О ЗАДАЧАХ ПОИСКАХ МИНИМУМА И МАКСИМУМА В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Л.С. Ляхович[1], П.А. Акимов[2,3,4,5], Б.А. Тухфатуллин[1]

[1] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[3] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
[4] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
[5] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются некоторые актуальные вопросы, связанные с решением задач о поисках минимума и максимума в строительной механике. Приводятся теоретические основы определения минимума и максимума функций, функционалов (такая потребность возникает, как известно, при решении вариационных задач), в том числе некоторые простейшие примеры. Отдельно рассматривается смешанный случай поиска минимума (максимума) интеграла, когда варьируются как переменные величины, так и функции.

Ключевые слова: поиск минимума, поиск максимума, функция, функционал, вариационные задачи, строительная механика

ABOUT HILL-CLIMBING PROBLEMS IN STRUCTURAL MECHANICS

Leonid S. Lyakhovich[1], Pavel A. Akimov[2,3,4,5], Boris A. Tukhfatullin[1]

[1] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[3] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[4] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
[5] Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to some topical issues related to hill-climbing problems (minimum search, maximum search in structural mechanics. Theoretical foundations for computing of the minimum and maximum of functions and functionals (these problem normally turn up within variational methods) including several simplest samples and the corresponding mixed case of finding the minimum (maximum) of the integral, when both the variables and the functions vary

Keywords: minimum search, maximum search, function, functional, variational problems, structural mechanics

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [10,11], задачи оптимального проектирования строительных конструкций и соответственно задачи поиска минимума и максимума в строительной механике вот уже достаточно продолжительное время привлекают заслуженное внимание исследователей. Традиционно данная проблематика связана со стремлением обеспечить максимальную технико-экономическую эффективность конструкции при соблюдении условий надежности, безопасности, долговечности, технологичности, а также эстетических требований [5]. В настоящее время теория решения задач оптимального проектирования строительных

конструкций является одним из наиболее динамично развивающихся и актуальных разделов в механике сплошной среды, а количество публикаций в этой области исследований, измеряемое в настоящее время сотнями и тысячами, продолжает неуклонно увеличиваться.

В настоящей статье, носящей в известной мере научно-учебно-методический характер, рассматриваются как хорошо известные (и изложенные в многочисленных учебниках, учебных пособиях и монографиях), так и несколько оригинальные подходы к решению отдельных классов задач поиска минимума и максимума в строительной механике.

В вводной части статьи прежде всего, следует отметить, что значительный вклад в становление и развитие прикладной теории оптимизации внесли отечественные и зарубежные ученые и специалисты: Н.П. Абовский, И.О. Адамович, Н.В. Баничук, В.Г. Бельский, А.И. Богатырев, В.А. Бунаков, В.В. Васильев, В.П. Валуйских, А.И. Виноградов, М.И. Волынский, Л.Н. Воробьев, Г.А. Геммерлинг, Е.Н. Герасимов, Ю.Б. Гольдштейн, В.Н. Гордеев, Г.И. Гребенюк, Б.В. Гринев, Э.Р. Даниелов, Т.Л. Дмитриева, С.И. Зуховицкий, В.А. Киселев, В.А. Комаров, И.Б. Лазарев, Л.С. Ляхович, В.П. Малков, Д.А. Мацюлявичюс, Ю.В. Немировский, Е.Л. Николаи, Я.И. Ольков, Н.П. Осмоловский, А.В. Перельмутер, В.М. Почтман, Н.В. Пустовой, И.М. Рабинович, Л.А. Растригин, Р.В. Риккардс, А.Р. Ржыницын, Н.Н. Складнев, В.В. Трофимович, А.Г. Угодчиков, И.С. Холопов, А.А. Чирас, Я. Арора, Л. Берки, Г. Вандерплаац, Э. Васютински, В. Венкайя, Г.М. Доббс, О. Зенкевич, В. Комков, З. Мруз, Н. Ольхофф, В. Прагер, Р. Разани, Г. Розвани, К. Флери, Р. Фокс, Р. Хафтка, Э. Хог, Н. Хот, Л. Шмит, К. Чой и др. [3].

Основополагающей проблемой оптимального проектирования является корректный выбор критерия оптимальности. Общим критерием зачастую служит минимизация стоимости конструкции, однако учесть все факторы, влияющие на эту стоимость представляется весьма затруднительным, в силу чего в практических приложениях, как правило, используются более простые критерии. Наибольшее развитие получили задачи, в которых в качестве критерия оптимальности принимается минимизация веса или объема (заметим, что существуют и такие задачи, в которых условие наименьшего объема удается заметить еще более простым, в частности, использовать критерий равнопрочности для статически определимых систем или критерий наибольшей жесткости при заданной объеме). Вместе с тем, во всех перечисленных случаях, разумеется, должны обеспечиваться условия прочности, жесткости, устойчивости, в ряде случаев вводятся также ограничения на величину основной частоты собственных колебаний. Вместе с тем, рассматриваются и двойственные постановки, когда вес (стоимость) переводится в ограничения, а в качестве функции цели, которая максимизируется, выступает несущая способность по прочности или критическая нагрузка или собственная частота [5]. Относительно меньшее развитие получили задачи оптимального проектирования, посвященные совместному рассмотрению требований эффективности, долговечности и технологичности, а также сочетанию этих требований (см., например, [11]).

В математическом отношении задачи оптимального проектирования – это *задачи оптимизации*, т.е. поиска экстремума (чаще всего условного) какой-либо (целевой) функции (вышеупомянутые минимумы стоимости, объема, максимум жесткости) и значений параметров, при которых этот экстремум достигается. Если требуется отыскать конечное число оптимальных параметров, то имеем *задачу математического программирования*.

С математической точки зрения, наряду с задачами, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции $y = f(x)$, в частности, в задачах строительной механики нередко возникает необходимость определить мини-

мальные и максимальные значения величин особого рода, называемых функционалами.

Напомним, что *функционал* – это переменная величина, значения которой определяются выбором одной или нескольких функций. Иными словами, для функционалов характерна зависимость, когда функции (или вектор-функции) соответствует число, тогда как при задании функции $y = f(x)$ числу соответствует число.

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Соответственно задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум называются *вариационные задачи*.

Вообще, вариационные задачи могут быть *классическими* (если дополнительных условий нет или они имеют форму равенств) и *неклассическими* (с дополнительными условиями в форме неравенств) [1,5,14].

Многие задачи строительной механики и математической физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В данной формулировке указанные законы называются *вариационные принципы механики* или физики.

Несмотря на то, что история создания вариационных принципов механики сплошных сред насчитывает уже более 150 лет, а вариационное исчисление является одним из классических разделов математики, развитие вариационных принципов механики деформируемого твердого тела и строительной механики, в частности, теории упругости, теории оболочек и пластин, еще далеко от завершения [1].

В первом и втором разделах настоящей статьи излагаются общеизвестные теоретические основы решения задач поиска максимума и минимума соответственно функции и функционала. В третьем разделе рассматривается оригинальный материал, связанный с поиском максимума и минимума интеграла, который п одной части аргументов может рассматриваться как функция, а по другой как функционал.

1. ЗАДАЧИ ПОИСКА МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИИ

Методы решения вариационных задач [14] весьма схожи с методами исследования функций на максимум и минимум. В этой связи в первом разделе настоящей статьи целесообразно кратко напомнить теорию максимума и минимума функций (без ограничения общности для простейшего случая рассмотрения функции одной переменной).

Переменная величина y называется *функция* переменной величины x и обозначается $y = f(x)$, если каждому значению x из некоторой области изменения x соответствует значение y, т.е. имеет место соответствие: числу x соответствует число y.

Аналогично определяются и функции нескольких переменных.

Приращение Δx аргумента x функции $f(x)$ – это разность между двумя значениями указанной переменной $\Delta x = x - x_1$. Если x – независимая переменная, то дифференциал x совпадает с приращением $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывная функция*, если малому изменению x соответствует малое изменение $f(x)$.

Определение непрерывной функции можно уточнить.

Функция $f(x)$ *непрерывна* при $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$ (здесь, разумеется, подразумевается, что x принимает лишь те значения, в которых функция $f(x)$ определена).

Линейная функция – эта функция $l(x)$, удовлетворяющая следующим условиям

$$l(cx) = cl(x),$$

где c – произвольная постоянная, и

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2).$$

Линейная функция одной переменной имеет вид:

$$l(cx) = kx + b,$$

где k и b – постоянные.
Если приращение функции

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x,$$

где $A(x)$ не зависит от Δx, а $\beta(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция называется *дифференцируемая функция*, а линейная по отношению к Δx часть приращения ($A(x)\Delta x$) называется *дифференциал* функции и обозначается df. Разделив на Δx и переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получим, что $A(x) = f'(x)$, и следовательно,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Можно дать и несколько иное определение дифференциалу: *дифференциал* функции $f(x)$ равен (ниже α – параметр)

$$\left.\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)\right|_{\alpha=0}.$$

Имеет место теорема: если дифференцируемая функция $f(x)$ достигает максимума или минимума во внутренней точке $x = x_0$ области определения функции, то в этой точке $df = 0$.
Если функция $f(x)$ дифференцируемая в точке $x = x_0$ и в этой точке выполняется равенство

$$df = 0,$$

то точка $x = x_0$ называется *стационарная точка функции* $f(x)$.
Приведем важное для последующего изложения понятие близости функций.
Функции (кривые) $y = y(x)$ и $y_1 = y_1(x)$ близки в смысле близости k-го порядка ($k = 0, 1, 2, \ldots$), если малы модули разностей

$$| y^{(s)}(x) - y_1^{(s)}(x) |, \quad s = 0, \ldots, k, \qquad (1.1)$$

где запись типа $f^{(p)}(x)$ обозначает производную p-го порядка от функции $f(x)$ по переменной x.
Из определения, очевидно, следует, что если функции близки в смысле близости k-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.
Можно считать, что близость функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ($x_0 \le x \le x_1$) в смысле близости k-го порядка определяется величиной, определяемой формулой

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{s=0}^{k} | y_1^{(s)}(x) - y_2^{(s)}(x) |. \qquad (1.2)$$

Пример 1.1. Существуют экстремальные проблемы, которые не могут быть выражены с помощью понятия функции $f(x)$ одной переменной. Простейшим относящимся сюда примером является проблема нахождения экстремумов функции $f(x_1, x_2)$ от двух независимых переменных.
Можно показать, что точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ является стационарной точкой функции $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, однако точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не является экстремумом данной функции.
В самом деле, имеем:

$$df(x_1, x_2) = x_2 dx_1 + x_1 dx_2;$$
$$df(0, 0) = 0.$$

Вместе с тем, для любого $\delta > 0$ точки $(x_1, x_2) = (\delta, -\delta)$ и $(x_1, x_2) = (\delta, \delta)$ лежат в круге $S_{2\delta}(0,0)$ и

$$f(\delta, -\delta) = -\delta^2 < f(0,0) = 0;$$
$$f(\delta, \delta) = \delta^2 > f(0,0) = 0,$$

в связи с чем точка $(x_1, x_2) = (0,0)$ не является точкой экстремума функции $f(x_1, x_2)$.

Аналогично можно показать, что точка $(x_1, x_2) = (0,0)$ является стационарной точкой функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, однако точка $(x_1, x_2) = (0,0)$ не является экстремумом данной функции – имеем седловую точку ■.

Седловая точка функции – это такая точка из области определения функции, которая является стационарной для данной функции, однако не является ее локальным экстремумом. В такой точке, если рассматривается функция двух переменных, образованная графиком функции поверхность обычно напоминает по форме седло – выпуклая в одном направлении и вогнутая в другом [4].

2. ЗАДАЧИ ПОИСКА МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА

2.1. Базовые понятия вариационного исчисления.

По аналогии с материалом, изложенным в первом разделе статьи можно привести соответствующие понятия и для функционалов (также, рассматривая вначале соответствующий простейший случай).

Переменная величина J называется *функционал*, зависящий от функции $y(x)$, и обозначается $J = J[y(x)]$ или $J = J(y(x))$, если каждой функции $y(x)$ из некоторого класса функций $y(x)$ соответствует значение J, т.е. имеет место соответствие: функции $y(x)$ соответствует число J.

Аналогично определяются и функционалы, зависящие от нескольких функций, а также функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

Приращение или *вариация* δy аргумента $y(x)$ функционала $J = J[y(x)]$ – это разность между двумя функциями $\delta y = y(x) - y_1(x)$, при этом предполагается, что $y(x)$ меняется произвольно в некотором классе функций.

Функционал $J = J[y(x)]$ называется *непрерывный функционал*, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала $J = J[y(x)]$.

Определение непрерывного функционала можно уточнить. Функционал $J = J[y(x)]$ *непрерывен* при $y = y_0(x)$ в смысле близости k-го порядка, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$$
при $\quad |y^{(s)}(x) - y_0^{(s)}(x)| < \delta, \quad s = 0, ..., k,$

при этом подразумевается, что функция $y(x)$ берется из класса функций, на которых функционал $J = J[y(x)]$ определен.

Линейный функционал – это функционал $L[y(x)]$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$L[cy(x)] = cL[y(x)],$$

где c – произвольная постоянная, и

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

Примером линейного функционала является следующий:

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx.$$

Если приращение функционала

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

можно представить в виде

$$\Delta J = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|,$$

где $L[y(x), \delta y]$ – линейный по отношению к δy функционал; $\max |\delta y|$ – максимальное значение $|\delta y|$; $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ при $\max |\delta y| \to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т.е. $L[y(x), \delta y]$ называется *вариация функционала* или *первая вариация функционала* и обозначается δJ.

Иными словами, вариация функционала – это главная, линейная по отношению к δy, часть приращения функционала.

Можно дать и несколько иное определение вариации: *вариация* функционала $J[y(x)]$ равен (ниже α – параметр)

$$\left.\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y)\right|_{\alpha=0}.$$

Очевидно, что, рассуждая аналогичным образом, можно определить *вторую вариацию функционала* (обозначается $\delta^2 J$), а также вариации более высоких порядков.

Имеет место теорема: если функционал $J[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает максимума или минимума при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ – внутренняя точка области определения функционала, то при $y = y_0(x)$ $\delta J = 0$.

Если для функционала $J[y(x)]$, имеющего вариацию, при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ – внутренняя точка области определения функционала, выполняется равенство

$$\delta J = 0,$$

то функция $y = y_0(x)$ называется *стационарная точка функционала* $J[y(x)]$.

Поясним, что функционал $J[y(x)]$ достигает при функции (на кривой) $y = y_0(x)$ максимума, если значение функционала $J[y(x)]$ при любой близкой к $y = y_0(x)$ функции не больше, чем $J[y_0(x)]$, т.е. имеем:

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \le 0. \qquad (2.1)$$

Если $\Delta J \le 0$, причем $\Delta J = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что при функции (на кривой) $y = y_0(x)$ достигается *строгий максимум*. Аналогично определяется функция $y = y_0(x)$ при которой реализуется *минимум* – в этом случае $\Delta J \ge 0$ при всех функциях, близких к функции $y = y_0(x)$.

Понятие *экстремум функционала* требует определенного уточнения: под максимумом или под минимумом выше имелось в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала для близких функций, однако как уже отмечалось выше, близость функций может быть понимаема различно, в связи с чем в определении максимума или минимума функционала следует указывать, какого порядка близость имеется в виду.

Если функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых величина $|y(x) - y_0(x)|$ мала, т.е. по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется соответственно *сильный максимум* или *сильный минимум*.

Если функционал $J[y(x)]$ достигает при функции $y = y_0(x)$ максимума или минимума по отношению к функциям, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, то максимум или минимум называются соответственно *слабый максимум* или *слабый минимум*.

Очевидно, что если при функции $y = y_0(x)$ достигается сильный максимум или сильный минимум, то, разумеется, соответственно достигается слабый максимум или слабый минимум. Обратное утверждение неверно.

Заметим, что все определения и теоретические построения настоящего раздела почти без всякого изменения переносятся на функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций

$$J[y_1(x), ..., y_n(x)] \qquad (2.2)$$

или зависящие от одной или нескольких функций многих переменных

$$J[y(x_1, ..., x_n)]; \qquad (2.3)$$

$$J[y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)]. \qquad (2.4)$$

Так, например, вариация δJ функционала $J[y(x_1, x_2)]$ может быть определена как главная линейная по отношению к δy часть приращения

$$\delta J = J[y(x_1, x_2) + \delta y] - J[y(x_1, x_2)], \qquad (2.5)$$

причем если при $y = y(x_1, x_2)$ функционал J достигает экстремума, то при $y = y(x_1, x_2)$ вариация $\delta J = 0$.

Иными словами, необходимым условием минимума (максимума) функционала J является обращение в ноль его первой вариации δJ, т.е.

$$\delta J = 0. \qquad (2.6)$$

Вторая вариация функционала J должна быть в случае минимума неотрицательной,

$$\delta^2 J \geq 0, \qquad (2.7)$$

а в случае максимума неположительной,

$$\delta^2 J \leq 0. \qquad (2.8)$$

Заметим, что необходимым условием наличия экстремума функционала $J[y(x)]$ при функции $y = y_0(x)$ является *стационарность функционала* при функции $y = y_0(x)$ или, что эквивалентно, в точке $y = y_0(x)$ (т.е. функция $y = y_0(x)$ должна быть стационарной точкой функционала $J[y(x)]$). Таким образом, стационарность – это более общее свойство функционала в данной точке, чем экстремальность [1].

Пример 2.1. Пусть задан функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \qquad (2.9)$$

причем функции $y(x)$ удовлетворяют условиям

$$y(a) = c; \quad y(b) = d. \qquad (2.10)$$

где c, d – некоторые заданные числа.

Первая и вторая вариации функционала (2.9) имеют соответственно следующий вид:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx; \qquad (2.11)$$

$$\delta^2 J = \\ = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\delta y')^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 \right) dx. \qquad (2.12)$$

■

Пример 2.2. Пусть задан функционал, зависящих от двух функций y_1, y_2, т.е. $J[y_1, y_2]$. Каждому фиксированному значению y_1 можно поставить в соответствие число

$$J_1[y_1] = \max_{y_2} J[y_1, y_2] \qquad (2.13)$$

и тем самым определить функционал J_1 на множестве тех элементов y_1, для которых существует указанных максимум.

Аналогично можно определить функционал

$$J_2[y_2] = \min_{y_1} J[y_1, y_2] \qquad (2.14)$$

Запись

$$J[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] = \min_{y_1} \max_{y_2} J[y_1, y_2] \qquad (2.15)$$

(минимум по y_1 максимумов по y_2 функционала J) означает, что при $y_1 = \tilde{y}_1$ функционал (2.13) имеет минимум, причем указанный в (2.13) максимум достигается при $y_2 = \tilde{y}_2$. Таким образом, говорят, что функционал $J[y_1, y_2]$ имеет в точке $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ *минимакс*. Иными словами, выражение (2.15) означает, что сначала для каждого фиксированного y_1 находится максимум функционала J по y_2, а затем из всех найденных значений J выбирается минимальное.

Аналогично с помощью равенства (2.14) определяется *максимин*:

$$J[\tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2] = \max_{y_1} \min_{y_2} J[y_1, y_2]. \qquad (2.16)$$

Если в точке $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ функционал $J[y_1, y_2]$ имеет одновременно и минимакс (2.15) и максимин (2.16), то говорят, что $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ – *седловая точка функционала*.

Заметим, что часто используют и другое, эквивалентное определение: точка $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ называется седловой точкой функционала $J[y_1, y_2]$, если при любых y_1, y_2 имеет место неравенство

$$J[\tilde{y}_1, y_2] \le J[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] \le J[y_1, \tilde{y}_2] \ \blacksquare. \qquad (2.17)$$

2.2. Уравнение Эйлера, уравнение Эйлера – Пуассона, уравнение Остроградского.

Пример 2.3. Пусть дано дифференциальное уравнение с одной неизвестной (искомой) функцией $y = y(x)$ и двумя заданными (т.е. известными) функциями $p = p(x)$ и $q = q(x)$

$$(py')' + q = 0, \quad x \in (a, b) \qquad (2.18)$$

и граничными условиями, при которых известны значения непосредственно самой искомой функции на краях (в граничных точках) рассматриваемого интервала (отрезка)

$$y(a) = c; \quad y(b) = d, \qquad (2.19)$$

где c, d – некоторые заданные числа.

Можно показать [12], что задача (2.18), (2.19) полностью эквивалентна задаче поиска минимума функционала

$$J[y] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} p(y')^2 - qy \right) dx \to \min \qquad (2.20)$$

с учетом граничных условий (2.19) на краях отрезка.

Поясним, что эквивалентность задачи (2.18), (2.19) и задачи (2.20), (2.19) означает, что решения указанных задач полностью совпадают при условии того, что функция $p = p(x)$ является строго положительной на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$.

Заметим, что доказательство эквивалентности вышеперечисленных задач, приведенное, например, в [9], выполняется в два этапа: сначала доказывается, что любое решение задачи (2.18), (2.19) является решением задачи (2.20), (2.19), после чего доказывается обратное утверждение.

С физической точки зрения примером задачи (2.18), (2.19) или соответственно (2.20), (2.19) является задача растяжения – сжатия стержня ■.

Пример 2.4. Пусть дано дифференциальное уравнение (2.18) с одной неизвестной (искомой) функцией $y = y(x)$, двумя заданными (т.е. известными) функциями $p = p(x)$ и $q = q(x)$, а также граничными условиями на краях рассматриваемого отрезка, при которых известно значение непосредственно самой искомой функции $y = y(x)$ на левом конце и

значение производной этой функции на правом конце отрезка

$$y(a) = c\,; \quad y'(b) = d\,, \qquad (2.21)$$

где c, d – некоторые заданные числа.

Можно показать [13], что задача (2.18), (2.21) полностью эквивалентна задаче поиска минимума функционала

$$J[y] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} p(y')^2 - qy \right) dx - d \cdot p(b) y(b) \to \min \qquad (2.22)$$

с граничными условиями только на левом конце отрезка

$$y(a) = c\,. \qquad (2.23)$$

Эквивалентность задачи (2.18), (2.21) и задачи (2.22), (2.23) означает, что решения указанных задач полностью совпадают при условии того, что функция $p = p(x)$ является строго положительной на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$.

Заметим, что доказательство эквивалентности вышеперечисленных задач, приведенное, например, в [9], аналогично выполняется в два этапа: сначала доказывается, что любое решение задачи (2.18), (2.21) является решением задачи (2.22), (2.23), после чего доказывается обратное утверждение.

С физической точки зрения примером задачи (2.18), (2.21) или соответственно (2.22), (2.23) является задача растяжения – сжатия стержня ■.

Пусть требуется исследовать на экстремум функционал вида

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx\,, \qquad (2.24)$$

при заданных граничных условиях

$$y(x_0) = y_0\,; \quad y(x_1) = y_1\,; \qquad (2.25)$$

будем считать, что $F(x, y, y')$ – трижды дифференцируемая функция.

Можно показать [18], что экстремум функционала (2.24) реализуется при функции $y = y(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0\,, \qquad (2.26)$$

где $$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F\,; \quad F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F\,, \qquad (2.27)$$

называемого *уравнение Эйлера*.

Следует отметить, что краевая задача, определяемая уравнением (2.26) и граничными условиями (2.25) не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может не быть единственным [18]. Во многих вариационных задачах строительной механики существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если уравнение Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Рассмотрим теперь функционал J более общего вида:

$$J[y_1, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') dx \qquad (2.28)$$

при заданных граничных условиях

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \;\; ..., \;\; y_n(x_0) = y_{n,0}\,; \qquad (2.29)$$

$$y_1(x_1) = y_{1,1}, \;\; ..., \;\; y_n(x_1) = y_{n,1}\,. \qquad (2.30)$$

Заметим, что граничные условия (2.29)-(2.30) также, очевидно, можно переписать в виде

$$y_j(x_0) = y_{j,0}, \;\; y_j(x_1) = y_{j,1}, \;\; j = 1, 2, ..., m\,. \qquad (2.31)$$

В данном случае функции, реализующие экстремум должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad i = 1, ..., n, \qquad (2.32)$$

где $$F_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} F; \quad F_{y_i'} = \frac{\partial}{\partial y_i'} F. \qquad (2.33)$$

Далее рассмотрим функционалы, зависящие от производных более высокого порядка

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) dx, \qquad (2.34)$$

при заданных граничных условиях вида

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \qquad (2.35)$$

$$y(x_1) = y_1; \quad y'(x_1) = y_1'; \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}; \qquad (2.36)$$

будем считать, что функция F дифференцируема $(n+2)$ раза по всем аргументам, а $y = y(x)$ дифференцируема $2n$ раз.

Функция $y = y(x)$, реализующая экстремум функционала (2.28), должна быть решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0, \qquad (2.37)$$

где $$F_{y^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} F, \quad i = 0, 1, ..., n, \qquad (2.38)$$

называемого в литературе [18] *уравнение Эйлера – Пуассона*.

Поясним, что в рамках введенных для единообразия обозначений производных $y^{(i)}$ функции y по переменной x (где $i = 0, 1, ..., n$ – порядок производной), очевидно, имеем:

$$y^{(0)} \equiv y; \quad y^{(1)} \equiv y'; \quad y^{(2)} \equiv y'' \quad \text{и т.д.}$$

Итак, требуется решать краевую задачу, определяемую уравнением (2.37) и граничными условиями (2.35)-(2.36).

Рассмотрим соответствующий функционал, зависящий от произвольного количества функций

$$J[y_1, ..., y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_1'(x), ..., y_1^{(n_1)}(x), y_2(x), y_2'(x), ..., y_2^{(n_2)}(x), ..., y_m(x), y_m'(x), ..., y_1^{(n_m)}(x)) dx \qquad (2.39)$$

при заданных граничных условиях вида

$$y_1(x_0) = y_{1,0}; \quad y_1'(x_0) = y_{1,0}'; \quad y_1^{(n_1-1)}(x_0) = y_{1,0}^{(n_1-1)}; \qquad (2.40)$$

$$y_2(x_0) = y_{2,0}; \quad y_2'(x_0) = y_{2,0}'; \quad y_2^{(n_2-1)}(x_0) = y_{2,0}^{(n_2-1)}; \qquad (2.41)$$

$$\dots$$

$$y_m(x_0) = y_{m,0}; \quad y_m'(x_0) = y_{m,0}'; \quad y_m^{(n_m-1)}(x_0) = y_{m,0}^{(n_m-1)}. \qquad (2.42)$$

Необходимое условие экстремума в данном случае записывается следующим образом:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + ... + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y^{(n_i)}} = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (2.43)$$

Обратимся теперь к рассмотрению функционалов, зависящих от функций нескольких переменных.

Пусть стоит задача исследования на экстремум функционала

$$J[z(x, y)] = \iint_{\Omega} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy, \qquad (2.44)$$

причем на границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω значения функции $z(x, y)$ заданы; будем считать функцию F трижды дифференцируемой; будем полагать, что поверхность $z(x, y)$, на которой реализуется экстремум, является дважды дифференцируемой.

Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которому должна удовлетворять функция $z(x, y)$, реализующая экстремум, называется *уравнение Остроградского* и имеет вид:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0, \qquad (2.45)$$

где $$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \qquad (2.46)$$

Для функционала

$$J[z(x_1, x_2, ..., x_n)] = \\ = \iint\limits_{\Omega}\ldots\int F(x_1, x_2, ..., x_n, z, p_1, p_2, ..., p_n)dx_1dx_2...dx_n, \qquad (2.47)$$

где $$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (2.48)$$

Уравнение Остроградского для соответствующей функции $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$, реализующей экстремум функционала (2.47), может быть записано следующим образом:

$$F_z - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\{F_{p_i}\} = 0, \qquad (2.49)$$

Если подынтегральная функция функционала J зависит от производных более высокого порядка, также можем записать необходимое условие экстремума (*уравнение Эйлера – Пуассона*), которому должна удовлетворять функция, реализующая экстремум [18].

Итак, используя необходимое условие экстремума функционала можно получить дифференциальное уравнение Эйлера, или дифференциальное уравнение Остроградского, или иные представленные в настоящем разделе уравнения. Таким образом, можно осуществить переход от вариационной задачи к традиционной краевой задаче для дифференциальных уравнений. Заметим, что с физической точки зрения, например, если для заданной системы известно выражение полной энергии деформации, которое является некоторым функционалом, то уравнения Эйлера или Остроградского для соответствующего функционала являются уравнениями равновесия или уравнениями движения данной системы.

Как известно, решение задач строительной механики основано на принципах, в которых утверждается стационарность некоторых функционалов. Так, например, вариационный принцип Лагранжа связан с отысканием минимума функционала – полной энергии деформации системы ($Э$) – из условия равенства нулю первой вариации этого функционала ($\delta Э = 0$). Вследствие изложенного проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения, выражающего условие равновесия системы, оказывается эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум функционалу, который выражает энергию системы.

Пример 2.5. Пусть в функционале (2.9) функция $y(x)$ удовлетворяет условиям (2.10). Первая вариация данного функционала имеет вид (2.11), причем интеграл от второго слагаемого, используя технику интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx.$$

Если $\eta(x)$ – произвольная кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$\eta(a) = \eta(b) = 0,$$

то однопараметрическое семейство функций

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

при достаточно малых значениях параметра α принадлежит некоторой окрестности функции $y(x)$ (т.е. функция $\tilde{y}(x)$ сколь угодно близка к $y(x)$ – см. ранее)).

Принимая во внимание тот факт, что

$$\delta y = \alpha \eta(x),$$

очевидно, можем переписать выражение для первой вариации

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx .$$

Данное выражение обращается в нуль, если функция $y(x)$ дает экстремум функционалу. Вариация δy ввиду ее произвольности не равна нулю, откуда вытекает, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

или, что эквивалентно, имеем (2.26) ■.

Пример 2.6. Пусть требуется вывести уравнение равновесия упругой мембраны при малых прогибах и заданной интенсивности нагрузки $q(x_1, x_2)$.

Как известно [7], полная энергия деформации такой мембраны выражается интегралом

$$J[y] = \\ = \iint_\Omega \left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 + q(x_1, x_2) y \right] dx_1 dx_2, \tag{2.50}$$

где μ – постоянная величина; $y(x_1, x_2)$ – функция прогибов мембраны.

Пусть плоская область Ω, занимаемая мембраной, ограничена контуром (границей) $\Gamma = \partial\Omega$. Требуется найти функцию $y(x_1, x_2)$, непрерывную в области Ω вместе с частными производными первого и второго порядков, принимающими на контуре $\Gamma = \partial\Omega$ заданные значения

$$y(x_1, x_2)\big|_\Gamma = \varphi(x_1, x_2) \tag{2.51}$$

и дающие интегралу (2.50) минимальное значение.

Рассмотрим значение функционала (2.50) для функции

$$y(x_1, x_2) + \alpha \eta(x_1, x_2),$$

где $\eta(x_1, x_2)$ – функция, непрерывная вместе с производными первого и второго порядков и равная нулю на контуре $\Gamma = \partial\Omega$.

Итак, для того, чтобы функционал (2.50) имел минимум, его первая вариация должна быть равна нулю:

$$\delta J = \\ = \iint_\Omega \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y'_{x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y'_{x_2} \right) + q \delta y \right] dx_1 dx_2 = 0, \tag{2.52}$$

где $\delta y'_{x_1} = \alpha \dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}$; $\delta y'_{x_2} = \alpha \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2}$; $\delta y = \alpha \eta$. (2.53)

Формула Грина, как известно, имеет вид:

$$\int_\Gamma P dx_1 + Q dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 ,$$

где $\Gamma = \partial\Omega$ – положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости; Ω – область, ограниченная кривой $\Gamma = \partial\Omega$; $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$ – функции, определенные в области Ω и имеющие непрерывные частные производные

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial x_2}.$$

Введем обозначение:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \qquad (2.54)$$

– оператор Лапласа.

Руководствуясь формулой Грина, можем преобразовать в интеграле (2.52) первые два члена:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$
$$= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y \right) \right] dx_1 dx_2 -$$
$$- \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right) \delta y dx_1 dx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y dx_2 -$$
$$- \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y dx_1 - \iint_D \Delta y \delta y dx_1 dx_2 .$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$
$$= \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial x_1} \delta y dx_2 - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta y dx_1 - \iint_D \Delta y \delta y dx_1 dx_2 . \qquad (2.55)$$

Контурный интеграл в последнем выражении равен нулю в силу того, что функция $\eta(x_1, x_2)$ на контуре $\Gamma = \partial\Omega$ обращается в нуль. Следовательно,

$$\delta J = -\iint_D (\mu \Delta y - q) \delta y dx_1 dx_2 = 0 . \qquad (2.56)$$

Так как δy произвольна, будем иметь следующее уравнение, которому должна удовлетворять функция $y(x_1, x_2)$, дающая минимум функционалу (2.50):

$$\mu \Delta y - q = 0 . \qquad (2.57)$$

Резюмируя вышеизложенное, следует отметить, что получили дифференциальное уравнение Остроградского, которое представляет собой уравнение Пуассона. Это и есть искомое уравнение равновесия упругой мембраны ■.

Пример 2.7. Основные положения механики могут быть сформулированы в трех эквивалентных формах: в виде дифференциальных уравнений, в виде интегральных уравнений, в виде вариационных принципов [1]. Кроме того, могут использоваться операторные постановки [6].

К числу основных вариационных принципов строительной механики, как известно, относятся *принцип Лагранжа* и *принцип Кастильяно* [14]. Оба этих принципа объединяет важнейшее свойство – свойство экстремальности соответствующего функционала, а именно на решении задачи функционал Лагранжа и функционал Кастильяно принимают минимальное значение.

Вместе с тем, между этими двумя основными вариационными принципами, разумеется, имеются и существенные различия.

Проблема поиска минимума функционала Лагранжа определяет вариационную постановку исходной задачи в перемещениях, а проблема поиска точки минимума функционала Кастильяно определяет вариационную постановку задачи в напряжениях.

На решении задачи *функционал Лагранжа* принимает минимальное значение среди всех физически и кинематически допустимых полей, тогда как уравнения равновесия в объеме тела и на его поверхности представляют собой следствие (необходимое условие) этой минимальности, т.е. являются уравнением Эйлера и естественными краевыми условиями.

На решении задачи *функционал Кастильяно* принимает минимальное значение среди всех физически и статически допустимых полей, тогда как условия совместности деформаций и кинематические краевые условия представляют собой уравнения Эйлера и естественные краевые условия.

Итак, указанные основные вариационные принцип, взаимно дополняя друг друга, требуют рассмотрения ограниченного класса полей, заранее удовлетворяющих некоторым

предписанным условиям. Таким образом, исторически возникло естественное стремление построить такой функционал (и соответственно такой вариационный принцип), который на решении задачи принимал бы если и не экстремальное, то хотя бы стационарное значение, однако зато среди полей напряженно-деформированного состояния (НДС), не подчиненных заранее каким либо условиям.

Вариационные принципы, в которых поля напряжений и поля перемещений рассматриваются как независимые даже в случае отсутствия упругой среды, принято называть *смешанные вариационные принципы*.

2.3. Вариационные задачи на условный экстремум.

Вариационные задачи на условный экстремум – это задачи, в которых требуется найти экстремум функционала J, причем на функции, от которых зависит функционал J, наложены некоторые связи.

Вообще, вариационную задачу без дополнительных условий называют *свободной*, а задачу об условном экстремуме *несвободной*.

Рассмотрим, прежде всего, задачу исследования на экстремум функции

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.58)$$

при наличии связей

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., m, \quad m < n. \qquad (2.59)$$

Очевидно, что наиболее естественным подходом к решению данной задачи является разрешение системы

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., m, \qquad (2.60)$$

уравнения которой будем считать независимыми, относительно каких-нибудь m переменных, например, относительно

$$(x_1, x_2, ..., x_n),$$

т.е. имеем

$$x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n);$$
$$x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n);$$
$$\dots$$
$$x_m = x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$$

Далее подставляем найденные $x_1, x_2, ..., x_m$ в $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, при этом данная функция становится функцией $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$. Таким образом, здесь имеем лишь $n - m$ переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$, которые уже независимы, и задача сводится по существу к исследованию функции $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$ на безусловный экстремум.

Заметим, что для решения рассматриваемой задачи более удобен другой метод решения, называемый методом неопределенных множителей, сохраняющий полное равноправие переменных. Как известно, данный метод при исследовании на экстремум функции (3.1) при наличии связей (3.3) заключается в том, что составляется новая вспомогательная функция

$$z^* = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i, \qquad (2.61)$$

где λ_i – некоторые постоянные множители.

Далее функция (2.61) исследуется уже на безусловный экстремум, т.е. составляется система уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (2.62)$$

дополненная уравнениями связей (2.60), из которой определяются все $n + m$ неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Совершенно аналогично может быть решена задача на условный экстремум для функционалов вида (2.28) с граничными условиями типа

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \quad i = 1, ..., m, \quad m < n. \tag{2.63}$$

Здесь составляют функционал

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx \tag{2.64}$$

или

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx, \tag{2.65}$$

где

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i, \tag{2.66}$$

который уже исследуется на безусловный экстремум, т.е. решают систему уравнений Эйлера, дополненную соответствующими уравнениями связей

$$\left.\begin{aligned} &F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ &\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

Вообще, количества уравнений $m+n$, очевидно, достаточно для определения $m+n$ неизвестных функций $y_1, y_2, ..., y_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Граничные условия

$$y_j(x_0) = y_{j,0}, \quad y_j(x_1) = y_{j,1}, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{2.68}$$

не должны противоречить уравнениям связей и, в принципе, позволяют определить $2n$ произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Можно показать [18], что найденные данным путем кривые, на которых достигается минимум или максимум функционала (2.64), будут решениями исходной вариационной задачи (2.28), (2.63).

Заметим, что также можно обосновать и справедливость описанной ниже теоремы.

Функции $y_1, y_2, ..., y_n$, реализующие экстремум функционала (2.22) при наличии условий (2.63) удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала (2.64) или, что эквивалентно, (2.65). Функции $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$ и $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ определяются из уравнений Эйлера и уравнений связей (2.67) [18].

Следует отметить, что уравнения связей в (2.67) можно считать уравнениями Эйлера для функционала (2.64) или (2.65), если аргументами функционала считать не только функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, но также и $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$. Уравнения связей в (2.67) предполагаются независимыми, т.е. один из соответствующих якобианов порядка m отличен от нуля, например [18]

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь более сложный случай, при котором уравнения связей являются дифференциальными уравнениями вида

$$\varphi_i(x, y'_1, y'_2, ..., y'_n) = 0, \quad i = 1, ..., m. \tag{2.69}$$

В механике связи такого вида называются *неголономные связи*, а связи вида (3.6) – *голономные связи*.

Для функционала (2.28) с условиями (2.31) и при наличии связей вида (3.69) можно показать [18], что его условный экстремум достигается при тех функциях, на которых реализуется безусловный экстремум функционала (2.64) или (2.65) (т.е., иными словами, можно доказать *правило множителей* [18]).

Изопериметрические задачи – это вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала (2.22) при наличии условий, называемых *изопериметрические условия* и имеющих соответственно вид

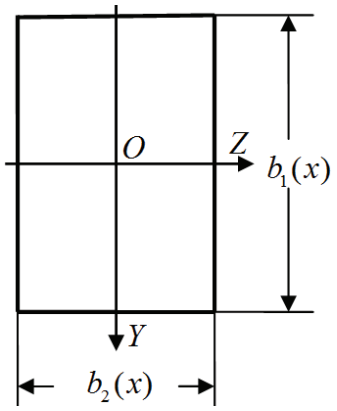

Рисунок 2.1. Поперечное сечение стержня.

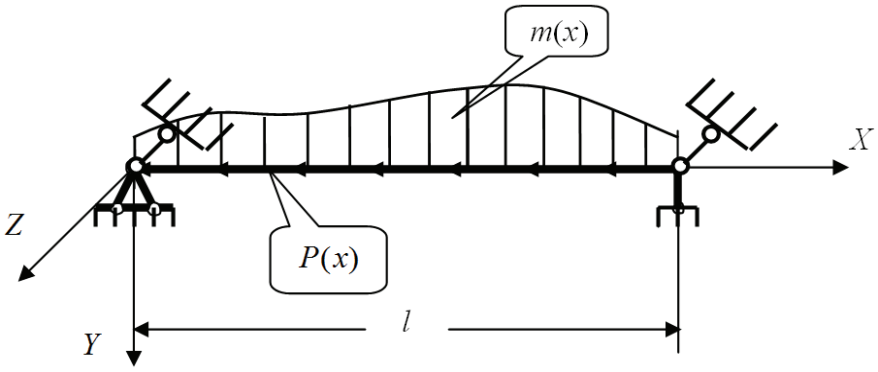

Рисунок 2.2. Схема рассматриваемого стержня.

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx = l_i, \quad i = 1, ..., m \ , \tag{2.70}$$

где l_i – постоянные; число m здесь может быть больше, меньше или равно числу n, а также аналогичные задачи для других, более сложных функционалов.

Пример 2.8. Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.1), представленный на рис. 2.2, несущий распределенную массу и загруженный продольной силой, причем в общем случае величины массы и продольной силы могут изменяться по длине стержня, граничные условия могут быть произвольными. Положим, что требуется сформулировать задачу поиска стержня минимальной материалоемкости при ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний.

Следуя рассуждениям, приведенным в [10], варьируемые параметры здесь – это размеры поперечного сечения стержня $b_1(x)$ и $b_2(x)$, а функционал цели – это объем материала стержня

$$V_0 = \int_0^l b_1(x) b_2(x) dx, \tag{2.71}$$

где l – длина стержня; V_0 – объем материала стержня.

Ограничения по устойчивости или на величину низшей частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции могут быть записаны в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega \le \omega_{1,1}; \quad \omega_0 k_\omega \le \omega_{2,1}, \tag{2.72}$$

где ω_0 – заданная частота; k_ω – установленный коэффициент запаса; $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$ – соответственно низшие частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции.

Если ограничения (2.72) будут выполняться в виде равенств, то они, очевидно, могут быть переписаны в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1}. \tag{2.73}$$

Соответственно в оптимизационной задаче требуется отыскать функции $b_1(x)$, $b_2(x)$, которые придадут функционалу (2.71) минимальное значение при условии, что будут выполнены ограничения (2.73).

Как отмечено в [10], в виду того, что при выполнении ограничений (2.73) соответствующие энергетические функционалы принимают нулевые значения, можно сформировать функционал $V_{0\omega}$, экстремум которого при варьировании $b_1(x)$ и $b_2(x)$ должен обеспечить как минимум функционала цели

(2.71), так и нулевые значения энергетических функционалов:

$$Э_{\omega 1} = \frac{1}{2}\int_0^l \{EJ_1(x)(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - \\ -(\omega_0 k_\omega)^2[m(x) + \rho F(x)v_\omega^2]\}dx = 0; \quad (2.74)$$

$$Э_{\omega 2} = \frac{1}{2}\int_0^l \{EJ_2(x)(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - \\ -(\omega_0 k_\omega)^2[m(x) + \rho F(x)w_\omega^2]\}dx = 0, \quad (2.75)$$

где $$F(x) = b_1(x)b_2(x) \quad (2.76)$$

$$v'_\omega = dv_\omega / dx; \quad v''_\omega = d^2 v_\omega / dx^2; \quad (2.77)$$

$$w'_\omega = dw_\omega / dx; \quad w''_\omega = d^2 w_\omega / dx^2; \quad (2.78)$$

– площадь поперечного сечения; E – модуль упругости материала стержня; ρ – плотность материала стержня; v_ω и w_ω – ординаты первых форм собственных колебаний в соответствующих главных плоскостях инерции; $m(x)$ и $P(x)$ показаны на рис. 2.2; $Э_{\omega 1}, Э_{\omega 2}$ – энергетические функционалы собственных колебаний в главных плоскостях инерции; $J_1(x), J_2(x)$ – соответствующие моменты инерции сечения.

С учетом вышеизложенного имеем:

$$V_{0\omega} = \int_0^l \{b_1(x) * b_2(x) - \\ -\lambda_{\omega 1}[E\frac{b_1^3(x)b_2(x)}{12}(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - \\ -(\omega_0 k_\omega)^2(m(x) + \rho b_1(x)b_2(x))v_\omega^2] - \\ -\lambda_{\omega 2}[E\frac{b_1(x)b_2^3(x)}{12}(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - \\ -(\omega_0 k_\omega)^2(m(x) + \rho b_1(x)b_2(x))w_\omega^2]\}dx, \quad (2.79)$$

где $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ – неопределенные множители.

Таким образом, рассматриваемая задача является изопериметрической [18], а $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ постоянными величинами.

Экстремум функционала (2.79) определялся решением уравнений [2]

$$(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)} = 0; \quad (\delta V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0, \quad (2.80)$$

где $(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)}$ и $(\delta V_{0\omega})_{b_2(x)}$ – соответственно вариации функционала $V_{0\omega}$ по $b_1(x)$ и $b_2(x)$.

Заметим, что данная задача более подробно рассмотрена в [10] ■.

Изопериметрические задачи могут быть сведены к задачам на условный экстремум, рассмотренным ранее, посредством введения новых неизвестных функций.

Введем обозначения

$$\int_{x_0}^{x} F_i dx = z_i(x), \quad i = 1, ..., m. \quad (2.81)$$

Следовательно,

$$z_i(x_0) = 0, \quad i = 1, ..., m. \quad (2.82)$$

Из условия

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i, \quad i = 1, ..., m.$$

имеем, что

$$z_i(x_1) = l_i, \quad i = 1, ..., m. \quad (2.83)$$

Дифференцируя $z_i(x)$ по x, получим:

$$z'_i(x_1) = F_i(x, y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n), \quad i = 1, ..., m. \quad (2.84)$$

Таким образом, интегральные изопериметрические связи вида (2.70) заменились связями дифференциальными (2.84), и, следовательно, рассматриваемая задача свелась к задаче, уже рассмотренной ранее.

Применяя правило множителей, можно вместо исследования на экстремум функционала (2.28) при наличии связей (2.84) исследовать на безусловный экстремум функционал

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i') \right) dx \qquad (2.85)$$

или, что эквивалентно, функционал

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx, \qquad (2.86)$$

где $$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i'), \qquad (2.87)$$

Уравнения Эйлера для функционала (2.85) или (2.86) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ F^*_{z_j} - \frac{d}{dx} F^*_{z'_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., m, \end{aligned}\right\} \qquad (2.88)$$

или

$$F^*_{y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i_{y_j}} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i_{y'_j}} \right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \qquad (2.89)$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (2.90)$$

Из последних m уравнений получаем, что все λ_i постоянны, а первые n уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала

$$J^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i \right) dx. \qquad (2.91)$$

Таким образом, имеет место следующее правило: для получения основного необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала (2.28) при наличии связей (2.70) необходимо составить вспомогательный функционал (2.91), где λ_i – постоянные и сформулировать для него уравнения Эйлера.

Произвольные постоянные $C_1, C_2, ..., C_{2n}$ в общем решении системы уравнений Эйлера и постоянные $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ определяются из граничных условий (2.31) и из изопериметрических условий (2.70).

Следует отметить, что система уравнений Эйлера для функционала (2.91) не изменится, если функционал (2.91) умножить на некоторый множитель μ_0 – данное свойство называется *принцип взаимности*.

В завершении настоящего раздела упомянем об еще одной задаче на условный экстремум, называемой *задача об оптимальном управлении*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \qquad (2.92)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \qquad (2.93)$$

Здесь помимо неизвестной функции (или вектор-функции) $x(t)$ в уравнении содержится и так называемая *управляющая функция* (или соответствующая вектор-функция) $u(t)$. Управляющую функцию $u(t)$ необходимо выбрать таким образом, чтобы заданный функционал вида

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t)) dt \qquad (2.94)$$

достигал экстремума.

Функция $u(t)$, дающая решение поставленной задачи, называется *оптимальная функция* или *оптимальное управление*.

Описанную задачу можно рассматривать как задачу на условный экстремум функционала (2.94) с дополнительными связями (2.92), однако в практических задачах оптимальные функции часто лежат на границе множества допустимых управляющих функций. В таких ситуациях изложенная выше теория задач на

условный экстремум, предполагавшая возможность двусторонних вариаций, неприменима. В этой связи для решения задач оптимального регулирования традиционно используются иные методы, разработанные Л.С. Понтрягиным [12], Р. Беллманом [2] и другими учеными.

В заключение здесь отметим, что многие задачи оптимального проектирования строительных конструкций могут быть сформулированы в терминах теории оптимального управления, и для их решения можно применять *метод динамического программирования* (преимущественно для дискретных задач) и *принцип максимума Л.С. Понтрягина* (преимущественно для непрерывных задач).

3. ЗАДАЧИ ПОИСКА МАКСИМУМА И МИНИМУМА ИНТЕГРАЛА, РАССМАТРИВАЕМОГО ОДНОВРЕМЕННО КАК ФУНКЦИОНАЛ И КАК ФУНКЦИЯ

Пример 3.1. Рассмотрим особый случай сформулированной в примере 2.8 задачи оптимизации стержня с прямоугольным поперечным сечением и ограничением в обеих главных плоскостях инерции по устойчивости или величине первой частоты собственных колебаний, когда варьируются оба размера поперечного сечения стержня, но один из этих размеров не зависит от x [10].

Для определенности положим, что варьируемый размер сечения b_1 не меняется по длине стержня, тогда как второй варьируемый размер $b_2(x)$ определяется в виде функции от x. Функция цели в этом случае принимает форму

$$V_0 = b_1 \int_0^l b_2(x)dx. \qquad (3.1)$$

Итак, оптимизационная задача формулируется следующим образом: требуется отыскать величину b_1 и функцию $b_2(x)$, которые придадут функции цели (3.1) минимальное значение при условии выполнения ограничений на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции (2.73).

Сформируем интеграл, условия экстремума которого должны обеспечить как минимум функции цели (3.1), так и условие, что заданная частота ω_0 будет низшей собственной в обеих главных плоскостях инерции (т.е. условие (2.73)):

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = b_1 \int_0^l b_2(x)dx - \\ - \lambda_{\omega 1} \int_0^l [E\frac{b_1^3 b_2(x)}{12}(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - \\ - (\omega_0 k_\omega)^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) v_\omega^2]dx - \\ - \lambda_{\omega 2} \int_0^l [E\frac{b_1 b_2^3(x)}{12}(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - \\ - (\omega_0 k_\omega)^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) w_\omega^2]dx. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Так как одна из двух варьируемых величин b_1 не является функцией, зависящей от x, а другая $b_2(x)$, напротив, является, интеграл (3.2) относительно b_1 должен рассматриваться как функция, а относительно $b_2(x)$ как функционал.

С учетом (2.74)-(2.75) приходим к изопериметрической задаче.

Очевидно, что вариации функционала $V_{0\omega}$ по v и w приведут к уравнениям собственных колебаний в главных плоскостях инерции, а вариации функционала $V_{0\omega}$ по $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ – к выполнению условий (2.74), (2.75).

С учетом вышеизложенного для отыскания минимума функционала (3.2) требуется выполнение следующих условий:

$$(\delta V_{O\omega})_{b_2(x)} = 0; \quad \frac{\partial V_{O\omega}}{\partial b_1} = 0, \qquad (3.3)$$

где соответствующие принятые обозначения описаны в примере 2.8 ■.

В общем случае выше описана ситуация, когда, например, вместо (2.2) приходится иметь дело с интегралами вида

$$J[y_1(x),...,y_m(x),\beta_{m+1},\beta_{m+2},...,\beta_n] \quad (3.4)$$

(в более общем случае можно перенумеровать соответствующим образом аргументы функционала так, чтобы последний принял вид (3.4)) или вместо (2.4) с интегралами вида

$$J[y_1(x_1,...,x_n),...,y_m(x_1,...,x_n),\beta_{m+1},\beta_{m+2},...,\beta_n]. \quad (3.5)$$

В частности, функции, реализующие экстремум интеграла (3.4) должны удовлетворять системе уравнений

$$\boxed{\begin{cases} (\delta J)_{y_i(x)} = 0, \quad i = 1,2,...,m \\ \dfrac{\partial J}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = m+1, m+2,...,n, \end{cases}} \quad (3.6)$$

где $(\delta J)_{y_i(x)}$ – вариация интеграла (рассматриваемого как функционал) по $y_i(x)$.

Таким образом, еще раз подчеркнем, что когда часть варьируемых величин

$$y_i(x), \quad i = 1,2,...,m \quad (3.7)$$

являются функциями, зависящими от x, а другая часть

$$\beta_i, \quad i = m+1, m+2,...,n, \quad (3.8)$$

напротив, не являются функциями, зависящими от x, то интеграл (3.4) относительно (3.7) должен рассматриваться как функционал, а относительно (3.8) как функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. **Беллман Р.** Динамическое программирование. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
3. **Дмитриева Т.Л., Нгуен Ван Ты.** Современные концепции решения задач оптимизации конструкций. // Вестник ИрГТУ, №10(69), 2012, с. 104-110.
4. **Дмитриева Т.Л., Соболев В.И.** Концепция многоуровневой оптимизации в выборе вариантов конструктивных решений металлических сооружений. // Вестник ИрГТУ №10(57), с. 2011, с. 91-94.
5. **Жадрасинов Н.Т., Заикина А.Г.** Методы решения задач оптимизации строительной механики. // Труды университета, 2005, №4, с. 69-71.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
7. **Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М.** Численные методы решения задач строительной механики. – М.: АСВ, 2005. – 425 с.
8. **Кирсанов М.Н.** Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем. // Строительная механика и расчет сооружений, 2010, №2(229), с. 60-63.
9. **Лалин В.В., Колосова Г.С.** Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 2001. – 72 с.
10. **Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.** Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 2017, Volume 13, Issue 1, pp. 9-22.

11. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 2014, Volume 10, Issue 2, pp. 14-23.
12. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 388 с.
13. **Рыбаков В.А.** Методы решения научно-технических задач в строительстве. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2013. – 167 с.
14. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
15. **Стрелецкий Н.С., Стрелецкий Д.Н.** Проектирование и изготовление экономичных металлических конструкций. – М.: Стройиздат, 1964. – 359 с.
16. **Филиппович А.П.** Смешанный метод конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика». – Одесса: Одесский ордена Трудового Красного знамени государственный университет им. И.И. Мечникова, 1984 с. – 200 с.
17. **Чирас А.А.** Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
18. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

REFERENCES

1. **Abovskij N.P., Andreev N.P., Deruga A.P.** Variacionnye principy teorii uprugosti i teorii obolochek [Variational Principles of the Theory of Elasticity and the Theory of Shells]. Moscow, Nauka, 1978, 288 p.
2. **Bellman R.** Dinamicheskoe Programmirovanie [Dynamic Programming]. Moscow, Inostrannaja literatura, 1960, 400 p.
3. **Dmitrieva T.L., Nguen Van Ty**. Sovremennye Koncepcii Reshenija Zadach Optimizacii Konstrukcij [Modern Concepts for Solving of Design Optimization Problems]. Vestnik IrGTU, 2012, No. 10(69), pp. 104-110.
4. **Dmitrieva T.L., Sobolev V.I.** Koncepcija Mnogourovnevoj Optimizacii v Vybore Variantov Konstruktivnyh Reshenij Metallicheskih sooruzhenij [The concept of multi-level optimization in the selection of options for constructive solutions of metal structures]. // Vestnik IrGTU, No. 10(57), 2011, pp. 91-94.
5. **Zhadrasinov N.T., Zaikina A.G.** Metody reshenija zadach optimizacii stroitel'noj mehaniki [Method for Solving of Optimization Problems of Structural Mechanics]. Trudy Universiteta, 2005, No. 4, pp. 69-71.
6. **Zolotov A.B., Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Mnogourovnevye Diskretnye i Diskretno-Kontinual'nye Realizacii Variacionno-Raznostnogo Metoda [Multilevel Discrete and Discrete-Continual Versions of the Variational-Difference Method]. – M.: ASV, 2013. – 416 s.
7. **Il'in V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M.** Chislennye metody reshenija zadach stroitel'noj mehaniki [Numerical Methods of Structural Analysis]. Moscow, ASV, 2005, 425 p.
8. **Kirsanov M.N.** Geneticheskij algoritm optimizacii sterzhnevyh sistem [Genetic Algorithm of Optimization of Truss Structure]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2010, No. 2(229), pp. 60-63.
9. **Lalin V.V., Kolosova G.S.** Chislennye metody v stroitel'stve. Reshenie odnomernyh zadach metodom konechnyh jelementov [Numerical Methods in Construction. Finite Element Solution of One-Dimensional Problems]. Saint-Petersburg, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta, 2001, 72 p.

10. **Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.** Kriterii minimal'noj materialoemkosti sterzhnej prjamougol'nogo poperechnogo sechenija pri ogranichenijah po ustojchivosti ili na velichinu pervoj sobstvennoj chastity [Criteria of Minimum Materials Consumption for Bars with Rectangular Cross-Section and Restrictions on Stability or Limitations on the Value of the first Natural Frequency]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 1, pp. 9-22.
11. **Ljahovich L.S., Perel'muter A.V.** Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovanija stroitel'nyh konstrukcij [Some Aspects of Optimal Design of Building Structures]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Volume 10, Issue 2, pp. 14-23.
12. **Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F.** Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov [Mathematical Theory of Optimum Processes]. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 388 p.
13. **Rybakov V.A.** Metody reshenija nauchno-tehnicheskih zadach v stroitel'stve [Methods for Solving of Scientific and Technical Problems in Construction]. Saint-Petersburg, Izdatel'stvo Politehnicheskogo universiteta, 2013, 167 p.
14. **Slivker V.I.** Stroitel'naja mehanika. Variacionnye osnovy [Structural Mechanics. Variational Foundations]. Moscow, ASV, 2005, 736 p.
15. **Streleckij N.S., Streleckij D.N.** Proektirovanie i izgotovlenie jekonomichnyh metallicheskih konstrukcij [Design and Manufacturing of Cost Effective Steel Structures]. Moscow, Strojizdat, 1964, 359 p/
16. **Filippovich A.P.** Smeshannyj metod konechnyh jelementov v zadachah o deformacii pologih obolochek [A Mixed Finite Element Method in Problems on the Deformation of Shallow Shells]. Ph.D. Thesis, Odessa, 1984, 200 p.
17. **Chiras A.A.** Stroitel'naja mehanika [Structural Mechanics]. Moscow, Strojizdat, 1989, 255 p.
18. **Elsgolts L.Je.** Differencial'nye uravnenija i variacionnoe ischislenie [Differential Equations and Variational Calculus]. Moscow, Editorial URSS, 2000, 320 p.

Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2;
e-mail: lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru,
pavel.akimov@gmail.com.

Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: prtsuab@mail.ru

Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Head of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2;
e-mail: lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31;
e-mail: akimov@raasn.ru,
pavel.akimov@gmail.com.

Boris A. Tukhfatullin, Associate Professor, Ph.D, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: prtsuab@mail.ru