

# МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*А.А. Семенов*

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
г. Санкт-Петербург, РОССИЯ

**Аннотация:** В работе рассматриваются пологие ортотропные оболочки двоякой кривизны, квадратные в плане, при динамическом нагружении. Приводятся соотношения математической модели их деформирования с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов и ортотропии материала. Для формирования системы ОДУ применяется метод Л. В. Канторовича. Полученная система решается методом Розенброка. Показана верификация предложенной методики для изотропных оболочек. Для нескольких вариантов ортотропных оболочек из стеклопластика и углепластика проведено исследование их устойчивости и получены значения критических нагрузок.

**Ключевые слова:** оболочечные конструкции, пологие оболочки, ортотропия, динамическая устойчивость, динамическое нагружение

# METHODOLOGY RESEARCH OF STABILITY OF SHALLOW ORTHOTROPIC SHELLS OF DOUBLE CURVATURE UNDER DYNAMIC LOADING

*Alexey A. Semenov*

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,  
Saint Petersburg, RUSSIA

**Abstract:** The paper deals with shallow orthotropic shells of double curvature, square in plan, under dynamic loading. Outlines the ratios of the mathematical model of deformation considering the geometric nonlinearity, transverse shear and orthotropy material. For the formation of the ODE system is used method of Kantorovich. The resulting system is solved by the method of Rosenbrock. It is shown the verification of the proposed method for isotropic shells. For several options orthotropic shells made of fiberglass and carbon fiber studied their stability and obtained values of critical loads.

**Keywords:** shell structures, shallow shells, orthotropy, dynamic stability, dynamic loading

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение динамического поведения конструкций имеет существенное значение для различных областей промышленности, в том числе для судостроения, машиностроения и строительства. Наиболее изученным является поведение оболочечных конструкций при динамическом нагружении для однослойных оболочек из изотропных материалов [1–4]. В

последнее время большой интерес представляют конструкции из композиционных материалов (стеклопластик, графитопластик, углепластик и др.), и исследование поведения оболочек из таких материалов является актуальной задачей [5–12].

Основными задачами исследования оболочечных конструкций при динамическом нагружении являются исследования их устойчивости, прочности и колебаний, о чем свидетельствуют обзорные статьи и монографии [13–20].

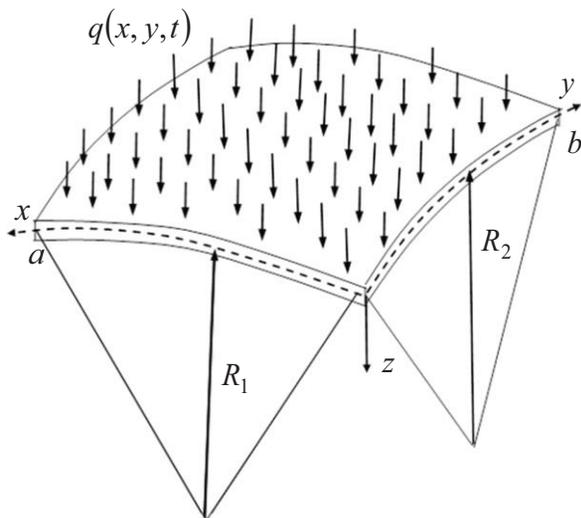
Целью данной работы является разработка методики исследования процесса потери устойчивости пологих ортотропных оболочек при динамическом нагружении.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Будем рассматривать пологие ортотропные оболочечные конструкции двоякой кривизны, квадратные в плане (Рисунок 1), шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру и находящиеся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q$ . Нагрузка направлена по нормали к срединной поверхности, линейно зависит от времени  $t$  и задается в виде

$$q = A_1 t,$$

где  $A_1$  – скорость нагружения.



*Рисунок 1. Схематичное изображение полой оболочечной конструкции двоякой кривизны, квадратной в плане.*

Математическая модель деформирования таких конструкций строится из трех групп соотношений: геометрических (связывающих перемещения и деформации), физических (связывающих напряжения и деформации) и функционала полной энергии деформации.

Будем рассматривать геометрически нелинейный вариант модели, также учитывающий ортотропию материала и поперечные сдвиги (модель типа Тимошенко). В таком случае, неизвестными функциями будут три функции перемещений

$$U = U(x, y, t), \quad V = V(x, y, t), \quad W = W(x, y, t)$$

и две функции углов поворота нормали

$$\Psi_x = \Psi_x(x, y, t), \quad \Psi_y = \Psi_y(x, y, t),$$

а геометрические соотношения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \theta_1 \theta_2, \\ \chi_1 &= \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}, \quad 2\chi_{12} = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\epsilon_x, \epsilon_y$  – деформации удлинения вдоль координат  $x, y$  срединной поверхности;  $\gamma_{xy}$  – деформация сдвига в плоскости  $xOy$ ;  $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  – функции изменения кривизн и кручения;

$$k_x = 1/R_1, \quad k_y = 1/R_2$$

– главные кривизны оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны;

$$\theta_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right). \quad (2)$$

Физические соотношения при линейно-упругом деформировании для ортотропного материала при плоском напряженном состоянии будут иметь вид

Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двойкой кривизны при динамическом нагружении

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[ \gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Полная энергия деформации пологой оболочки двойкой кривизны может быть записана с помощью функционала:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (K - E_p) dt, \quad (4)$$

где  $K$  – кинетическая энергия деформации системы;

$$E_p = \Pi - A$$

– функционал статической задачи, равный разности потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{E_1}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_0^a \int_0^b \left\{ h \left[ \varepsilon_x^2 + \bar{G}_2 \varepsilon_y^2 + 2\mu_{21}\varepsilon_x \varepsilon_y + \right. \right. \\ &+ \bar{G}_{12} \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23} k (\Psi_y - \theta_2)^2 \left. \right] + \\ &+ \frac{h^3}{12} \left[ \chi_1^2 + \bar{G}_2 \chi_2^2 + 2\mu_{21}\chi_1 \chi_2 + 4\bar{G}_{12} \chi_{12}^2 \right] - \\ &\left. - 2 \frac{q(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1} W \right\} dx dy, \\ K &= \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ h \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом того, что для ортотропного материала

$$E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12},$$

здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \bar{G}_{12} &= \frac{G_{12}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{13} = \frac{G_{13}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \\ \bar{G}_{23} &= \frac{G_{23}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}; \quad k = \frac{5}{6}. \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. МЕТОДЫ

Классический вариант метода Л.В. Канторовича – метода сведения многомерного функционала к одномерному, состоит в следующем [21]. Искомые функции перемещений и углов поворота нормали представляются в виде

$$\begin{aligned} U &= U(x, y, t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) Z1(i, x, y), \\ V &= V(x, y, t) = \sum_{i=1}^N V_i(t) Z2(i, x, y), \\ W &= W(x, y, t) = \sum_{i=1}^N W_i(t) Z3(i, x, y), \\ \Psi_x &= \Psi_x(x, y, t) = \sum_{i=1}^N PS_i(t) Z4(i, x, y), \\ \Psi_y &= \Psi_y(x, y, t) = \sum_{i=1}^N PN_i(t) Z5(i, x, y), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $U_i - PN_i$

– неизвестные функции переменной  $t$ ;  $Z1 - Z5$  – известные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям. Эти функции, как правило, являются различными комбинациями тригонометрических функций с различными аргументами.

Далее функции (7) подставляются в функционал полной энергии деформации оболочки

(5). После вычисления интегралов по переменным  $x$  и  $y$  от известных функций, функционал  $I$  представляет собой одномерный функционал от функций

$$U_i(t) - PN_i(t).$$

Из условий минимума этого функционала

$$\delta I = 0$$

находятся уравнения движения, которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Также получаемая таким образом система носит название многомерного варианта уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(K - E_p)}{\partial \dot{X}_k(t)} - \frac{\partial(K - E_p)}{\partial X_k(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5N, \quad (8)$$

где  $X(t) = (U_i(t), V_i(t), W_i(t), PS_i(t), PN_i(t))^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,

а точкой обозначена производная по времени. Так как производные от искомым функций по переменной  $t$  содержатся только в выражении для кинетической энергии, а сами функции – только в выражении для  $E_p$ , то справедливо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{X}_k(t)} + \frac{\partial E_p}{\partial X_k(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5N. \quad (9)$$

Притом

$$\frac{\partial E_p}{\partial X_k(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5N$$

– система уравнений задачи статики [22]. Процесс формирования системы (9) был запрограммирован в среде аналитических вычислений Maple 2016. Полученная система

ОДУ решалась численно методом Розенброка [23, 24], который эффективен при решении жестких систем.

Процесс потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении отличается от процесса потери устойчивости в статике. Хотя любые критерии потери устойчивости в своей основе используют критерий Ляпунова (при малом изменении входных данных происходит существенное изменение в решении задачи), в динамике используется свой критерий потери устойчивости.

На рисунке 2 схематично показаны кривые «нагрузка – прогиб» для оболочки при статическом нагружении (кривая 1) и динамическом нагружении (кривая 2). Критерием потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении является нагрузка точки перегиба графика «нагрузка – прогиб». Этот критерий предложен А. С. Вольмиром [25]. Как видно из графика, после потери устойчивости оболочка совершает колебания вокруг кривой равновесных состояний статической задачи. Если нагрузка

$$q = A_1 t,$$

то при увеличении скорости нагружения  $A_1$  критическая нагрузка увеличивается (происходит запаздывание реакции конструкции на воздействие).

#### 4. РАСЧЕТЫ

Для верификации предложенной методики проведем расчеты устойчивости пологих оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении, выполненных из изотропных материалов, которые рассматривались в работах В. В. Карпова [26]. Параметры материалов приводятся в Таблице 1.

Геометрические параметры всех рассматриваемых вариантов конструкций приводятся в Таблице 2.

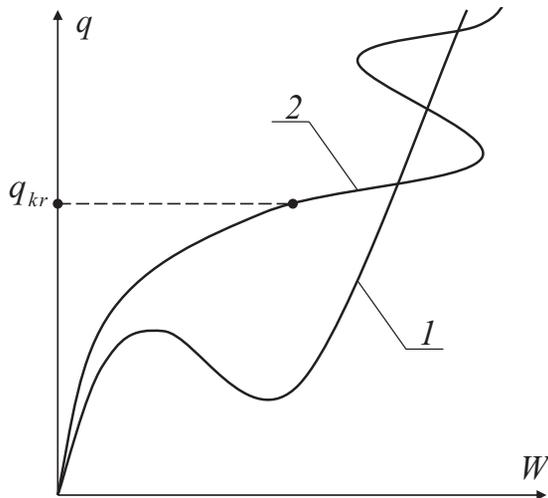


Рисунок 2. Схематичное изображение кривых «нагрузка – прогиб» при статическом и динамическом нагружении.

Таблица 1. Характеристики материалов

Характеристика	Сталь (изотропный)	Углеродистый М60Л/Ероху	Стеклопластик Т-10/МПЭ22-27
$E_1$ , МПа	$2.1 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$0.294 \cdot 10^5$
$\mu_{12}$	0.3	0.32	0.123
$E_2$ , МПа	$2.1 \cdot 10^5$	$0.59 \cdot 10^4$	$1.78 \cdot 10^4$
$G_{12}$ , МПа	$0.807 \cdot 10^5$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$
$G_{13}$ , МПа	$0.807 \cdot 10^5$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$
$G_{23}$ , МПа	$0.807 \cdot 10^5$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$
Пл-ть, кг/м <sup>3</sup>	7800	1500	1800

Таблица 2. Геометрические параметры конструкций

Вариант	$a = b$ , м	$R_1 = R_2$ , м	$h$ , м
1	$60h$	$225h$	0.09
2	$120h$	$450h$	0.09

Оболочки рассматривались при шарнирно-неподвижном способе закрепления контура и двух вариантах скоростей нагружения:  $A_1 = 100$  и  $A_1 = 1000$ . Далее все результаты будут приведены в безразмерных параметрах:

$$\bar{t} = \frac{h}{a^2 A^2} \sqrt{\frac{E_1}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \rho}} \cdot t, \quad \bar{W} = \frac{W}{h},$$

$$\bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}. \quad (10)$$

На Рисунке 3 показано сравнение графика зависимости «нагрузка – прогиб» (в безразмерных параметрах), полученного для стальной оболочки варианта 1 при двух скоростях нагружения ( $A_1 = 100$  и  $A_1 = 1000$ ).

Черным кривым соответствуют значения, полученные В. В. Карповым [26], красным кривым – полученные в данной работе. Значения соответствуют прогибу конструкции в ее центре ( $x = a/2, y = b/2$ ), данные получены при  $N = 9$ . Наблюдаемая разница в значениях объясняется использованием более точной модели типа Тимошенко (в отличие от модели Кирхгофа – Лява [26]), а также увеличенной точностью вычислений, которой позволяет достичь пакет аналитических вычислений Maple 2016 и использование метода Розенброка для решения системы ОДУ.

В Таблице 3 приведены значения нагрузок потери устойчивости  $\bar{P}_{kr}$  для всех рассмотренных вариантов оболочек. В скобках указаны значения, полученные в работе [26].

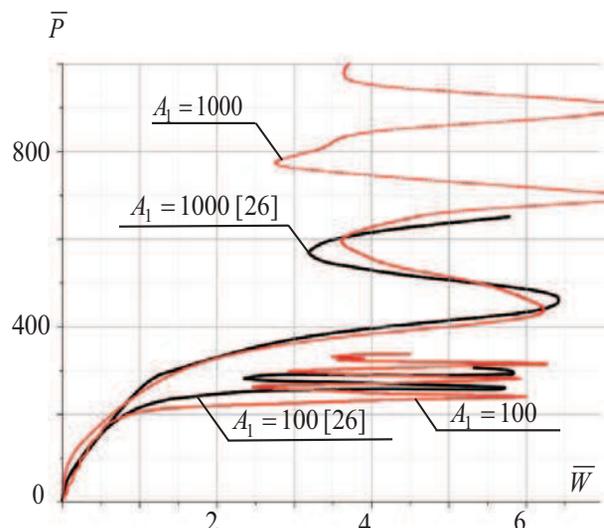


Рисунок 3. Сравнение графика зависимости «нагрузка – прогиб» для стальной оболочки варианта 1 при  $A_1 = 100$  и  $A_1 = 1000$  из работы [26] и полученных автором

Таблица 3. Значения нагрузок потери устойчивости

Вар.	$A_1$	Материал	Критическая нагрузка $\bar{P}_{kr}$
1	100	Сталь	223.3 (256)
		Т-10/УПЭ22-27	151.7
		М60J/Ероху	110
	1000	Сталь	395.9 (383)
		Т-10/УПЭ22-27	353.8
		М60J/Ероху	334.5
2	100	Сталь	825
		Т-10/УПЭ22-27	526.8
		М60J/Ероху	269.5
	1000	Сталь	1000
		Т-10/УПЭ22-27	806
		М60J/Ероху	514.5

На Рисунке 4 приводится график зависимости «нагрузка – прогиб» для ортотропной оболочки варианта 1, выполненной из углепластика М60J/Ероху, а на Рисунке 5 – для ортотропной оболочки варианта 2, выполненной из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27. В обоих случаях скорость нагружения принималась  $A_1 = 1000$ . Красная кривая соответствует прогибу в центре конструкции, синяя – в четверти.

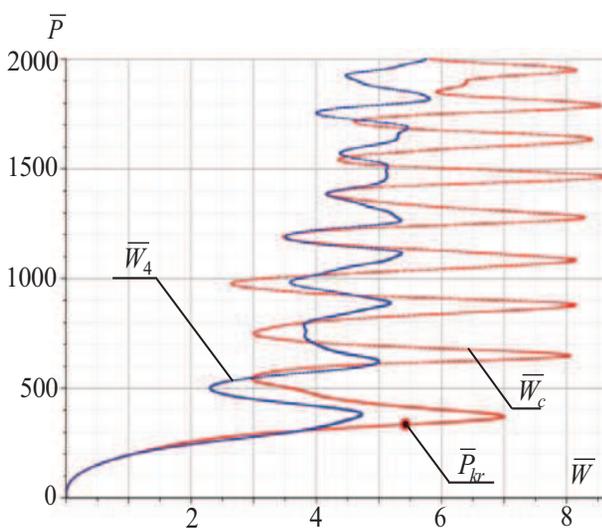


Рисунок 4. График зависимости «нагрузка – прогиб» для оболочки варианта 1 из углепластика М60J/Ероху.

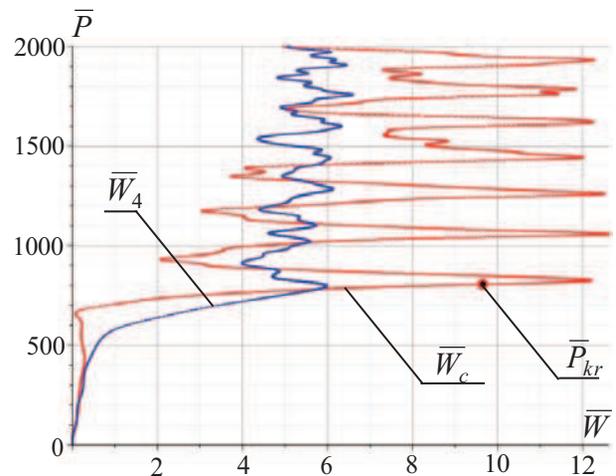


Рисунок 5. График зависимости «нагрузка – прогиб» для оболочки варианта 2 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27.

Точкой на красной кривой показан перегиб графика, соответствующий нагрузке потери устойчивости.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложена методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двойкой кривизны при динамическом нагружении. Учитывается геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги. Алгоритм исследования математической модели строится на основе методов Л. В. Канторовича и метода Розенброка.

Результаты расчетов тестовых задач показали хорошую согласованность с результатами, полученными в работе других авторов, поэтому предложенная методика может быть использована в дальнейших исследованиях.

На основании проведенных расчетов ортотропных пологих оболочек можно сделать вывод о том, что при использовании современных ортотропных материалов (углепластик, стеклопластик) возможно уменьшение значения критической нагрузки в несколько раз, однако такие конструкции существенно легче, чем конструкции, выполненные из традиционных изотропных материалов (сталь).

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H.** Buckling and Dynamic Instability Analysis of Stiffened Shell Panels. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 44 (2006), pp. 321-333.
2. **Ng T.Y., Lam K.Y., Reddy J.N.** Dynamic Stability of Cylindrical Panels with Transverse Shear Effects. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36 (1999), pp. 3483-3496.
3. **Fan H.-G., Chen Z.-P., Feng W.-Z., Zhou F., Cao G.-W.** Dynamic Buckling of Cylindrical Shells with Arbitrary Axisymmetric Thickness Variation under Time Dependent External Pressure. // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 15, No. 3 (2015) 1450053 (21 pages).
4. **Крысько В.А., Кравцова И.В.** Динамика и статика секториальных оболочек. // *Вестник СГТУ*, 2004, №2(3), с. 27-36.
5. **Less H., Abramovich H.** Dynamic Buckling of a Laminated Composite Stringer-Stiffened Cylindrical Panel. // *Composites: Part B*, Vol. 43 (2012), pp. 2348-2358.
6. **Ravi Kumar L., Datta P.K., Prabhakara D.L.** Tension Buckling and Dynamic Stability Behavior of Laminated Composite Doubly Curved Panels Subjected to Partial Edge Loading. // *Composite Structures*, Vol. 60 (2003), pp. 171-181.
7. **Schokker A., Sridharan S., Kasagi A.** Dynamic Buckling of Composite Shells // *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 1 (1996), pp. 43-53.
8. **Gao Y., Hoo Fatt M.S.** Dynamic Pulse Buckling of Single Curvature Composite Shells Under External Blast. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 52 (2012), pp. 149-157.
9. **Thang P.-T., Nguyen-Thoi T.** A New Approach for Nonlinear Dynamic Buckling of S-FGM Toroidal Shell Segments with Axial and Circumferential Stiffeners. // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 53 (2016), pp. 1-9.
10. **Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H.** Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells. // *Composite Structures*, Vol. 96 (2013), pp. 384-395.
11. **Kiani Y., Sadighi M., Eslami M.R.** Dynamic Analysis and Active Control of Smart Doubly Curved FGM Panels. // *Composite Structures*, Vol. 102 (2013), pp. 205-216.
12. **Sofiyev A.H., Kuruoglu N.** Domains of Dynamic Instability of FGM Conical Shells Under Time Dependent Periodic Loads. // *Composite Structures*, Vol. 136 (2016), pp. 139-148.
13. **Абросимов Н.А., Баженов В.Г.** Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
14. **Коган Е.А., Юрченко А.А.** Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор). // *Известия МГТУ «МАМИ»*. Серия «Естественные науки», 2014, Т. 4, №1(19), с. 55-70.
15. **Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.** Nonlinear Problems of the Dynamics of Elastic Shells Partially Filled with a Liquid. // *International Applied Mechanics*, Vol. 36 (2000), pp. 421-448.
16. **Кубенко В.Д., Ковальчук П.С.** Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор). // *Прикладная механика*, 1998, Т.34, №8, с. 3-31.
17. **Amabili M., Païdoussis M.P.** Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels, with and without Fluid – Structure Interaction. // *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56 (2003), pp. 349-381.
18. **Moussaoui F., Benamar R.** Non-Linear Vibrations of Shell-Type Structures: A Review with Bibliography. // *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255 (2002), pp. 161-184.

19. **Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.** Recent Research Advances on the Dynamic Analysis of Composite Shells: 2000 – 2009 (Review). // *Composite Structures*, Vol. 93 (2010), pp. 14-31.
20. **Sahu S.K., Datta P.K.** Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987 – 2005 – Part I: Conservative Systems. // *Appl. Mech. Rev.* (2007), pp. 60-65.
21. **Канторович Л.В.** Один прямой метод приближенного решения задач о минимуме двойного интеграла. // *Известия АН СССР, Отд. матем. и ест. наук*, 1933, №5, с. 647-652.
22. **Semenov A.A.** Strength and Stability of Geometrically Nonlinear Orthotropic Shell Structures // *Thin-Walled Structures*, Vol. 106 (2016), pp. 428-436.
23. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II. 2nd ed. New York: Springer, 1996.
24. **Shampine L.F., Corless R.M.** Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments. // *J. Comp. Appl. Math*, Vol. 125(1-2) (2000), pp. 31-40.
25. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
26. **Карпов В.В., Игнатъев О.В., Сальников А.Ю.** Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: Изд-во АСБ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
3. **Fan H.-G., Chen Z.-P., Feng W.-Z., Zhou F., Cao G.-W.** Dynamic Buckling of Cylindrical Shells with Arbitrary Axisymmetric Thickness Variation under Time Dependent External Pressure. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 15, No. 3 (2015) 1450053 (21 pages).
4. **Krys'ko V.A., Kravcova I.V.** Dinamika i Statika Sektorial'nyh Obolochek [Dynamics and statics of sectorial shells]. *Vestnik SGTU*, 2004, No. 2(3), pp. 27-36.
5. **Less H., Abramovich H.** Dynamic Buckling of a Laminated Composite Stringer-Stiffened Cylindrical Panel. // *Composites: Part B*, Vol. 43 (2012), pp. 2348-2358.
6. **Ravi Kumar L., Datta P.K., Prabhakara D.L.** Tension Buckling and Dynamic Stability Behavior of Laminated Composite Doubly Curved Panels Subjected to Partial Edge Loading. // *Composite Structures*, Vol. 60 (2003), pp. 171-181.
7. **Schokker A., Sridharan S., Kasagi A.** Dynamic Buckling of Composite Shells // *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 1 (1996), pp. 43-53.
8. **Gao Y., Hoo Fatt M.S.** Dynamic Pulse Buckling of Single Curvature Composite Shells Under External Blast. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 52 (2012), pp. 149-157.
9. **Thang P.-T., Nguyen-Thoi T.** A New Approach for Nonlinear Dynamic Buckling of S-FGM Toroidal Shell Segments with Axial and Circumferential Stiffeners. // *Aerospace Science and Technology*, Vol. 53 (2016), pp. 1-9.
10. **Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H.** Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells. // *Composite Structures*, Vol. 96 (2013), pp. 384-395.
11. **Kiani Y., Sadighi M., Eslami M.R.** Dynamic Analysis and Active Control of Smart Doubly Curved FGM Panels. // *Composite Structures*, Vol. 102 (2013), pp. 205-216.
12. **Sofiyev A.H., Kuruoglu N.** Domains of Dynamic Instability of FGM Conical Shells

## REFERENCES

1. **Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H.** Buckling and Dynamic Instability Analysis of Stiffened Shell Panels. *Thin-Walled Structures*, Vol. 44 (2006), pp. 321-333.
2. **Ng T.Y., Lam K.Y., Reddy J.N.** Dynamic Stability of Cylindrical Panels with Transverse Shear Effects. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36 (1999), pp. 3483-3496.

- Under Time Dependent Periodic Loads. // Composite Structures, Vol. 136 (2016), pp. 139-148.
13. **Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.** Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnyh konstrukcij [Nonlinear problems of the dynamics of composite structures]. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo NNGU, 2002, 400 p.
  14. **Kogan E.A., Jurchenko A.A.** Nelinejnye kolebanija trehslojnyh i mnogoslojnyh plastin i obolochek pri periodicheskikh vozdeystvijah (obzor) [Nonlinear oscillations of three-layered and multilayered plates and shells under periodic actions (review)]. Izvestija MGTU "MAMI". Serija "Estestvennye nauki", 2014, Vol. 4, No. 1(19), pp. 55-70.
  15. **Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.** Nonlinear Problems of the Dynamics of Elastic Shells Partially Filled with a Liquid. // International Applied Mechanics, Vol. 36 (2000), pp. 421-448.
  16. **Koval'chuk P.S., Kubenko V.D.** Nelinejnye zadachi kolebanij tonkih obolochek (obzor) [Nonlinear Problems of Oscillations of Thin Shells (review)]. Prikladnaja mehanika, 1998, Vol. 34, No. 8, pp. 3-31.
  17. **Amabili M., Paidoussis M.P.** Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels, with and without Fluid – Structure Interaction. // Applied Mechanics Reviews, Vol. 56 (2003), pp. 349-381.
  18. **Moussaoui F., Benamar R.** Non-Linear Vibrations of Shell-Type Structures: A Review with Bibliography. // Journal of Sound and Vibration, Vol. 255 (2002), pp. 161-184.
  19. **Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.** Recent Research Advances on the Dynamic Analysis of Composite Shells: 2000 – 2009 (Review). // Composite Structures, Vol. 93 (2010), pp. 14-31.
  20. **Sahu S.K., Datta P.K.** Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987 – 2005 – Part I: Conservative Systems. // Appl. Mech. Rev. (2007), pp. 60-65.
  21. **Kantorovich L.V.** Odin Prjamoj Metod Priblizhennogo Reshenija Zadach o Minime Dvojnogo Integrala [One Direct Method for the Approximate Solution of Problems on the Minimum of the Double Integral]. Izvestija AN SSSR, Otdelenie matematicheskikh i estestvennyh nauk, 1933, No. 5, pp. 647-652.
  22. **Semenov A.A.** Strength and Stability of Geometrically Nonlinear Orthotropic Shell Structures // Thin-Walled Structures, Vol. 106 (2016), pp. 428-436.
  23. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II. 2nd ed. New York: Springer, 1996.
  24. **Shampine L.F., Corless R.M.** Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments. // J. Comp. Appl. Math, Vol. 125(1-2) (2000), pp. 31-40.
  25. **Vol'mir A.S.** Nelinejnaja Dinamika Plastinok i Obolochek [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 p.
  26. **Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Sal'nikov A.Ju.** Nelinejnye Matematicheskie Modeli Deformirovanija Obolochek Peremennoj Tolshhiny i Algoritmy ih Issledovanija [Nonlinear Mathematical Models of Deformation of Shells of Variable Thickness and Algorithms for their Analysis]. Moscow, Izdatel'stvo ASV; Saint-Petersburg, SPbGASU, 2002, 420 p.
- 
- Семенов Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет; 190005, Россия, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4;  
e-mail: sw.semenov@gmail.com
- Alexey A. Semenov, Ph.D., Assistant Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; 4, Vtoraja Krasnoarmejskaja ul., Saint Petersburg, 190005, Russian Federation;  
e-mail: sw.semenov@gmail.com