К ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТИ НА СФЕРЕ С УЗЛАМИ НА ОДНОМ УРОВНЕ

В.Д. Антошкин

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, РОССИЯ

Аннотация: Исследован один из методов образования треугольных сетей на сфере. Поставлены условия задачи размещения треугольной сети на сфере. Критерием оценки эффективности решения задачи является минимальное число типоразмеров панелей купола, возможность укрупнительной сборки и предварительного напряжения. Приведено решение одного варианта задачи размещения треугольной сети в совместимом сферическом треугольнике и, соответственно, на сфере. Размещение на сфере правильных и неправильных шестиугольников, вписанных в окружности, т.е. фигур плоских или составленных в свою очередь из сферических треугольников с минимальными размерами ребер, имеет эффективное решение в виде сети, образованной на основе окружностей минимальных радиусов, т.е. окружностей на сфере, полученных при касании двух смежных окружностей, центры которых находятся на наименьшем расстоянии друг от друга. Задача выравнивания опор на одном уровне может быть решена размещением в системе правильных шестиугольников и пятиугольников неправильных шестиугольников, вписанных в окружности минимальных размеров.

Ключевые слова: сборная сферическая оболочка, треугольная геометрическая сеть, описанная окружность, правильный шестиугольник, разрезка, купол, оптимизация

THE PROBLEM OF EMPLACEMENT OF TRIANGULAR GEOMETRIC NET ON THE SPHERE WITH NODES ON THE SAME LEVEL

Vasilij D. Antoshkin

Mordovian State University, Saransk, Russia

Abstract: One of the methods of formation of triangular networks in the field is investigated. Conditions of the problem of locating a triangular network in the area are delivered. The criterion for assessing the effectiveness of the solution of the problem is the minimum number of sizes of the dome panels, the possibility of pre-assembly and pre-stressing. The solution of the problem of one embodiment of a triangular network of accommodation in a compatible spherical triangle and, accordingly, on the sphere. Placing on the area of regular and irregular hexagon inscribed in a circle, ie, flat figures or composed in turn of spherical triangles with minimum dimensions of the ribs, is an effective solution in the form of a network formed by circles of minimum radii, ie, circles on a sphere obtained at the touch of three adjacent circles whose centers are at the shortest distance from each other. Task align the supports at one level can be resolved by placement in the regular hexagons and irregular pentagons hexagons inscribed in a circle of minimum size..

Keywords: assembled spherical shell, triangular geometric network, described circle, a regular hexagon, cutting, dome, optimization.

ВВЕДЕНИЕ

В геодезическом куполе на основе трехсотдвадцатигранника (320-гранника) имеется возможность такого размещения неправиль-

ных шестиугольников и правильных пятиугольников, с сохранением минимального числа типоразмеров, которое обеспечит эффективное расположение опорных узлов значительно ниже экватора и на одном, вполне определенном уровне (рис. 1).

Рисунок 1. Сфера, составленная из совместимых сферических треугольников (сегментов, представляющих собой 1/6 грани икосаэдра), с разрезкой треугольной сети в виде 320-гранника, имеющая 4 типоразмеров элементов или 2 типоразмеров монтажных элементов(всего -4 типоразмера); O_0 – центр грани икосаэдра и панели в виде правильного треугольника на сфере; O, O_2 – центры монтажных панелей в виде плоских шестиугольников и пятиугольников в сегменте с внутренними углами $36^\circ, 90^\circ, 60^\circ$.

Если анализировать возможность такого варианта треугольной сети на сфере, приходим к выводу, что если вершины граней правильного двадцатигранника и середины сторон его граней у экватора имеют равный шаг в виде секторов 36° , то это условие будет выполняться, если дуги A_1A_2 и B_1B_2 будут равны и симметрично расположены относительно границ этих секторов с осью, проходящей по точке O_2 , находящейся на экваторе (т.е. будут иметь значения $x+x$, как на рисунке 2).

РЕШЕНИЕ

На схемах рисунков 1 и 2 приведено размещение описанных окружностями пятиугольника и шестиугольника в сферическом треугольнике (совместимом сегменте[1-9] сферического икосаэдра) с внутренними углами $36^\circ, 90^\circ$ и 60° . Указанное размещение центров окружностей, описывающих неправильные и правильные шестиугольники, выполним для разрезки в виде 320-гранника (рис. 1). При условии известного расположения центров окружностей и, соответственно, плоских пятиугольника и шестиугольника, задача формирования треугольной сети на

Рисунок 2. Определение расположения ребер многогранника в сферическом треугольнике $36\text{-}60\text{-}90^\circ$ для условия опорных узлов, расположенных на одном уровне от экватора сферы.

сфере с центрами узлов, расположенных на окружности, параллельной окружности экватора (т.е. на одной отметке), сводиться к решению системы уравнений в сферических треугольниках на совместимом сегменте сферы (рис. 2).

Размещение равнобедренных треугольников в сферических неправильных шестиугольниках, вписанных в окружности (т.е. таких, которые соответствуют по периметру плоским шестиугольникам), проведем на примере разрезки, показанной на рисунке 1, и ее фрагменте, показанном на рисунке 2. Предварительно определим параметры в на одной шестой грани правильного двадцатигранника $O O O$, вписанного в сферу, на сферическом треугольнике $O_1 O O_2$. По условию внутренние углы треугольника

$$O = 36^\circ, \quad O_1 = 60^\circ, \quad O_2 = Z + 2Y = 90^\circ, \\ \text{дуга } d = a + b.$$

Используя известные выражения Непера [4] для сторон и углов прямоугольных сферических треугольников, получим

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ \sin a &= \sin x, \\ \sin 60^\circ \sin z &= \sin x. \end{aligned} \quad (1)$$

где a и b – радиусы окружностей, описывающих шестиугольники и пятиугольники, в виде полярного угла; x, y, c и d – катеты прямоугольных сферических треугольников в виде полярных углов; $2y$ и z – гипотенузы в виде полярных углов.

Из треугольников в центре грани $O_1 D C_1$, $C D O_2$ и $O_1 C_1 O_2$ найдем связи величины c и искомых дуг b , z и x

$$\cos b = \cos c \cos z + \sin c \sin z \cos 60^\circ. \quad (2)$$

Из прямоугольных треугольников $C_1 D O_2$ и $C_1 D O_1$ и уравнений (1)

$$\sin 60^\circ \sin z = \sin 36^\circ \sin a \quad (3)$$

Так как $b = d - a$, подставим в уравнение (2) соотношения (3), (4 и 5)

$$\begin{aligned} \cos(d - a) &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 36^\circ}{\sin^2 60^\circ} \sin^2 a} + \\ &+ \sin c \frac{\sin 36^\circ \sin a}{\sin 60^\circ} \cos 60^\circ; \end{aligned}$$

Обозначим

$$n = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 60^\circ}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos(d - a) &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a} + n \sin c \sin a \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \cos d \cos a + \sin d \sin a &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a} + n \sin c \sin a \cos 60^\circ; \\ \cos d \cos a - (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a &= \\ &= \cos c \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a}; \\ [\cos d \cos a - (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a]^2 &= \\ &= \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a); \\ \cos^2 d \cos^2 a - 2 \cos d \cos a (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a = \cos^2 c (1 - \\ &- n^2 \sin^2 a); \\ \cos^2 d (1 - \sin^2 a) - \\ &- 2 \cos d \sqrt{1 - \sin^2 a} (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a = \cos^2 c (1 - \\ &- n^2 \sin^2 a); \\ \cos^2 d (1 - \sin^2 a) - \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a) + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a = \end{aligned}$$

Проведем преобразования системы уравнений, используя формулы (1, 2 и 3) сферической тригонометрии [5,10]

$$\sin z = \frac{\sin 36^\circ \sin a}{\sin 60^\circ}; \quad (4)$$

откуда

$$\cos z = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 36^\circ}{\sin^2 60^\circ} \sin^2 a}; \quad (5)$$

$$= 2 \cos d \sqrt{1 - \sin^2 a} (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d) \sin a;$$

$$\begin{aligned} &[\cos^2 d - \cos^2 d \sin^2 a - \\ &- \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a) + \\ &+ (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a]^2 = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{\cos^2 d - \cos^2 c (1 - n^2 \sin^2 a)^2 + \\ &+ [n \sin c \cos 60^\circ - \sin d]^2 - \cos^2 d\} \sin^2 a\}^2 = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a; \\ &\{\cos^2 d - \cos^2 c + \cos^2 c n^2 \sin^2 a\} + \\ &+ [(n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d] \sin^2 a\}^2 = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\cos^2 d - \cos^2 c + \cos^2 c n^2 \sin^2 a]^2 + \\ &+ 2[(n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d] \\ &\sin^2 a [\cos^2 d - \cos^2 c + \cos^2 c n^2 \sin^2 a] + \\ &+ [(n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d]^2 \sin^4 a = \\ &= 4 \cos^2 d (1 - \sin^2 a) (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 \sin^2 a \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} t &= \sin a, m = (n \sin c \cos 60^\circ - \sin d)^2 - \cos^2 d, \\ p &= \cos^2 d - \cos^2 c. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &(p + n^2 \cos^2 c t^2)^2 + 2 m t^2 (p + n^2 \cos^2 c t^2) + \\ &m^2 t^4 = \\ &= 4 [m + \cos^2 d] \cos^2 d (t^2 - t^4); \\ &p^2 + 2 p n^2 \cos^2 c t^2 + n^4 \cos^4 c t^4 + 2 p m t^2 + \\ &+ 2 m n^2 \cos^2 c t^4 + m^2 t^4 = \\ &= 4 m \cos^2 d t^2 - 4 m \cos^2 d t^4 + 4 \cos^4 d t^2 - \\ &- 4 \cos^4 d t^4; \\ &(n^4 \cos^4 c + 2 m n^2 \cos^2 c + 4 m \cos^2 d + m^2 + \\ &+ 4 \cos^4 d) t^4 + [2 p (n^2 \cos^2 c + m) - \\ &- 4 m \cos^2 d - 4 \cos^4 d] t^2 + p^2 = 0. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\beta_1 = n^4 \cos^4 c + 2mn^2 \cos^2 c + 4m \cos^2 d + m^2 + 4 \cos^4 d;$$

$$\beta_2 = 2p(n^2 \cos^2 c + m) - 4m \cos^2 d - 4 \cos^4 d. \quad (6)$$

Получим биквадратное уравнение относительно функции $\sin^2 \alpha$.

$$\beta_1 t^4 + \beta_2 t^2 + p^2 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) решается в явном виде [5, 11-16]. Подставим $d = 31,71747441146^0$, $c = 20,90515744789^0$.
 $(0,0498838998125102782493771725e+28)t^4 - 0,4268489762778023 t^2 + 0,022222222 = 0$.

Сделаем замену

$$y = t^2,$$

тогда биквадратное уравнение примет вид

$$0,04988389981251027824937717249e+28 y^2 - 0,4268489762778023 y + 0,022222222 = 0.$$

Решение уравнения:

$$t = 0,235978,$$

$$\alpha = 13,649279529197^0.$$

ВЫВОДЫ

Предлагаемое решение разрезки позволяет значительно упростить решения опорных узлов, а также производить укрупнительную сборку элементов купола, так как основания пирамид остаются плоскими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antoshkin V.D., Travush V.I., Erofeev V.T., Rimshin V.I., Kurbatov V.L. The Problem Optimization Triangular Geometric Line Field. // *Modern Applied Science*, 2015, Vol. 9, Issue 3, pp. 46-50.
2. Антошкин В.Д. Эффективные конструктивно-технологические решения сборных сферических куполов. // *Региональная архитектура и строительство*, 2015, №3(24), с. 112-121.
3. Антошкин В.Д., Гудожников С.С., Перфильева О.И., Ерофеева И.В. Перспективные конструктивно-технологические решения сборных сферических оболочек. // *Сборник трудов «Актуальные вопросы архитектуры и строительства»*. Материалы XIII международной научно-технической конференции (в 2 частях), 2014, с. 4-15.
4. Ежов Е.Ф., Юркин Ю.В., Антошкин В.Д., Ежов В.Е. Построение линии влияния в трехшарнирных арках. *Сборник трудов «Современные технологии строительных материалов и конструкций»*. Материалы всероссийской научно-технической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика В.Г. Шухова, Саранск, 2003, с. 160-164.
5. Software Scilab 5.4.1 – The Free Platform for Numerical Computation, 17.06.2014 (www.softkumir.ru/index).
6. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т. Сборная сферическая оболочка. Патент на изобретение, RUS №2520192, 27.06.2013.
7. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеева И.В., Антошкин Д.В. Сборная сферическая оболочка. Патент на изобретение, RUS №2564545, 28.07.2014.
8. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т., Гудожников С.С. Современные конструктивно-технологические решения сферических оболочек. // *Строительство и реконструкция*, 2012, №6(44), с. 45-55.
9. Травуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т., Гудожников С.С. Конструктивно-технологические возможности сборных сферических оболочек. // *Строительство и реконструкция*, 2013, №6(50), с. 36-48.

10. **Korn G.A., Korn T.M.** Mathematical Handbook: For Scientists and Engineers, Dover Publications, 1968, 1152 p.
11. **Антошкин В.Д., Коновалов А.Г.** Сборные сферические оболочки из шестиугольных панелей. // Огарёв-Online, 2015, №13(54), с. 6.
12. **Антошкин В.Д., Курбаков Г.В., Бочкин В.С.** Способ монтажа криволинейной конструкции. // Stredoevropsky Vestnik pro Vedu a Vyzkum, 2015, т. 83, с. 1.
13. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 7 Forming Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
14. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 4 of Placement Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
15. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 5 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02003 (2017).
16. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 6 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02012 (2017).
4. **Ezhov E.F., Jurkin Ju.V., Antoshkin V.D., Ezhov V.E.** Postroenie Linii Vlijanija v Trehsharnirnyh Arkah [Construction of the Line of Influence in the Three-Arm Arches]. Sbornik trudov "Sovremennye tehnologii stroitel'nyh materialov i konstrukcij". Materialy vsrossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii, posvjashhennoj 150-letiju so dnja rozhdenija akademika V.G. Shuhova, Saransk, 2003, pp. 160-164.
5. Software Scilab 5.4.1 – The Free Platform for Numerical Computation, 17.06.2014 (www.softkumir.ru/index).
6. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T.** Sbornaja Sfericheskaja Obolochka [Prefabricated Spherical Shell]. Patent na izobretenie, Rossijskaia Federatsiia, No. 2520192, 27.06.2013.
7. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeeva I.V., Antoshkin D.V.** Sbornaja Sfericheskaja Obolochka [Prefabricated Spherical Shell]. Patent na izobretenie, Rossijskaia Federatsiia, No. 2564545, 28.07.2014.
8. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T., Gudozhnikov S.S.** Sovremennye Konstruktivno-Tehnologicheskie Reshenija Sfericheskikh Obolochek [Modern Structural and Technological Solutions of Spherical Shells]. Stroitel'stvo i rekonstrukcija, 2012, No. 6(44), pp. 45-55.
9. **Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T., Gudozhnikov S.S.** Konstruktivno-Tehnologicheskie Vozmozhnosti Sbornyh Sfericheskikh Obolochek [Structural and Technological Capabilities of Prefabricated Spherical Shells]. Stroitel'stvo i rekonstrukcija, 2013, No. 6(50), pp. 36-48.

REFERENCES

1. **Antoshkin V.D., Travush V.I., Erofeev V.T., Rimshin V.I., Kurbatov V.L.** The Problem Optimization Triangular Geometric Line Field. Modern Applied Science, 2015, Vol. 9, Issue 3, pp. 46-50.
2. **Antoshkin V.D.** Jefferktivnye Konstruktivno-Tehnologicheskie Reshenija Sbornyh Sfericheskikh Kupolov [Effective Structural and Technological Solutions of Prefabricated Spherical Domes]. Regional'naja arhitektura i stroitel'stvo, 2015, No. 3(24), pp. 112-121.
3. **Antoshkin V.D., Gudozhnikov S.S., Perfil'eva O.I., Erofeeva I.V.** Perspektivnye Konstruktivno-Tehnologicheskie Reshenija Sbornyh Sfericheskikh Obolochek [Perspective Constructive-Technological Solutions of Prefabricated Spherical Shells]. Sbornik trudov "Aktual'nye voprosy arhitektury i stroitel'stva". Materialy XIII mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii (v 2 chastjah), 2014, pp. 4-15.

10. **Korn G.A., Korn T.M.** Mathematical Handbook: For Scientists and Engineers, Dover Publications, 1968, 1152 p.
11. **Antoshkin V.D., Konovalov A.G.** Sbornye Sfericheskie Obolochki iz Shestiuhol'nyh Panelej [Prefabricated Spherical Shells of Hexagonal Panels]. Ogarjov-Online, 2015, No. 13(54), pp. 6.
12. **Antoshkin V.D., Kurbakov G.V., Bochkin V.S.** Sposob Montazha Krivolinejnoj Konstrukcii [Method of Erection of Curvilinear Structure]. Stredoevropsky Vestnik pro Vedu a Vyzkum, 2015, Vol. 83, pp. 1.
13. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 7 Forming Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
14. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** The Problem 4 of Placement Triangular Geometric Line Field. // MATEC Web of Conferences 86, 010 (2016).
15. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 5 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02003 (2017).
16. **Travush V.I., Antoshkin V.D.** To the Problem 6 of Emplacement of Triangular Geometric Net on the Sphere. // MATEC Web of Conferences 106, 02012 (2017).

Антошкин Василий Дмитриевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой зданий, сооружений и автомобильных дорог; Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68;
e-mail: antovd@mail.ru.

Vasilij D.Antoshkin, Ph.D., Associate Professor, Head of Department of Buildings, Structures and Roads, Mordovian State University; 48, ul. Bolshevistskaya, Saransk, 430005, Russia; e-mail: antovd@mail.ru.