О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКАХ РАЗЛИЧИЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА КРИВОЙ РАВНОВЕСИЙ

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев
Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II
(МГУПС (МИИТ)), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В работе обсуждаются особенности исследования типа критической точки на кривой равновесий (точка бифуркации или предельная точка). Дются новые представления о пополнении исходного равновесия при прохождении предельной точки или точки бифуркации. На примерах фермы Мизеса, пологой арки и пологой цилиндрической панели показаны особенности рождения и перемещения точек бифуркации по кривой равновесных состоний.

Ключевые слова: бифуркация, предельная точка, потеря устойчивости

ON COMPUTATIONAL DIFFERENCES OF CRITICAL POINTS ON EQUILIBRIUM CURVE

Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev
Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: In this paper, we discuss the features of investigating the type of the critical point on the equilibrium curve (bifurcation point or limit point). There are new ideas about the completion of the initial equilibrium at the limit point or bifurcation point. Examples as the Mises farm, a shallow arch and a shallow cylindrical panel show shows the features of the birth and movement of bifurcation points along the curve of equilibrium.

Keywords: bifurcation, critical point, loss of stability

1. ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ИЛИ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

В данной работе обсуждаются вычислительные признаки различия критических точек (точка бифуркации или предельная точка).

Пусть система нелинейных уравнений равновесия для конечноэлементной модели упругой системы представлена в виде некоторого оператора, зависящего от узловых перемещений ν, представительной координаты q (по которой строится кривая равновесных состояний), параметра нагрузки λ и вектора единичных узловых нагрузок $\vec{P}$.

$$G(\nu(q), \lambda(q)\vec{P}) = 0$$

Производная нелинейного оператора (матрица Якоби или матрицы касательной жесткости) выражается в следующем виде:

$$K(\nu, \lambda) = \frac{\partial G(\nu, \lambda)}{\partial \nu}$$

Производная по параметру нагрузки λ дает упомянутый единичный вектор нагрузки $\vec{P}$:

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \lambda} = \vec{P}$$

Точки критического равновесия ($\lambda_{кр}$, $\nu_{кр}$) определяются двумя главными соотношениями:

$$\det K(\lambda_{кр}, \nu_{кр}) = 0$$

$$K(\lambda_{\text{кр}}, \nu_{\text{кр}}) \cdot \vec{W}_1^0 = 0 \qquad (1)$$

Здесь $\vec{W}_1^0$ – первый «нулевой» собственный вектор потери устойчивости, соответствующий «нулевому» собственному значению матрицы жесткости в предкритическом равновесии.

Основное соотношение, определяющее тип критической точки, получим путем умножения слева упомянутого транспонированного нулевого собственного вектора $(W_1^0)^T$ на производную нелинейного оператора по координате q. После некоторых преобразований с учетом соотношения (1) получим основную формулу:

$$(W_1^0)^T \frac{\partial \vec{G}}{\partial q} \to \ldots \to \left((W_1^0)^T \cdot \vec{P}\right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial q} = 0 \qquad (2)$$

Если в этой формуле скалярное произведение не равно нулю

$$(\overrightarrow{W_1^0} \cdot \vec{P}) \neq 0,$$

а в ноль обращается производная

$$\partial \lambda / \partial q = 0,$$

то критическая точка есть предельная точка.

Если же, наоборот, скалярное произведение равно нулю

$$(\overrightarrow{W_1^0} \cdot \vec{P}) = 0,$$

а производная

$$\partial \lambda / \partial q \neq 0,$$

то критическая точка есть точка бифуркации.

Другим признаком точки бифуркации является выполнение условия ортогональноести предкритической формы равновесия и нулевого собственного вектора:

$$\left(W_1^0 \cdot W_{предкр}\right) = 0. \qquad (3)$$

В случае предельной точки упомянутое условие ортогональности не выполняется:

$$\left(W_1^0 \cdot W_{предкр}\right) \neq 0.$$

Отметим, что формула (2) в самом общем виде была впервые дана в работах А. Джепсона и А. Спенса (1982, 1985 г.) [1, 2].

Независимо от работ этих авторов соотношение (2) было сформулировано в работах Г.А. Мануйлова, С.Б. Косицына и К.А. Жукова [3] (Строительная механика №5, 1989 г.). Там же была дана энергетическая интерпретация формулы (2), которая заключается в следующем:

Если работа внешней нагрузки на перемещениях, задаваемых собственным вектором матрицы касательной жесткости для предкритического равновесия равна нулю, то критическая точка есть точка бифуркации. В противном случае эта критическая точка есть предельная точка.

Формальное доказательство было приведено в работе А. Демила и В. Вундерлихта [4] (1997 г.). Развернутое изложение рассматриваемых вопросов дано в книге В. Галишниковой, П. Дунайского и П.Дж. Паля в 2009 г. [5] (на английском), а также в работе авторов [6].

В терминах КЭ расчетов «перевод» математических результатов Джепсона и Спенса на язык, доступный рядовым вычислителям, был сделан П. Вриггерсом и Дж. Симо [7] (1990 г.). Авторы указали также признаки различия типов предельных точек и точек бифуркации при выполнении некоторых дополнительных условий, которые выражены через константы *a, b, c, d,* вычисляемые согласно следующим формулам:

$$a = \left(\vec{W}_1^0\right)^T \nabla_\nu (K\, \vec{W}^0) \vec{W}_1^0,$$

$$b=\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\nabla_\lambda(K\,\vec{W}_1^{\,0})+(\vec{W}_1^{\,0})^T\nabla_\nu(K\,\vec{W}_1^{\,0})\widetilde{\nu}\,,$$
$$c=\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\nabla_\lambda P+2\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\nabla_\lambda(K\widetilde{\nu})+$$
$$+\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T,\nabla_\nu=(K\widetilde{\nu})\widetilde{\nu}\,,$$
$$d=b^2-ac\,.$$

Здесь $\widetilde{\nu}=K^{-1}\vec{P}$, ∇_ν, ∇_λ – геометрические производные «по направлению» матрицы К

$$\nabla_\nu(K\,\vec{W})\Delta\nu=\frac{d}{d\varepsilon}\left(K\left(\nu+\varepsilon\Delta\nu,\lambda\right)\vec{W}_1^{\,0}\right)_{\varepsilon=0}$$
$$\nabla_\lambda(K\,\vec{W})\Delta\lambda=\frac{d}{d\varepsilon}\left(K\left(\nu,\lambda+\varepsilon\Delta\lambda\right)\vec{W}_1^{\,0}\right)_{\varepsilon=0}$$

Чтобы различать типы предельных точек Джепсон и Спенс [2] предложили следующее условия.

Если в критической точке скалярное произведение

$$\left(\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\cdot\vec{P}\right)\neq 0$$

и коэффициент $a\neq 0$, то это простая (квадратичная) предельная точка (точка поворота) (рис. 1б).

Если же скалярное произведение

$$\left(\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\cdot\vec{P}\right)\neq 0\,,$$

но коэффициент $a=0$, то критическая точка есть двойная (кубическая) предельная точка (точка перегиба с горизонтальной касательной (рис. 1а). Ее называют «слабо устойчивой» точкой равновесия, поскольку именно с образования этой точки начинается явление потери устойчивости пологих арок и оболочек при увеличении параметра подъемистости. Появление и развитие предельных точек можно представить с помощью многообразия катастрофы сборки (рис. 2)

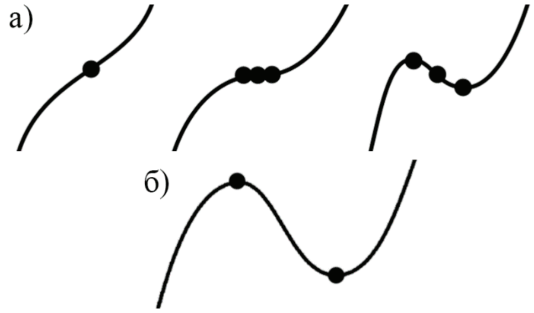

Рисунок 1. Двойная (кубическая) и простая (квадратичная) предельные точки.

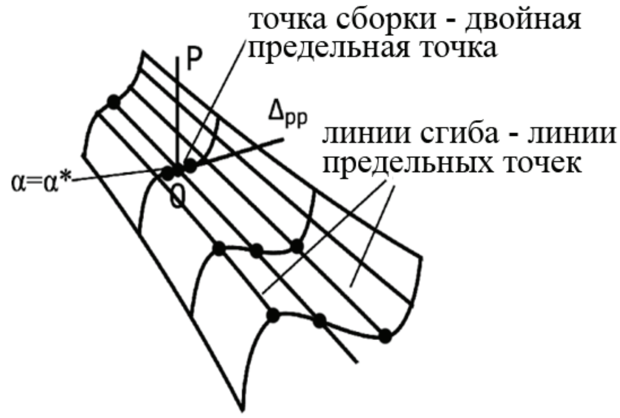

Рисунок 2. Предельные точки и многообразие катастрофы сборки.

Чтобы различать типы точек бифуркации используются следующие условия.

Если

$$\left(\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\cdot\vec{P}\right)=0\,,\ \ a\neq 0\,,\ \ d>0\,,$$

то точка бифуркации простая и асимметричная (рис. 3в).

Если

$$\left(\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\cdot\vec{P}\right)=0\,,\ a=0\,,\ b\neq 0\,,$$

то точка бифуркации симметричная (неустойчивая при $b<0$, рис. 3а, устойчивая при $b>0$, рис. 3б).

Если

$$\left(\left(\vec{W}_1^{\,0}\right)^T\cdot\vec{P}\right)=0\,,\ d<0\,,$$

то точка бифуркации изолированная (изола, рис. 3г).

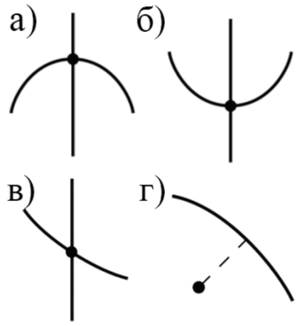

Рисунок 3. Точки бифуркации: симметричная (а, б), асимметричная (в) и изолированная (г).

Отметим, что несмотря на кажущуюся исключительность изолированных точек бифуркации они встречаются порой в самых неожиданных задачах. Например, точка бифуркации симметричного равновесия круговой подъемистой двухшарнирной арки (2α>135°), нагруженной двумя одинаковыми симметрично расположенными силами, является изолированной.

Рассмотрим еще одну особую точку бифуркации, которая встречается при изменении типа критической точки (наименьшей критической нагрузке вместо предельной точки с некоторого момента соответствует точка бифуркации). Описанный переход от предельной точки к точке бифуркации совершается через двукратную критическую точку типа «ветвление в вершине холма» (вариант катастрофы гиперболической омбилики) [8, 9].

Эта двукратная критическая точка (рис. 4) характеризуется такими соотношениями:

$$(P_1 \cdot \overrightarrow{w_1^0}) \neq 0\,,\ \frac{\partial\lambda}{\partial q_1} = 0\,,\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial q_1^2} < 0\,,$$

$$(P_1 \cdot \overrightarrow{w_2^0}) = 0\,,\ \frac{\partial\lambda}{\partial q_2} = 0\,,\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial q_2^2} < 0\,.$$

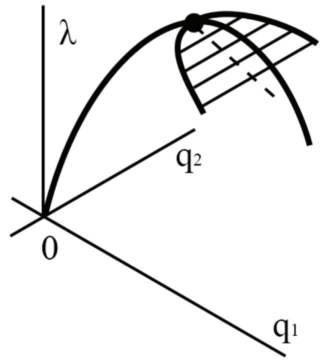

Рисунок 4. Двукратная критическая точка «ветвление в вершине холма».

При переходе через критическую точку равновесия существенным является вопрос о пополнении послекритических равновесий по сравнению с предкритическими. Как известно [6,10], начальное послекритическое равновесие есть сумма предкритического равновесия и нулевого собственного вектора с масштабным множителем ξ:

$$\vec{W}_{нач.п/кр} = \vec{W}_{предкр} + \xi\overrightarrow{W_1^0} + \ldots \qquad (4)$$

В точке бифуркации предкритическое равновесие$W_{предкр}$ – неполное равновесие. Поэтому для него существует энергетически ортогональное дополнение. Неполное равновесие, в принципе, может терять устйочивость как в точке бифуркации так и в предельной точке. Если же предкритическое рпвновесие полное (энергетически ортогональное дополнение нулевое), то потеря устойчивости возможна только в предельной точке. Данные положения вытекают из соотношений ортогональности (2), (3).

После прохождения точки бифуркации пополнение предкритического равновесия возможно в двух вариантах:

1) Добавляются новые материальные компоненты (например, безмоментное равновесие переходит в моментное);

2) Добавляются относитлеьно новые(иначе «организованные») компоненты, которые ранее присутствовали в предкритическом равновесии (симметричные равновесия +

кососимметричные из состава дополнения дают в сумме несимметричное послекритическое равновесие).

Формально высказанные соображения можно представить в виде следующих соотношений

$$W_1^0 \in Доп^{Э\perp}\left\{\vec{W}_{предкр}\right\} \quad \to \quad \left(\overrightarrow{W_1^0}\cdot\vec{W}_{предкр}\right)=0$$

В предельной точке условие ортогональности (3) не справедливо

$$\left(W_1^0\cdot W_{предкр}\right)\neq 0\,.$$

Однако для этой точки символически можно записать некоторое (условное) разложение нулевого собственного вектора

$$W_1^0=c_1W_{пред}+c_2W_1^{0\,биф}$$

Если предельная точка близка кнеустойчивой точке бифуркации (которой она «подчинена» согласно иерархии катастроф [11]), то

$$c_2 >> c_1,\ c_1\neq 0,$$

и в этом случае начальное послекритическое равновесие $W_{нач.п/кр}$ оказывается более полным, чем предкритическое $W_{предкр}$. Подробности рассмотрения примера, связанного с потерей устойчивости в предельной точке цилиндрической оболочки см. [10].

Если же предельная точка не связана с точкой бифуркации или расположена достаточно далеко от нее ($c_2=0$ или $c_2<<c_1$), *то нулевой собственный вектор пропорционален (или почти пропорционален) вектору предкритического равновесия*

$$(W_1^0=c_1W_{пред})\,.$$

Тогда начальное послекритическое равновесие (после прохождения предельной точки) повторяет предкритическое равновесие, но будет неустойчивым

$$\vec{W}_{нач.п/кр}=\vec{W}_{предкр}+\xi c_1\vec{W}_{предкр}=\left(1+\xi c_1\right)\vec{W}_{предкр}\,.$$

2. РОЖДЕНИЕ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ И ИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО КРИВОЙ РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что некоторая упругая система имеет кривую равновесия с двумя предельными точками. Точки бифуркации рождаются парами и могут появиться либо в некоторой точке устойчивой части кривой равновеси (до верхней предельной точки), либо после прохождения этой предельной точки (т.е. на неустойчивой части кривой равновесия). Пример первого варианта дает «высокая» ферма Мизеса ($\alpha_0\geq 67°,36$, рис. 5). Пока угол наклона стержней меньше 67°,36, ферма Мизеса теряет устойчивость исключительно в предельной точке. Известно, что критический угол наклона стержней в предельной точке, а также величина критической силы удовлетворяют соотношениям [12]:

$$\cos^3\alpha_{кр}^*=\cos\alpha_0\,,\qquad P_{кр}^*=2cl\sin^3\alpha_{кр}\,,$$

где величина c для стержней:

$$c=\frac{EA}{l}\,.$$

При достижении угла 67°,36 в некоторой точке восходящей устойчивой ветви равновесий рождается новая пара критических точек, определяющих симметричную бифуркацию. Это следует из анализа решений уравнения [12]

$$\cos^3\alpha^{биф}-\cos\alpha^{биф}=\cos\alpha_0$$

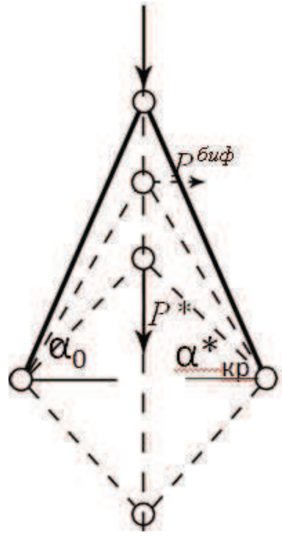

Рисунок 5. «Высокая» ферма Мизеса.

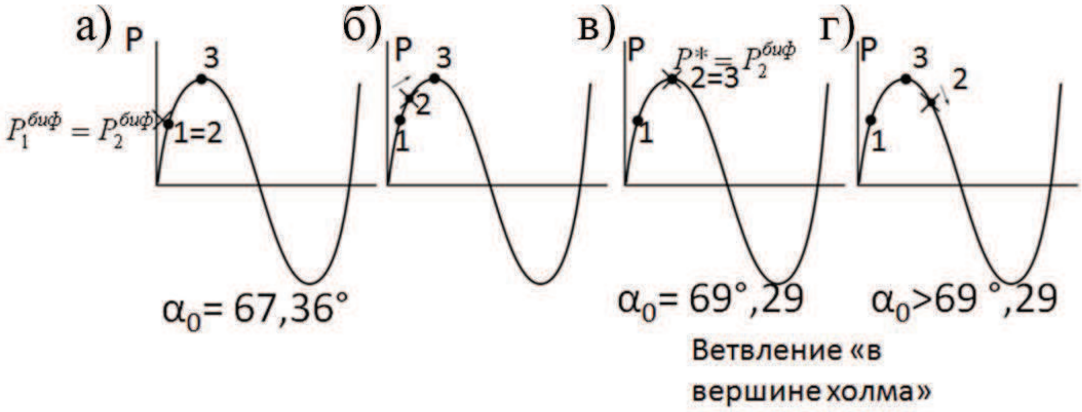

Рисунок 6. Перемещение точек бифуркации «высокой» фермы Мизеса по кривой равновесий.

которое можно представить как кубическое вида:

$$x^3 - x + a = 0\,.$$

Дискриминант этого уравнения D=0 когда

$$\alpha_1^{биф} = \alpha_2^{биф}$$

при α_0= 67,36°. Это равенство свидетельствует о рождении двукратного вещественного корня (рис. 6а). *Начиная с этого момента у высоких ферм Мизеса наименьшей критической нагрузке соответсвует потеря устойчивости в симметричной неустойчивой точке бифуркации*. Соответствующая критическая бифуркационная нагрузка вычисляется по формуле:

$$P_{биф} = 2cl\left(1 - \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha^{биф}}\right)\sin\alpha^{биф}$$

При увеличении угла α_0> 67,36° две точки бифуркации начинают расходиться вдоль устойчивой ветви (рис. 6б). При увеличении начального угла до α_0= 69,29° вторая точка бифуркации достигает предельной точки, образуется двукратная критическая точка типа «ветвление в вершине холма». Далее эта точка бифуркации проходит предельную точку и попадает на неусточивую ветвь равновесий (рис. 6г). На этом рисунке показаны две петли неустойчивых бифуркационных равновесий.

Однако во многих случаях (арочные конструкции, удлиненные цилиндрические панели) точки бифуркации рождаются на неустойчивой ветви равновесий. Но их рождение не означает немедленной смены типа потери устойчивости, как это было в предыдущем случае (ферма Мизеса).

Рассмотрим простейшую пологую арку синусоидального очертания:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l},$$

нагруженную синусоидальной нагрузкой

$$p = p_0 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Детальный анализ развития критических точек для такой арки дан в работе [12].

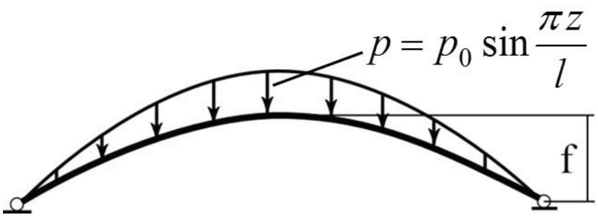

Рисунок 7. Пологая синусоидальная арка под действием синусоидальной нагрузки.

Анализ рождения точек бифуркации удобно рассмотреть с использованием безразмерного параметра

$$s = {}^{4I}\!/_{Af^2}.$$

Пока s>1,0 очень пологая арка устойчивости не теряет. При s=1,0 на кривой равновесия появляется двойная предельная точка (точка перегиба с горизонтальной касательной). Начиная с этого момента все арки, имеющие параметр s<1,0 вплоть до значения s*=2/11 (≈0,182) теряют устойчивость в предельных точках. Однако при s**=0,25 происходит рождение двукратной точки бифуркации на неустойчивой части ветви кривой равновесий (рис. 5б). При дальнейшем уменьшении параметра s (s<0,25) точки бифуркации расходятся друг от друга. Перемещаясь вдоль неустойчивой части кривой равновесий, одна из них стремится к верхней предельной точке, другая – к нижней. При достижении параметромs значенияs*=2/11 (≈0,182) точки бифуркации достигают предельных точек. В этот момент образуется двукратные критические точки («ветвление в вершине холма»).

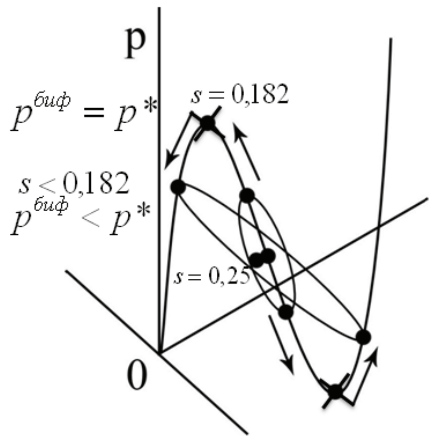

Рисунок 8. Рождение и перемещение точек бифуркации вдоль основной кривой равновесий арки.

При еще большем уменьшении параметра s(s<2/11), наименьшей критической нагрузке будет соответствовать потеря устойчивости арки в точке симметричной неустойчивой бифуркации. Соответствующие петли неустойчивых послебифуркационных равновесий показаны на рис. 5б. Безразмерные критические нагрузки для арки в предельной точке и точке бифуркации определяются соотношениями:

$$P^*_{кр} = 1 \pm \sqrt{\frac{1(1-s)^3}{27s^2}}; \; P^{биф}_{кр} = 1 \pm 3\sqrt{1-4s}.$$

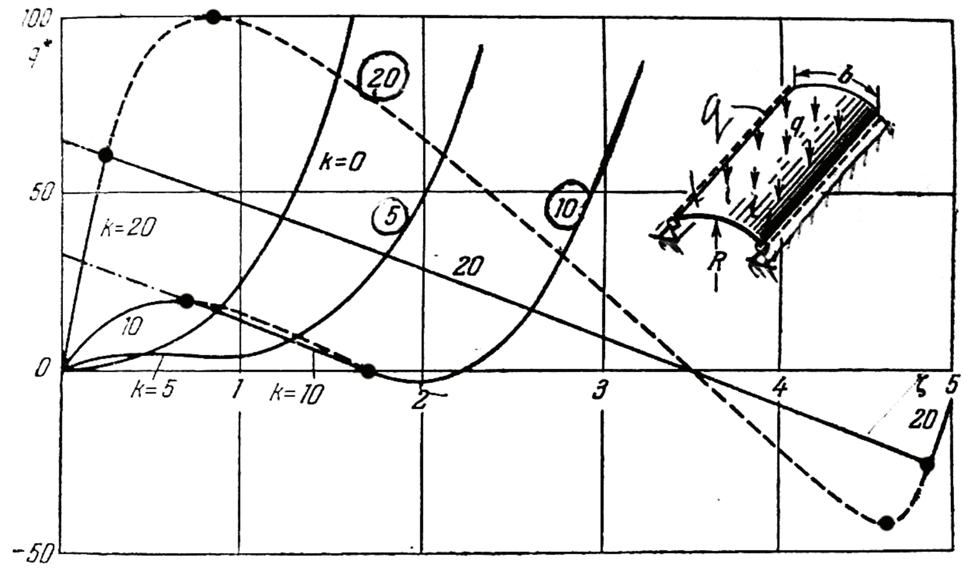

Рисунок 9. *Кривые равновесий и точки бифуркации для удлиненной пологой цилиндрической панели.*

Р – безразмерный параметр нагрузки:

$$P = \frac{P_0 l^4}{\pi^4 EJf}.$$

Похожая картина поведения точек бифуркации имеет место и в случае потери устойчивости пологой удлиненной цилиндрической панели, шарнирно закрепленной вдоль прямолинейных краев, и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой [13] (рис. 9). Пока параметр

$$k = b^2 / R\delta$$

меньше 5, панель не теряет устойчивости симметричного равновесия. При k=5 появляется двойная предельная точка и в пределах от k=5 до k≈9 потеря устойчивости панели происходит в предельной точке. При некотором значении k, близком к k≈8, на неустойчивой ветви равновесий (рис. 6) рождается двукратная точка бифуркации. С увеличением kэта двукратная точка бифуркации расщепляется в две простых, расходящихся друг от друга вдоль неустойивой ветви, и при k≈10 верхняя точка бифуркации достигает верхней предельной точки. Начиная с этого момента рассматриваемая панель теряет устойчивость в точках бифуркации (симметричных и неустойчивых). Соответствующие петли неустойчивых бифуркационных равновесий показаны на рис. 9. Отметим, что развитие точек бифуркации удлиненной цилиндрической панели фактически повторяет развитие этих точек для синусоидальной арки.

В заключение отметим, что в работе Керра и Зейферта [14] при исследовании устойчивости круговой защемленной арки под действием радиальной нагрузки (с учетом геометрической нелинейности), было установлено, что при достижении параметра k=5,024 рождается двукратная точка бифуркации. Однако, рождение бифуркационного параметра еще не означает начала потери устойчивости арки в точке бифуркации. На самом деле упомянутая двукратная точка бифуркации рождается на неустойчивой ветви равновесий, и для того, чтобы перейти через предельную точку необходимо увеличить параметр k до значения k=5,18. Только после этого минимальной критической нагрузке будетсоответствовать потеря устойчивости арки в симметрично точке бифуркации.

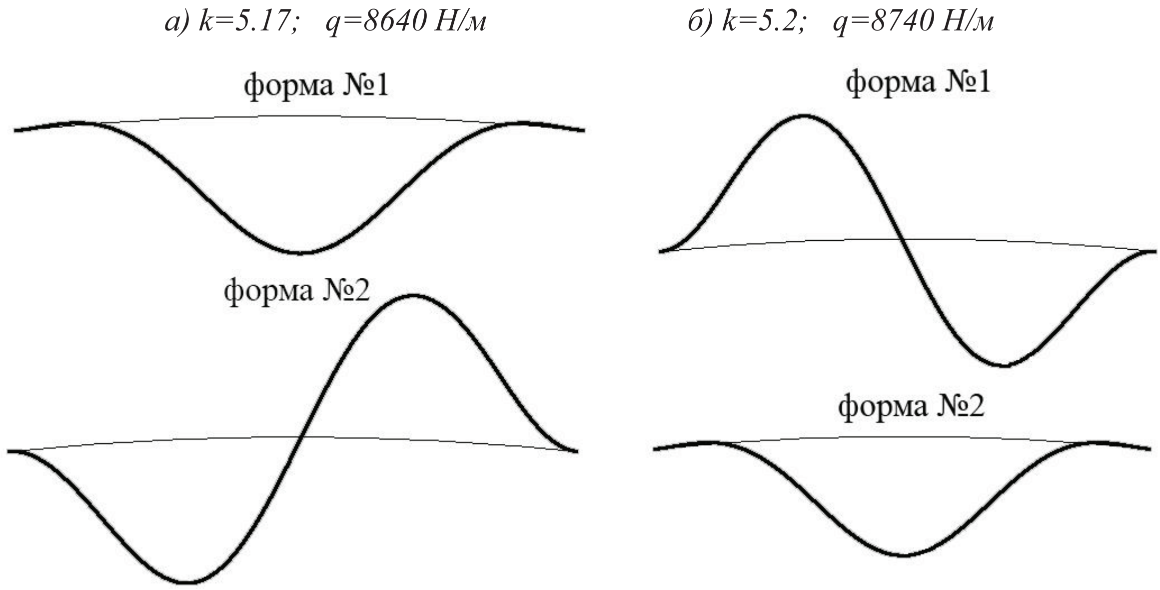

Рисунок 9. Собственные формы потери устойчивости защемленной арки по действием радиальной нагрузки.

Об этом свидетельствуют первые собственные формы потери устойчивости для такой арки (рис. 10), вычисленные при параметрах k=5,17 и k=5,2.

При параметре k=5,17 первая собственная форма симметричная, она соответствует потере устойчивости в предельной точке. Вторая форма – кососиметричная. При значении параметра 5,2 для предкритического равновесия первая форма уже кососимметричная, что указывает на бифуркационную потерю устойчивости. Еще раз подчеркнем, что момент рождения точек бифуркации не означает немедленную смену типа потери устойчивости. Такое изменение произойдет только в том случае, если эта точка бифуркации рождаетсяна устойчивой ветви кривой равновесий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Spence A., Jepson A.D.** The Numerical Computation of Turning Points of Nonlinear Equations. // The Numerical Treatment of Integral Equations, eds. C.T.H. Baker and G.F. Miller, Academic Press, 1982, pp. 169-183.
2. **Jepson A.D., Spence A.** Folds in Solutions of Two Parameter Systems and Their Calculations, Part I. // SIAM Journalon Numerical Analysis, 1985, 22, pp. 347-368.
3. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Жуков К.А.** Метод неособенных продолжений в задачах устойчивости нелинейно деформируемых систем. // Строительная механика и расчет сооружений, 1989, №5, с. 68-72.
4. **Deml M., Wunderlich W.** Direct Evaluation of the Worst Imperfection Shape in Shell Buckling. // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1997, 149, pp. 201-222.
5. **Galishnikova V.V., Dunaiski P., Pahl P.J.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames. // Stellenbosch (Republic of South Africa), SUNMeDIA, 2009, pp. 382.
6. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.** О критических и послекритических равновесиях в задачах устойчивости упругих систем. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015, №5, с. 47-54.
7. **Wriggers P., Simo J.C.** A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points. // International

Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30(1), pp. 155-176.
8. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.** Исследование устойчивости круговых двухшарнирных арок с учетом влияния начальных несовершенств. // Строительная механика и расчет сооружений, 2009, №1, с. 17-23.
9. **Томпсон Дж.М.Т.** Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
10. **Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.** О явлении потери устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки. Часть 1: О послекритическом равновесии оболочки. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 3, pp. 58-72.
11. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф. Часть 1. – М.: Мир, 1984. – 350 с.
12. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы Том 1: Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем. – М.: СКАД СОФТ, 2010. – 681 с.
13. **Вольмир А.С.** Гибкие пластинки и оболочки. – М. Изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
14. **Kerr A.D., Soifer M.T.** The Linearization of the Prebuckling State and its Effect on the Determined Instability Loads // Journal of Applied Mechanics, 1969, Volume 36(4), pp 775-783.

REFERENCES

1. **Spence A., Jepson A.D.** The Numerical Computation of Turning Points of Nonlinear Eequations. In The Numerical Treatment of Integral Equations, eds. C.T.H. Baker and G.F. Miller, Academic Press, 1982, pp. 169-183.
2. **Jepson A.D., Spence A.** Folds in Solutions of Two Parameter Systems and Their Calculations, Part I. // SIAM Journalon Numerical Analysis, 1985, 22, pp. 347–368.
3. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Zhukov K.A.** Metod Neosobennyh Prodolzhenij v Zadachah Ustojchivosti Nelinejno Deformiruemyh System [The Method of Nonsingular Extending's in Problems of Stability of Nonlinearly Deformable Systems]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 1989, No. 5, pp. 68-72.
4. **Deml M., Wunderlich W.** Direct Evaluation of the Worst Imperfection Shape in Shell Buckling. // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1997, 149, pp. 201-222.
5. **Galishnikova V.V., Dunaiski P., Pahl P.J.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames. // Stellenbosch (Republic of South Africa), SUNMeDIA, 2009, pp. 382.
6. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Begichev M.M.** O Kriticheskih i Poslekriticheskih Ravnovesijah v Zadachah Ustojchivosti Uprugih Sistem [On critical and postcritical equilibria in stability problems of elastic systems]. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij, 2015, No. 5, pp. 47-54.
7. **Wriggers P., Simo J.C.** A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30(1), pp. 155-176.
8. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Begichev M.M.** Issledovanie Ustojchivosti Krugovyh Dvuhsharnirnyh Arok s Uchetom Vlijanija Nachal'nyh Nesovershenstv [Stability Analysis of Circular Two-Hinged Arches with Allowance for the Influence of Initial Imperfections]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2009, No. 1, pp. 17-23.
9. **Tompson Dzh.M.T.** Neustojchivosti i Katastrofy v Nauke i Tehnike [Instability and Catastrophe in Science and Technology]. Moscow, Mir, 1985, 254 p.
10. **Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Begichev M.M.** O Javlenii Poteri Ustojchivosti Prodol'no Szhatoj Krugovoj Cilindricheskoj Obolochki. Chast' 1: O Poslekriticheskom

Ravnovesii Obolochki [On the Phenomenon of Loss of Stability of a Longitudinally Compressed Circular Cylindrical Shell. Part 1: On the Postcritical Equilibrium of the Shell]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 3, 2016, pp. 58-72.

11. **Gilmor R.** Prikladnaja teorija katastrof. Chast' 1. M.: Mir. – 1984. – 350 s.
12. **Perel'muter A.V., Slivker V.I.** Ustojchivost' Ravnovesija Konstrukcij i Rodstvennye Problemy Tom 1: Obshhie Teoremy. Ustojchivost' Otdel'nyh Jelementov Mehanicheskih Sistem [Stability of Structural Equilibrium and Related Problems Volume 1: General Theorems. Stability of Individual Elements of Mechanical Systems]. Moscow, SKAD SOFT, 2010, 681 p.
13. **Vol'mir A.S.** Gibkie Plastinki i Obolochki [Flexible plates and shells]. Moscow, Izd-vo Tehniko-teoreticheskoj literatury, 1956, 419 p.
14. **Kerr A.D., Soifer M.T.** The Linearization of the Prebuckling State and its Effect on the Determined Instability Loads // Journal of Applied Mechanics, 1969, Volume 36(4), pp 775-783.

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 972-49-81

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73;
E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax +7(499)972-49-81.

Sergey B. Kosytsyn, Dr.Sc., Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Maxim M. Begichev, Ph.D., Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru.