contact" (twelve basic (basic) variants are available)) are under consideration as well. Governing formulas for computing of elements of the corresponding matrices of coefficients and vectors of the right-hand sides are given for each variant. All formulas are fully adapted for algorithmic implementation.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, two-dimensional problems, formulation of problems, approximation, multipoint boundary problem

1. ЛОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРЕДЕЛАХ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА. ВОСПОЛНЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ

Рассмотрим произвольный (k,i,j)-й конечный элемент (рис. 1.1). На элементе вводится локальная система координат (координаты t_1 и t_2), при этом $t_1 \in [0,1]$; $t_2 \in [0,1]$.

Имеет место следующее соответствие глобальных и локальных координат узлов элемента:

$$(x_{1,i}, x_{2,k,j}) \Rightarrow (0,0); \quad (1.1)$$

$$(x_{1,i+1}, x_{2,k,j}) \Rightarrow (1,0); \quad (1.2)$$

$$(x_{1,i}, x_{2,k,j+1}) \Rightarrow (0,1); \quad (1.3)$$

$$(x_{1,i+1}, x_{2,k,j+1}) \Rightarrow (1,1). \quad (1.4)$$

Пусть $\bar{t} = [\, t_1 \quad t_2 \,]^T$ и $\bar{x} = [\, x_1 \quad x_2 \,]^T$ – векторы координат произвольной точки дискретно-континуального конечного элемента в локальной и исходной глобальной системах координат.

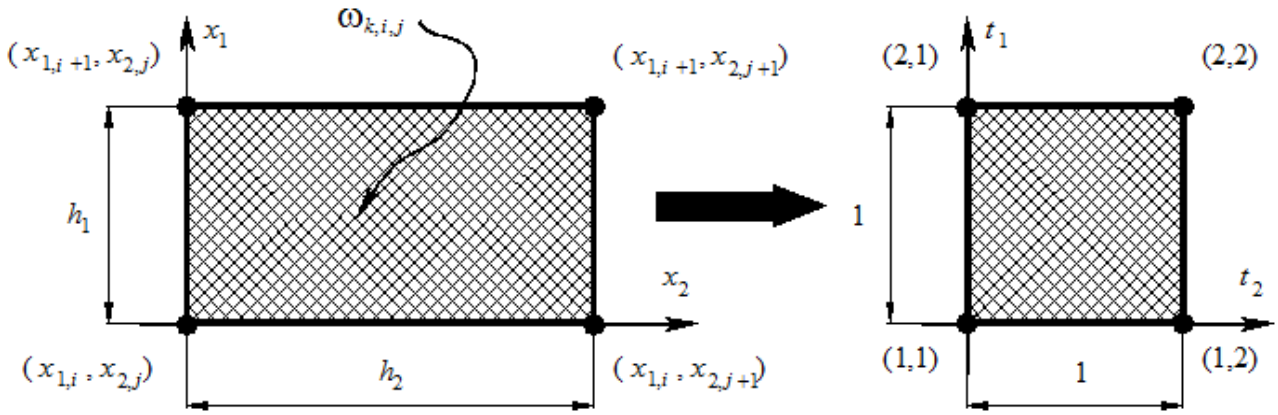

Рисунок 1.1. Переход к локальной системе координат на конечном элементе.

Формула преобразования координат на элементе (рис. 1.1):

$$\bar{x}(t_1,t_2) = \bar{x}_n^{(k,i,j)} + t_1\Delta_1\bar{x}^{(k,i,j)} + t_2\Delta_2\bar{x}^{(k,i,j)} + t_1t_2\Delta_{12}\bar{x}^{(k,i,j)}, \quad (1.5)$$

где
$$\Delta_1\bar{x}^{(k,i,j)} = \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.6)$$
$$\Delta_2\bar{x}^{(k,i,j)} = \bar{x}_n^{(k,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.7)$$
$$\Delta_{12}\bar{x}^{(k,i,j)} = \bar{x}_n^{(k,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \Delta_2\bar{x}^{(k,i,j)}. \quad (1.8)$$

Поясним, что

$$\bar{x}_n^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i,j)} \\ x_2^{(k,i,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,k,j} \end{bmatrix}; \quad (1.9)$$
$$\bar{x}_n^{(k,i+1,j)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i+1,j)} \\ x_2^{(k,i+1,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1} \\ x_{2,k,j} \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$
$$\bar{x}_n^{(k,i,j+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i,j+1)} \\ x_2^{(k,i,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,k,j+1} \end{bmatrix}; \quad (1.11)$$
$$\bar{x}_n^{(k,i+1,j+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i+1,j+1)} \\ x_2^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1} \\ x_{2,k,j+1} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Здесь $\bar{x}_n^{(k,i,j)}, \bar{t}_n^{(k,i,j)}$ – векторы координат (k,i,j)-го узла элемента в глобальной и локальной системах координат соответственно.

Формула восполнения перемещений на элементе [1-3]:

$$\bar{u}^{(k)}(t_1,t_2) = \bar{u}_n^{(k,i,j)} + t_1\Delta_1\bar{u}^{(k,i,j)} + t_2\Delta_2\bar{u}^{(k,i,j)} + t_1t_2\Delta_{12}\bar{u}^{(k,i,j)}, \quad (1.13)$$

где
$$\Delta_1\bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i+1,j)} - \bar{u}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.14)$$
$$\Delta_2\bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i,j+1)} - \bar{u}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.15)$$
$$\Delta_{12}\bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i+1,j+1)} - \bar{u}_n^{(k,i+1,j)} - \Delta_2\bar{u}^{(k,i,j)} \quad (1.16)$$

(верхний индекс «(k)», следуя [1-3], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$).

Функциональная матрица $\mathrm{B}(t_1,t_2)$ имеет вид:

$$\mathrm{B}_{k,i,j}(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2) & \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2) \\ \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2) & \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2) \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где
$$\beta_{p,q}^{(k.i.j)}(t_1,t_2) = \Delta_q x_p^{(k,i,j)} - t_{3-q}\Delta_{12}x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1,2;\ q=1,2; \quad (1.18)$$
$$\Delta_1 x_p^{(k,i,j)} = x_p^{(k,i+1,j)} - x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1,2; \quad (1.19)$$
$$\Delta_2 x_p^{(k,i,j)} = x_p^{(k,i,j+1)} - x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1,2; \quad (1.20)$$
$$\Delta_{12}x_p^{(k,i,j)} = x_p^{(k,i+1,j+1)} - x_p^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1,2. \quad (1.21)$$

Формула вычисления определителя:

$$J_{k,i,j}(t_1,t_2) = \det[\Lambda_{k,i,j}(t_1,t_2)] = \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)\beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2) - \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)\beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2). \quad (1.22)$$

Матрица Якоби $\Lambda_{k,i,j}(t_1,t_2)$, определяемая формулой

$$\Lambda_{k,i,j}(t_1,t_2) = \mathrm{B}_{k,i,j}^{-1}(t_1,t_2), \quad (1.23)$$

имеет вид

$$\Lambda_{k,i,j}(t_1,t_2)=\begin{bmatrix}\alpha_{1,1}^{(k.i.j)}(t_1,t_2) & \alpha_{1,2}^{(k.i.j)}(t_1,t_2)\\ \alpha_{2,1}^{(k.i.j)}(t_1,t_2) & \alpha_{2,2}^{(k.i.j)}(t_1,t_2)\end{bmatrix}, \tag{1.24}$$

где
$$\alpha_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)=\frac{\beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)}{J_{k,i,j}(t_1,t_2)}; \tag{1.25}$$

$$\alpha_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)=-\frac{\beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)}{J_{k,i,j}(t_1,t_2)}; \tag{1.26}$$

$$\alpha_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)=-\frac{\beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)}{J_{k,i,j}(t_1,t_2)}; \tag{1.27}$$

$$\alpha_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)=\frac{\beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)}{J_{k,i,j}(t_1,t_2)}. \tag{1.28}$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЕДЕЛАХ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Частные производные от перемещений по переменным t_1 и t_2 определяются по следующим формулам:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_p}\overline{u}^{(k)}\right]_{(x_1,x_2)\in\omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1,t_2)= \\ =\Delta_p\overline{u}^{(k,i,j)}+t_{3-p}\Delta_{12}\overline{u}^{(k,i,j)},\quad p=1,2. \tag{2.1}$$

Формула определения частных производных от перемещений по переменным x_1 и x_2 имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_p}\overline{u}^{(k)}\right]_{(x_1,x_2)\in\omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1,t_2)= \\ =\sum_{q=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial t_q}\overline{u}^{(k)}\right]_{(x_1,x_2)\in\omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1,t_2)\alpha_{q,p}^{(k,i,j)}(t_1,t_2), \tag{2.2}$$
$$p=1,2.$$

Формула для компонентов тензора деформаций на элементе (в рамках двумерной теории упругости [4-21]):

$$\varepsilon_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)= \\ =\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_q}u_p^{(k)}\right]_{(x_1,x_2)\in\omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1,t_2)+\right. \\ \left.+\left[\frac{\partial}{\partial x_p}u_q^{(k)}\right]_{(x_1,x_2)\in\omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1,t_2)\right),\quad p=1,2;\quad q=1,2. \tag{2.3}$$

Формула для объемной деформации [1-3]:

$$\varepsilon^{(k,i,j)}(t_1,t_2)=\sum_{p=1}^{2}\varepsilon_{p,p}^{(k,i,j)}(t_1,t_2). \tag{2.4}$$

Формула для компонентов тензора напряжений на элементе [1-3]:

$$\sigma_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1,t_2)=\delta_{p,q}\overline{\lambda}_{k,i,j}\varepsilon^{(k,i,j)}(t_1,t_2)+ \\ +2\overline{\mu}_{k,i,j}\varepsilon_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1,t_2), \\ p=1,2;\ q=1,2, \tag{2.5}$$

где $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{p,q}=\begin{cases}1, & p=q\\ 0, & p\neq q.\end{cases} \tag{2.6}$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ К УЗЛАМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ЗНАЧЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ С УЧЕТОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Введем обозначения [22]:

$$\chi_{k,i,j}= \\ =\vartheta_{k,i,j}(\theta_{k,i-1,j-1}+\theta_{k,i-1,j}+\theta_{k,i,j-1}+\theta_{k,i,j})^{-1}, \\ i=2,3,...,N_1-1;\quad j=2,3,...,N_{2,k}-1; \tag{3.1}$$

$$\chi_{k,1,j}=\vartheta_{k,1,j}(\theta_{k,1,j-1}+\theta_{k,1,j})^{-1}, \\ j=2,3,...,N_{2,k}-1; \tag{3.2}$$

$$\chi_{k,N_1,j} = \vartheta_{k,N_1,j}(\theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j})^{-1}, \quad j = 2,3,...,N_{2,k}-1; \tag{3.3}$$

$$\chi_{k,i,1} = \vartheta_{k,i,1}(\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1}, \quad i = 2,3,...,N_1-1; \tag{3.4}$$

$$\chi_{3,i,N_2} = \vartheta_{2,i,N_{2,k}}(\theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \theta_{k,i,N_{2,k}-1})^{-1}, \quad i = 2,3,...,N_1-1; \tag{3.5}$$

$$\chi_{k,1,1} = \vartheta_{k,1,1}\theta_{k,1,1}^{-1}; \tag{3.6}$$

$$\chi_{k,N_1,1} = \vartheta_{k,N_1,1}\theta_{k,N_1-1,1}^{-1}; \tag{3.7}$$

$$\chi_{k,1,N_2} = \vartheta_{k,1,N_2}\theta_{k,1,N_2-1}^{-1}; \tag{3.8}$$

$$\chi_{k,N_1,N_2} = \vartheta_{k,N_1,N_2}\theta_{k,N_1-1,N_2-1}^{-1}, \tag{3.9}$$

где

$$\vartheta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \end{cases} \quad i = 2,3,...,N_1-1; \quad j = 2,3,...,N_{2,k}-1; \tag{3.10}$$

$$\vartheta_{k,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} = 0, \end{cases} \quad j = 2,3,...,N_{2,k}-1; \tag{3.11}$$

$$\vartheta_{k,N_1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j} = 0, \end{cases} \quad j = 2,3,...,N_{2,k}-1; \tag{3.12}$$

$$\vartheta_{k,i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} = 0, \end{cases} \quad i = 2,3,...,N_1-1; \tag{3.13}$$

$$\vartheta_{k,i,N_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \theta_{k,i,N_{2,k}-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \theta_{k,i,N_{2,k}-1} = 0, \end{cases} \quad i = 2,3,...,N_1-1; \tag{3.14}$$

$$\vartheta_{k,1,1} = \theta_{k,1,1}; \tag{3.15}$$

$$\vartheta_{k,N_1,1} = \theta_{k,N_1-1,1}; \tag{3.16}$$

$$\vartheta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \end{cases} \quad i = 2,3,...,N_1-1; \quad j = 2,3,...,N_{2,k}-1;$$

$$\vartheta_{k,1,N_2} = \theta_{k,1,N_2-1}; \tag{3.17}$$

$$\vartheta_{k,N_1,N_2} = \theta_{k,N_1-1,N_2-1}. \tag{3.18}$$

Уточним, что в каждой из рассмотренных выше формул при $\vartheta_{k,i,j} = 0$ будем иметь $\chi_{k,i,j} = 0$.

Приведем ниже формулы для определения напряжений и деформаций в узлах дискретно-континуальной модели (ниже всюду $p = 1,2$ и $q = 1,2$).

– внутренние узлы ($i = 2,3,...,N_1-1$; $j = 2,3,...,N_{2,k}-1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,j)} = \chi_{k,i,j}(\sigma_{p,q}^{(k,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{k,i-1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(k,i,j-1)}(0,1)\theta_{k,i,j-1} + \sigma_{p,q}^{(k,i-1,j)}(1,0)\theta_{k,i-1,j} + \sigma_{p,q}^{(k,i,j)}(0,0)\theta_{k,i,j}); \tag{3.19}$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,j)} = \chi_{k,i,j}(\varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{k,i-1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(k,i,j-1)}(0,1)\theta_{k,i,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,j)}(1,0)\theta_{k,i-1,j} + \varepsilon_{p,q}^{(k,i,j)}(0,0)\theta_{k,i,j}); \tag{3.20}$$

– «левая вертикальная граница» ($i = 1$; $j = 2,3,...,N_{2,k}-1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(1,j)} = \chi_{k,1,j}(\sigma_{p,q}^{(k,1,j-1)}(0,1)\theta_{k,1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(k,1,j)}(0,0)\theta_{k,1,j}); \tag{3.21}$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(1,j)} = \chi_{k,1,j}(\varepsilon_{p,q}^{(k,1,j-1)}(0,1)\theta_{k,1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(k,1,j)}(0,0)\theta_{k,1,j}); \tag{3.22}$$

– «правая вертикальная граница» ($i = N_1$; $j = 2,3,...,N_{2,k}-1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,j)} = \\ = \chi_{k,N_1,j}(\sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,j-1)}(1,1)\theta_{k,N_1-1,j-1} + \\ + \sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,j)}(1,0)\theta_{k,N_1-1,j}); \quad (3.23)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,j)} = \\ = \chi_{k,N_1,j}(\varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,j-1)}(1,1)\theta_{k,N_1-1,j-1} + \\ + \varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,j)}(1,0)\theta_{k,N_1-1,j}); \quad (3.24)$$

– «нижняя горизонтальная граница» ($i = 2, 3, ..., N_1 - 1;\ \ j = 1;\ j = 1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,1)} = \chi_{k,i,1}(\sigma_{p,q}^{(k,i-1,1)}(1,0)\theta_{k,i-1,1} + \\ + \sigma_{p,q}^{(k,i,1)}(0,0)\theta_{k,i,1}); \quad (3.25)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,1)} = \chi_{k,i,1}(\varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,1)}(1,0)\theta_{k,i-1,1} + \\ + \varepsilon_{p,q}^{(k,i,1)}(0,0)\theta_{2,i,1}); \quad (3.26)$$

– «верхняя горизонтальная граница» ($i = 2, 3, ..., N_1 - 1;\ \ j = N_{2,k}$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,N_{2,k})} = \chi_{k,i,j}(\sigma_{p,q}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(1,1)\theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \\ + \sigma_{p,q}^{(k,i,N_{2,k}-1)}(0,1)\theta_{k,i,N_{2,k}-1}); \quad (3.27)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,N_{2,k})} = \chi_{k,i,j}(\varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(1,1)\theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \\ + \varepsilon_{p,q}^{(k,i,N_2-1)}(0,1)\theta_{k,i,N_2-1}); \quad (3.28)$$

– «угловые узлы границы»
в случае $i = 1,\ j = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(1,1)} = \chi_{k,1,1}\sigma_{p,q}^{(k,1,1)}(0,0)\theta_{k,1,1}; \quad (3.29)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(1,1)} = \chi_{k,1,1}\varepsilon_{p,q}^{(k,1,1)}(0,0)\theta_{k,1,1}; \quad (3.30)$$

в случае $i = N_1,\ j = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,1)} = \chi_{k,N_1,1}\sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,1)}(1,0)\theta_{k,N_1-1,1}; \quad (3.31)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,1)} = \chi_{k,N_1,1}\varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,1)}(1,0)\theta_{k,N_1-1,1}; \quad (3.32)$$

в случае $i = 1,\ j = N_{2,k}$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(1,N_2)} = \chi_{k,1,N_{2,k}}\sigma_{p,q}^{(k,1,N_2-1)}(0,1)\theta_{2,1,N_{2,k}-1}; \quad (3.33)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(1,N_{2,k})} = \chi_{k,1,N_{2,k}}\varepsilon_{p,q}^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1)\theta_{k,1,N_{2,k}-1}; \quad (3.34)$$

в случае $i = N_1,\ j = N_{2,k}$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,N_{2,k})} = \\ = \chi_{k,N_1,N_{2,k}}\sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,N_{2,k}-1)}(1,1)\theta_{k,N_1-1,N_{2,k}-1}; \quad (3.35)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,N_{2,k})} = \\ = \chi_{k,N_1,N_{2,k}}\varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,N_{2,k}-1)}(1,1)\theta_{k,N_1-1,N_{2,k}-1}. \quad (3.36)$$

4. АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ УСЛОВИЙ СТЫКОВКИ

В практических приложениях наиболее часто встречаются следующие варианты стыковки на границах подобластей (1.6) из [1]:

1) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – дискретная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
2) стыковка вида «дискретная модель – дискретно-континуальная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
3) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – дискретно-континуальная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
4) стыковка вида «дискретная модель – дискретная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
5) стыковка вида «внешняя граница – дискретная модель», условие типа «шарнирное опирание»;
6) стыковка вида «внешняя граница – дискретная модель», условие типа «свободный край»;
7) стыковка вида «внешняя граница – дискретно-континуальная модель», условие типа «шарнирное опирание»;
8) стыковка вида «внешняя граница – дискретно-континуальная модель», условие типа «свободный край»;

9) стыковка вида «дискретная модель – внешняя граница», условие типа «шарнирное опирание»;
10) стыковка вида «дискретная модель – внешняя граница», условие типа «свободный край»;
11) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – внешняя граница», условие типа «шарнирное опирание»;
12) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – внешняя граница», условие типа «свободный край».

Разумеется, возможны и иные варианты стыковок, однако подобного рода варианты, так или иначе, как правило, сводятся к некоторым сочетаниям вышеперечисленных двенадцати.

Рассмотрим далее алгоритмы задания граничных условий в каждом из указанных двенадцати вариантов стыковки на границах подобластей [1-3].

5. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1<k<n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_{k-1}=2$) и подобласти ω_k^{fe} с дискретизацией в рамках МКЭ ($\rho_k=1$).

В сечении $x_2=x_{2,k}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида [1-3]:

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=u_1^{(k,i,j)},\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1; \tag{5.1}$$

$$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=u_2^{(k,i,j)},\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1; \tag{5.2}$$

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=\sigma_{1,2}^{(k,i,j)},\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1; \tag{5.3}$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=\sigma_{2,2}^{(k,i,j)},\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1, \tag{5.4}$$

где $\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)$ и $\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)$ – соответственно приведенные к узлу (k,i) функции компонент напряжений $\sigma_{1,2}(x_2)$ и $\sigma_{2,2}(x_2)$ в пределах дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k-1,i}^{dc}$; $\sigma_{1,2}^{(k,i,j)}$ и $\sigma_{2,2}^{(k,i,j)}$ – соответственно приведенные к узлу (k,i,j) значения компонент напряжений $\sigma_{1,2}$ и $\sigma_{2,2}$.

Уравнения (5.1)-(5.4) можно переписать следующим образом:

$$B_k^-\overline{U}_{k-1}(x_{2,k}^b-0)=B_k^+\overline{U}_k, \tag{5.5}$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $4N_1\times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 5.1; B_k^+ – матрица граничных условий размера $4N_1\times 2N_1N_{2,k}$, формируемая на основе метода базисных вариаций.

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_k^+ при задании условий (5.5) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_k^+ определяются по формуле

$$(B_k^+)_{p,q}=\delta_{p,q},\quad p=1,2,...,2N_1,\ \ q=1,2,...,2N_1. \tag{5.6}$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^+ по формуле (5.6) соответствует заданию граничных условий (5.1)-(5.2).

2. Последовательно задаются $i_g=1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно перебираются $i=1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

Таблица 5.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^-.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(5.1)
2	$(N_1+i, 2i),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(5.2)
3	$(2N_1+1, 2)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_1'(0)$	(5.3) $i=1$
4	$(2N_1+1, 4)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_2'(0)$	
5	$(2N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}$	
6	$(2N_1+i, 2(i-1)),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_{k-1,i-1}\dfrac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(5.3) $i=2,3,...,$ N_1-1
7	$(2N_1+i, 2i),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\bar{\mu}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\dfrac{\bar{\mu}_{k-1,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
8	$(2N_1+i, 2(i+1)),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_{k-1,i}\dfrac{1}{h_i}N_2'(0)$	
9	$(2N_1+i, 2(N_1+i)-1),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}(\bar{\mu}_{k-1,i-1}+\bar{\mu}_{k-1,i})$	
10	$(3N_1, 2N_1-2)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(5.3) $i=N_1$
11	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
12	$(3N_1, 4N_1-1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}$	
13	$(3N_1+1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_1'(0)$	(5.4) $i=1$
14	$(3N_1+1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_2'(0)$	
15	$(3N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1}+2\bar{\mu}_{k-1,1}$	
16	$(3N_1+i, 2i-3),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\lambda}_{k-1,i-1}\dfrac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(5.4) $i=2,3,...,$ N_1-1
17	$(3N_1+i, 2i-1),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\bar{\lambda}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\dfrac{\bar{\lambda}_{k-1,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
18	$(3N_1+i, 2i+1),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\lambda}_{k-1,i}\dfrac{1}{h_i}N_2'(0)$	

1	2	3	4
19	$(3N_1+i, 2(N_1+i)),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{k-1,i-1}+\bar{\lambda}_{k-1,i})+$ $+\bar{\mu}_{k-1,i-1}-\bar{\mu}_{k-1,i}$	(5.4) $i=2,3,...,$ N_1-1
20	$(4N_1, 2N_1-3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(5.4) $i=N_1$
21	$(4N_1, 2N_1-1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
22	$(4N_1, 4N_1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1}+2\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы B_k^- не указанные в таблице равны нулю.

2.1.1. Последовательно перебираются $j=1,2,...,N_{2,k}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются $q=1,2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q+2(i-1)+2N_1(j-1); \qquad (5.7)$$

2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных $\overline{U}_k$ (см. формулу (5.5) из [3]) задается

$$\overline{U}_k = \bar{e}_{j_g}. \qquad (5.8)$$

2.1.1.1.3. В соответствии со структурой (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$, $[\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$ тензора напряжений.

2.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^+ определяются по формулам

$$(B_k^+)_{2N_1+i_g,j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}; \qquad (5.9)$$

$$(B_k^+)_{3N_1+i_g,j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}. \qquad (5.10)$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_k^+ по формулам (5.9), (5.10) соответствует заданию граничных условий (5.3), (5.4).

6. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1<k<n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{fe} с дискретизацией в рамках МКЭ ($\rho_{k-1}=1$) и подобласти ω_k^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_k=2$).

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида [1-3]:

$$u_1^{(k-1,i,j)} = u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b+0), \quad i=1,2,...,N_1, \quad j=N_{2,k-1}; \qquad (6.1)$$

$$u_2^{(k-1,i,j)} = u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b+0), \quad i=1,2,...,N_1, \quad j=N_{2,k-1}; \qquad (6.2)$$

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i,j)} = \sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^{b}+0), \quad i=1,2,...,N_1, \quad j=N_{2,k-1}; \tag{6.3}$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i,j)} = \sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^{b}+0), \quad i=1,2,...,N_1, \quad j=N_{2,k-1}, \tag{6.4}$$

где $\sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^{b}+0)$ и $\sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^{b}+0)$ – соответственно приведенные к узлу (k,i) функции компонент напряжений $\sigma_{1,2}(x_2)$ и $\sigma_{2,2}(x_2)$ в пределах дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k,i}^{dc}$; $\sigma_{1,2}^{(k,i,j)}$ и $\sigma_{2,2}^{(k,i,j)}$ – соответственно приведенные к узлу (k,i,j) значения компонент напряжений $\sigma_{1,2}$ и $\sigma_{2,2}$;

Уравнения (6.1)-(6.4) можно переписать следующим образом:

$$B_k^{-}\overline{U}_{k-1} = B_k^{+}\overline{U}_k(x_{2,k}^{b}+0), \tag{6.5}$$

где B_k^{-} – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 2N_1N_{2,k-1}$, формируемая на основе метода базисных вариаций; B_k^{+} – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 6.1.

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_k^{-} при задании условий (6.5) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_k^{-} определяются по формуле

$$(B_k^{+})_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p=1,2,...,2N_1, \quad q=1,2,...,2N_1. \tag{6.6}$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_k^{-} по формуле (3.6) соответствует заданию граничных условий (3.1)-(3.2).

2. Последовательно задаются $i_g = 1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно перебираются $i=1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Последовательно перебираются $j=1,2,...,N_{2,k-1}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются $q=1,2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 2(i-1) + 2N_1(j-1). \tag{6.7}$$

2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных $\overline{U}_k$ (см. формулу (5.5) из [1]) задается

$$\overline{U}_{k-1} = \overline{e}_{j_g}. \tag{6.8}$$

2.1.1.1.3. В соответствии со структурой (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k-1)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}$, $[\sigma_{2,2}^{(k-1)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}$ тензора напряжений.

2.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^{+} определяются по формулам

$$(B_k^{-})_{2N_1+i_g,j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k-1)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}; \tag{6.9}$$

$$(B_k^{-})_{3N_1+i_g,j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k-1)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}. \tag{6.10}$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_k^{-} по формулам (6.9), (6.10) соответствует заданию граничных условий (6.3), (6.4).

Таблица 6.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(6.1)
2	$(N_1+i, 2i),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(6.2)
3	$(2N_1+1, 2)$	$\bar{\mu}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(6.3) $i=1$
4	$(2N_1+1, 4)$	$\bar{\mu}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
5	$(2N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\mu}_{k,1}$	
6	$(2N_1+i, 2(i-1)),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\mu}_{k,i-1}\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(6.3) $i=2,3,...,N_1-1$
7	$(2N_1+i, 2i),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\mu}_{k,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{\bar{\mu}_{k,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
8	$(2N_1+i, 2(i+1)),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\mu}_{k,i}\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
9	$(2N_1+i, 2(N_1+i)-1),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}(\bar{\mu}_{k,i-1}+\bar{\mu}_{k,i})$	
10	$(3N_1, 2N_1-2)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(6.3) $i=N_1$
11	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
12	$(3N_1, 4N_1-1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}$	
13	$(3N_1+1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(6.4) $i=1$
14	$(3N_1+1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
15	$(3N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\lambda}_{k,1}+2\bar{\mu}_{k,1}$	
16	$(3N_1+i, 2i-3),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{k,i-1}\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(6.4) $i=2,3,...,N_1-1$
17	$(3N_1+i, 2i-1),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\lambda}_{k,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{\bar{\lambda}_{k,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
18	$(3N_1+i, 2i+1),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{k,i}\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	

1	2	3	4
19	$(3N_1+i, 2(N_1+i)),$ $i=2,3,...,N_1-1$	$\frac{1}{2}(\overline{\lambda}_{k,i-1}+\overline{\lambda}_{k,i})+\overline{\mu}_{k,i-1}-\overline{\mu}_{k,i}$	(2.4) $i=2,3,...,$ N_1-1
20	$(4N_1, 2N_1-3)$	$\overline{\lambda}_{k,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(2.4) $i=N_1$
21	$(4N_1, 2N_1-1)$	$\overline{\lambda}_{k,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
22	$(4N_1, 4N_1)$	$\overline{\lambda}_{k,N_1-1}+2\overline{\mu}_{k,N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

7. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1<k<n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_{k-1}=2$) и подобласти ω_k^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_k=2$).

В сечении $x_2=x_{2,k}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида [1-3]:

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b+0),\quad i=1,2,...,N_1; \tag{7.1}$$

$$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b+0),\quad i=1,2,...,N_1; \tag{7.2}$$

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=\sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b+0),\quad i=1,2,...,N_1; \tag{7.3}$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b-0)=\sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b+0),\quad i=1,2,...,N_1. \tag{7.4}$$

Уравнения (7.1)-(7.4) можно переписать следующим образом:

$$B_k^-\overline{U}_{k-1}(x_{2,k}^b-0)=B_k^+\overline{U}_k(x_{2,k}^b+0), \tag{7.5}$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $4N_1\times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 5.1; B_k^+ – матрица граничных условий размера $4N_1\times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 6.1.

8. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1<k<n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{fe} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_{k-1}=1$) и подобласти ω_k^{fe} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_k=1$).

Следует отметить, что в данном случае никаких граничных условий в сечении $x_2=x_{2,k}^b$ формулировать не требуется. Подобласти ω_{k-1}^{fe} и ω_k^{fe} следует рассматривать в рамках МКЭ совместно, соответствующие условия типа «идеальный контакт» будут выполнены автоматически.

Таблица 9.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i-1, 2N_1(N_{2,k}-1)+2i-1),\ i=1,2,...,N_1$	1	(9.1)
2	$(2i, 2N_1(N_{2,k}-1)+2i),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(9.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

9. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{fe}, $k=1$ осуществляется в рамках МКЭ. Здесь следует задать $2N_1$ уравнений вида:

$$u_1^{(k,i,j)}(x_{2,1}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1;\quad (9.1)$$

$$u_2^{(k,i,j)}(x_{2,1}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1,\quad (9.2)$$

представимых также в матричной форме

$$B_k^+\overline{U}_k=\overline{g}_k^+,\qquad (9.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1\times 2N_1N_{2,k}$ (таблица) 9.1; $\overline{g}_k^+$ – $2N_1$-мерный нулевой вектор,

$$\overline{g}_k^+=0.\qquad (9.4)$$

10. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{fe}, $k=1$ осуществляется в рамках МКЭ. В данном сечении $x_2=x_{2,k}^b$, $k=1$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k,i,j)}=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1;\qquad (10.1)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k,i,j)}=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=1.\qquad (10.2)$$

Уравнения (10.1)-(10.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^+\overline{U}_k=\overline{g}_k^+,\qquad (10.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1\times 2N_1N_{2,k}$, формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с описанным ниже алгоритмом.

1. Последовательно задаются $i_g=1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1. Последовательно перебираются $i=1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1. Последовательно перебираются $j=1,2,...,N_{2,k}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1. Последовательно перебираются $q=1,2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 2(i-1) + 2N_1(j-1). \qquad (10.4)$$

1.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных $\overline{U}_k$ (см. формулу (5.5) из [1]) задается

$$\overline{U}_k = \overline{e}_{j_g}. \qquad (10.5)$$

1.1.1.1.3. В соответствии со структурой (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$, $[\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$ тензора напряжений.

1.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^+ определяются по формулам

$$(B_k^+)_{i_g,j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}; \qquad (10.6)$$

$$(B_k^+)_{N_1+i_g,j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}. \qquad (10.7)$$

Вычисление элементов матрицы B_k^+ по формулам (10.6), (10.7) соответствует заданию граничных условий (10.1), (10.2).

11. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{dc}, $k=1$ осуществляется в рамках ДКМКЭ. В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b$, $k=1$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N_1; \qquad (11.1)$$

$$u_2^{(k,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N_1, \qquad (11.2)$$

представимых также в матричной форме

$$B_k^+ \overline{U}_k(x_{2,1}^b + 0) = \overline{g}_k^+, \qquad (11.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_k \times 4N_k$ (таблица 11.1); $\overline{g}_k^+$ – $2N_1$-мерный нулевой вектор,

$$\overline{g}_k^+ = 0. \qquad (11.4)$$

12. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»).

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{dc}, $k=1$ осуществляется в рамках ДКМКЭ. Здесь следует задать $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N_1; \qquad (12.1)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N_1. \qquad (12.2)$$

Уравнения (12.1)-(12.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^+ \overline{U}_k(x_{2,1}^b + 0) = \overline{g}_k^+, \qquad (12.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 12.1; $\overline{g}_k^+$ – $2N_1$-мерный нулевой вектор,

$$\overline{g}_k^+ = 0. \qquad (12.4)$$

Таблица 11.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i-1, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(11.1)
2	$(2i, 2i),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(11.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

13. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{fe}, $k=n_b$ осуществляется в рамках МКЭ.

В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b$, $k=n_b$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$u_1^{(k-1,i,j)}(x_{2,1}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=N_{2,k-1}; \tag{13.1}$$

$$u_2^{(k-1,i,j)}(x_{2,1}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=N_{2,k-1}. \tag{13.2}$$

Уравнения (13.1)-(13.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \overline{U}_{k-1} = \overline{g}_k^-, \tag{10.3}$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 2N_1 N_{2,k-1}$, алгоритм формирования которой указан в таблице 13.1; $\overline{g}_k^+$ – $2N_1$-мерный нулевой вектор,

$$\overline{g}_k^+ = 0. \tag{10.4}$$

14. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»).

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{fe}, $k=n_b$ осуществляется в рамках МКЭ.

В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b$, $k=n_b$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i,j)}=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=N_{2,k-1}; \tag{14.1}$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i,j)}=0,\ \ i=1,2,...,N_1,\ \ j=N_{2,k-1}. \tag{14.2}$$

Уравнения (14.1)-(14.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \overline{U}_k = \overline{g}_k^-, \tag{14.3}$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 2N_1 N_{2,k-1}$, формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с описанным ниже алгоритмом.

1. Последовательно задаются $i_g = 1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1. Последовательно перебираются $i=1,2,...,N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

Таблица 12.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(2N_1+1, 2)$	$\bar{\mu}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(12.1) $i=1$
2	$(2N_1+1, 4)$	$\bar{\mu}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
3	$(2N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\mu}_{k,1}$	
4	$(2N_1+i, 2(i-1))$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\mu}_{k,i-1}\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(12.1) $i=2,3,\ldots,N_1-1$
5	$(2N_1+i, 2i)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\mu}_{k,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{\bar{\mu}_{k,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
6	$(2N_1+i, 2(i+1))$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\mu}_{k,i}\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
7	$(2N_1+i, 2(N_1+i)-1)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}(\bar{\mu}_{k,i-1}+\bar{\mu}_{k,i})$	
8	$(3N_1, 2N_1-2)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(12.1) $i=N_1$
9	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}\frac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
10	$(3N_1, 4N_1-1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}$	
11	$(3N_1+1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(12.2) $i=1$
12	$(3N_1+1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k,1}\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
13	$(3N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\lambda}_{k,1}+2\bar{\mu}_{k,1}$	
14	$(3N_1+i, 2i-3)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{k,i-1}\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(12.2) $i=2,3,\ldots,N_1-1$
15	$(3N_1+i, 2i-1)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\lambda}_{k,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{\bar{\lambda}_{k,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
16	$(3N_1+i, 2i+1)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{k,i}\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
17	$(3N_1+i, 2(N_1+i))$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{k,i-1}+\bar{\lambda}_{k,i})+\bar{\mu}_{k,i-1}-\bar{\mu}_{k,i}$	

1	2	3	4
18	$(4N_1, 2N_1-3)$	$\bar{\lambda}_{k,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(12.2) $i=N_1$
19	$(4N_1, 2N_1-1)$	$\bar{\lambda}_{k,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
20	$(4N_1, 4N_1)$	$\bar{\lambda}_{k,N_1-1}+2\bar{\mu}_{k,N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 13.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i-1, 2N_1(N_{2,k-1}-1)+2i-1),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(13.1)
2	$(2i, 2N_1(N_{2,k-1}-1)+2i),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(13.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

1.1.1. Последовательно перебираются $j=1,2,...,N_{2,k-1}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1. Последовательно перебираются $q=1,2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q+2(i-1)+2N_1(j-1). \qquad (14.4)$$

1.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных $\overline{U}_k$ (см. (5.5) из [1]) задается

$$\overline{U}_{k-1} = \bar{e}_{j_g}. \qquad (14.5)$$

1.1.1.1.3. Согласно структуре (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k-1)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}$, $[\sigma_{2,2}^{(k-1)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}$ тензора напряжений.

1.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^- определяются по формулам

$$(B_k^-)_{i_g,j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}; \qquad (14.6)$$

$$(B_k^-)_{N_1+i_g,j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,N_{2,k-1})}. \qquad (14.7)$$

Вычисление элементов матрицы B_k^- по формулам (14.6), (14.7) соответствует заданию граничных условий (14.1), (14.2).

15. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k=n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{dc}, $k=n_b$ осуществляется в рамках ДКМКЭ.

Таблица 15.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^-.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i-1, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(8.1)
2	$(2i, 2i),\ \ i=1,2,...,N_1$	1	(8.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^- не указанные в таблице равны нулю.

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b$, $k = n_b$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., N_1; \quad (15.1)$$

$$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., N_1. \quad (15.2)$$

Уравнения (15.1)-(15.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \overline{U}_k(x_{2,k}^b - 0) = \overline{g}_k^+, \quad (15.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_{k-1} \times 4N_{k-1}$, алгоритм формирования которой указан в таблице 15.1; $\overline{g}_k^+$ – $2N_{k-1}$-мерный нулевой вектор,

$$\overline{g}_k^+ = 0. \quad (15.4)$$

16. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k = n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти ω_k^{dc}, $k = n_b$ осуществляется в рамках ДКМКЭ.

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b$, $k = 1$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., N_1; \quad (16.1)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., N_1. \quad (16.2)$$

Уравнения (16.1)-(16.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^+ \overline{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) = \overline{g}_k^+, \quad (16.3)$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 16.1; $\overline{g}_k^-$ – $2N_1$-мерный нулевой вектор,

$$\overline{g}_k^+ = 0. \quad (16.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы, Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2017 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

Таблица 16.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^-.

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(2N_1+1, 2)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_1'(0)$	(16.1) $i=1$
2	$(2N_1+1, 4)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_2'(0)$	
3	$(2N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}$	
4	$(2N_1+i, 2(i-1))$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_{k-1,i-1}\dfrac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(16.1) $i=2,3,\ldots,$ N_1-1
5	$(2N_1+i, 2i)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\bar{\mu}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\dfrac{\bar{\mu}_{k-1,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
6	$(2N_1+i, 2(i+1))$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_{k-1,i}\dfrac{1}{h_i}N_2'(0)$	
7	$(2N_1+i, 2(N_1+i)-1)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}(\bar{\mu}_{k-1,i-1}+\bar{\mu}_{k-1,i})$	
8	$(3N_1, 2N_1-2)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(16.1) $i=N_1$
9	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_2'(1)$	
10	$(3N_1, 4N_1-1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}$	
11	$(3N_1+1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_1'(0)$	(16.2) $i=1$
12	$(3N_1+1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1}\dfrac{1}{h_1}N_2'(0)$	
13	$(3N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1}+2\bar{\mu}_{k-1,1}$	
14	$(3N_1+i, 2i-3)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\lambda}_{k-1,i-1}\dfrac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(16.2) $i=2,3,\ldots,$ N_1-1
15	$(3N_1+i, 2i-1)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\bar{\lambda}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}}N_2'(1)+\dfrac{\bar{\lambda}_{k-1,i}}{h_i}N_1'(0)\right]$	
16	$(3N_1+i, 2i+1)$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}\bar{\lambda}_{k-1,i}\dfrac{1}{h_i}N_2'(0)$	
17	$(3N_1+i, 2(N_1+i))$, $i=2,3,\ldots,N_1-1$	$\dfrac{1}{2}(\bar{\lambda}_{k-1,i-1}+\bar{\lambda}_{k-1,i})+\bar{\mu}_{k-1,i-1}-\bar{\mu}_{k-1,i}$	

1	2	3	4
18	$(4N_1, 2N_1-3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1}\dfrac{1}{h_{N_1-1}}N_1'(1)$	(16.2) $i=N_1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Негрозов О.А.** О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций), Vol. 13, Iss. 1 2017, pp. 23-33.
2. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, Vol. 153, 2016, pp. 8-15.
3. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Solution of Multipoint Boundary Problem of Two-Dimensional Theory of Elasticity Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. // Procedia Structural Integrity, Vol. 6, 2017, pp. 182-189.
4. **Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruno L.** A stress/displacement Virtual Element method for plane elasticity problems. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 325, 2017, pp. 155-174.
5. **Barrios T.P., Behrens E.M., González M.** Low cost a posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity. // Applied Numerical Mathematics, Vol. 84, 2014, pp. 46-65.
6. **Chen H., Lin E., Liu Y.** A novel Volume-Compensated Particle method for 2D elasticity and plasticity analysis. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, Iss. 9, 2014, pp. 1819-1833.
7. **Donatelli M., Dorostkar A., Mazza M., Neytcheva M., Serra-Capizzano S.** Function-based block multigrid strategy for a two-dimensional linear elasticity-type problem. // Computers & Mathematics with Applications, Vol. 74, Iss. 5, 2017, pp. 1015-1028.
8. **Genna F., Perelmuter M.** Speeding-up Finite Element analyses by replacing the linear equation solver with a Boundary Element code. Part 1: 2D linear elasticity. // Computers & Structures, Vol. 88, Issues 13-14, 2010, pp. 845-858.
9. **Karafiat A.** Convergence estimates for a plane elasticity problem solved by the Galerkin boundary integral formulation with NURBS. // Computers & Mathematics with Applications, Vol. 74, Iss. 2, 2017, pp. 336-349.
10. **Li L.X., Chen Y.L., Lu Z.C.** Generalization of the multi-scale finite element method to plane elasticity problems. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 39, Iss. 2, 2015, pp. 642-653.
11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00109.
12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary

Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.

13. **Marin L., Delvare F., Cimetiere A.** Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity. // International Journal of Solids and Structures, Vols. 78-79, 2016, pp. 9-20.
14. **Qu W., Chen W.** Fast multipole singular boundary method for large-scale plane elasticity problems. // Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 28, Iss. 6, 2015, pp. 626-638.
15. **Santos H.A.F.A., Moitinho de Almeida J.P.** A family of Piola – Kirchhoff hybrid stress finite elements for two-dimensional linear elasticity. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 85, 2014, pp. 33-49.
16. **Stevens D., Power H., Cliffe K.A.** A meshless local RBF collocation method using integral operators for linear elasticity. // International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 88, 2014, pp. 246-258.
17. **Tonon P., Carrazedo R., Sanches R.A.K.** Immersed normalized B-spline finite elements – A convergence study for 2D problems. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 114, 2016, pp. 57-67.
18. **Wen P.H., Cao P., Korakianitis T.** Finite Block Method in elasticity. // Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 46, 2014, pp. 116-125.
19. **Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang C., Li G.** An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, Iss. 6, 2014, pp. 1322-1329.
20. **Yu H.-H., Diab M.** Boundary integral equations for 2D elasticity and its application in discrete dislocation dynamics simulation in finite body: 1. General theory. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, Issues 3-4, 2014, pp. 673-679.
21. **Zheng B., Gao X., Zhang Ch.** Radial integration BEM for vibration analysis of two- and three-dimensional elasticity structures. // Applied Mathematics and Computation, Vol. 277, 2016, pp. 111-126.
22. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 2898-2902.

REFERENCES

1. **Akimov P.A., Sidorov V.N., Negrozov O.A.** O Reshenii Mnogotochechnyh Kraevyh Zadach Rascheta Konstrukcij v Dvumernoj Postanovke na Osnove Sovmestnogo Primenenija Metoda Konechnyh Jelementov i Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnyh Jelementov. Chast' 1: Postanovka i Obshhie Principy Approksimacii zadach [About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation and Basic Principles of Approximation]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Mezhdunarodniy zhurnal po rashetu grazhdanskikh i promishlennikh konstruktsiy, No. 13(1), 2017, pp. 23-33.
2. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, Vol. 153, 2016, pp. 8-15.
3. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Solution of Multipoint Boundary Problem of Two-Dimensional Theory of Elasticity Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. // Procedia Structural Integrity, Vol. 6, 2017, pp. 182-189.

4. **Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruno L.** A stress/displacement Virtual Element method for plane elasticity problems. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 325, 2017, pp. 155-174.
5. **Barrios T.P., Behrens E.M., González M.** Low cost a posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity. // Applied Numerical Mathematics, Vol. 84, 2014, pp. 46-65.
6. **Chen H., Lin E., Liu Y.** A novel Volume-Compensated Particle method for 2D elasticity and plasticity analysis. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, Iss. 9, 2014, pp. 1819-1833.
7. **Donatelli M., Dorostkar A., Mazza M., Neytcheva M., Serra-Capizzano S.** Function-based block multigrid strategy for a two-dimensional linear elasticity-type problem. // Computers & Mathematics with Applications, Vol. 74, Iss. 5, 2017, pp. 1015-1028.
8. **Genna F., Perelmuter M.** Speeding-up Finite Element analyses by replacing the linear equation solver with a Boundary Element code. Part 1: 2D linear elasticity. // Computers & Structures, Vol. 88, Issues 13-14, 2010, pp. 845-858.
9. **Karafiat A.** Convergence estimates for a plane elasticity problem solved by the Galerkin boundary integral formulation with NURBS. // Computers & Mathematics with Applications, Vol. 74, Iss. 2, 2017, pp. 336-349.
10. **Li L.X., Chen Y.L., Lu Z.C.** Generalization of the multi-scale finite element method to plane elasticity problems. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 39, Iss. 2, 2015, pp. 642-653.
11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00109.
12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.
13. **Marin L., Delvare F., Cimetiere A.** Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity. // International Journal of Solids and Structures, Vols. 78-79, 2016, pp. 9-20.
14. **Qu W., Chen W.** Fast multipole singular boundary method for large-scale plane elasticity problems. // Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 28, Iss. 6, 2015, pp. 626-638.
15. **Santos H.A.F.A., Moitinho de Almeida J.P.** A family of Piola – Kirchhoff hybrid stress finite elements for two-dimensional linear elasticity. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 85, 2014, pp. 33-49.
16. **Stevens D., Power H., Cliffe K.A.** A meshless local RBF collocation method using integral operators for linear elasticity. // International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 88, 2014, pp. 246-258.
17. **Tonon P., Carrazedo R., Sanches R.A.K.** Immersed normalized B-spline finite elements – A convergence study for 2D problems. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 114, 2016, pp. 57-67.
18. **Wen P.H., Cao P., Korakianitis T.** Finite Block Method in elasticity. // Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 46, 2014, pp. 116-125.
19. **Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang C., Li G.** An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, Iss. 6, 2014, pp. 1322-1329.
20. **Yu H.-H., Diab M.** Boundary integral equations for 2D elasticity and its applica-

tion in discrete dislocation dynamics simulation in finite body: 1. General theory. // International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, Issues 3-4, 2014, pp. 673-679.

21. **Zheng B., Gao X., Zhang Ch.** Radial integration BEM for vibration analysis of two- and three-dimensional elasticity structures. // Applied Mathematics and Computation, Vol. 277, 2016, pp. 111-126.
22. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 2898-2902.

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета; главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63;
факс +7 (495) 650-27-31; email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения» Российского университета транспорта (МИИТ); профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета; 125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810;
тел. +7 (499) 706-88-10; e-mail: amb@stadyo.ru.

Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, доцент, кандидат технических наук, заместитель главного ученого секретаря Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-81-53;
факс +7 (495) 650-27-31; email: kaytukov@raasn.ru, tkaytukov@gmail.com.

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; советник информационно-издательского отдела, Российская академия архитектуры и строительных наук; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94;
email: NegrozovOA@mgsu.ru.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center “StaDyO”; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University of Russia; Professor of Department of Applied Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building; Principal researcher of the Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Director of Scientific Research Center “StaDyO”; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport» (RUT – MIIT); Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University; Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (499) 706-88-10;
e-mail: amb@stadyo.ru.

Taymuraz B. Kaytukov, Advisor of of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Associated Professor, Ph.D.; Deputy Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-81-53;
fax: +7 (495) 650-27-31; email: kaytukov@raasn.ru, tkaytukov@gmail.com.

Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Advisor of Department of Information and Publication, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru