РЕАЛИЗАЦИЯ TVD-СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

Ю.П. Галагуз

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается численное решение одномерной задачи фильтрации суспензии в твердой пористой среде. Приводится TVD-схема с разными функциями-ограничителями и ее сравнение с противоточной схемой и схемой Лакса-Вендроффа. Построены графики концентраций взвешенных частиц.

Ключевые слова: фильтрация, TVD-схема, ограничитель, схема Лакса-Вендроффа, диссипация, диффузия

REALIZATION OF THE TVD-SCHEME FOR A NUMERICAL SOLUTION OF THE FILTRATION PROBLEM

Yuri P. Galaguz

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: A numerical solution of one-dimensional filtration problem for suspension flow in a porous medium is considered. The TVD-scheme with different functions-delimiters is obtained. The TVD-scheme is compared with the counter-current scheme and the Lax-Wendroff scheme. Diagrams of suspended particles concentrations are shown.

Keywords: deep bed filtration, TVD-scheme, limiter, Lax-Wendroff method, dissipation, diffusion

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи диффузии частиц в фильтре описывает процесс прохождения частиц через поры фильтра и динамику выпадения осадка [4].

В рассматриваемой задаче в начальный момент времени пористая среда фильтра длины 1 заполнена водой с заданной начальной концентрацией осажденных частиц. На вход фильтра начинает поступать суспензия. Она постепенно вытесняет воду и заполняет пористую среду. В части пористой среды, находящейся перед фронтом суспензии, фильтрация суспензии отсутствует, концентрация взвешенных частиц нулевая, концентрация осажденных

частиц не меняется со временем и равна начальной.

Решение задачи фильтрации связано с решением гиперболической системы уравнений.

Для ряда важных частных случаев найдены точные [2,3] и асимптотические решения задачи фильтрации [4-8], однако в общем случае задача не имеет аналитического решения.

Пожалуй, самый эффективный и экономичный способ численного решения такого типа задач – это метод конечных разностей [9]. Однако в силу разрывных начально-краевых условий мы получаем значительные трудности в получении приемлемых решений вблизи линии разрыва - фронта волны (границе раздела сред Γ), рис.1.

Рисунок 1. Схематическое определение задачи (1)–(4).

В данной работе ставится цель превратить разностную схему Лакса-Вендроффа в TVD-схему и тем самым получить приемлемый результат решения как в окрестности разрыва, так и вдали от него.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В области бесконечной полуполосы $\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$ концентрации взвешенных и осажденных частиц $C(x,t)$, $S(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial(g(S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} = -\Lambda(S)C, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C, \quad (2)$$

с краевым и начальными условиями

$$x=0: C(x,t) = p, \quad p > 0, \quad (3)$$

$$t=0: C(x,t) = 0, \quad S(x,t) = S_0(x). \quad (4)$$

Здесь приведенные пористость $g(S)$, проницаемость $f(S)$, коэффициент фильтрации $\Lambda(S)$, начальная концентрация осадка $S_0(x)$ являются непрерывными положительными функциями.

Уравнения (1-2) образуют нелинейную (квазилинейную) гиперболическую систему первого порядка. Характеристическая кривая Γ , которая выходит из начала координат – это граница двух сред. Она разбивает область Ω на две подобласти Ω_w и Ω_s в которых находятся соответственно вода и суспензия (рис.1). В области Ω_w концентрация $C(x,t)$ взвешенных частиц нулевая, концентрация $S(x,t)$ осажденных частиц не зависит от времени и равна $S_0(x)$. В области Ω_s концентрации $C(x,t)$, $S(x,t)$ переменные и положительные. Они и должны быть найдены. Согласно методу характеристик из-за несогласованности условий (3-4) в начале координат, решение $C(x,t)$ имеет разрыв первого рода на фронте Γ . Решение $S(x,t)$ непрерывно во всей области $\Omega = \Omega_w \cup \Omega_s$ и имеет разрыв производной на фронте Γ .

При непостоянных функциях $g(S)$, $f(S)$ граница Γ является кривой линией, заданной соотношением

$$t_\Gamma(x) = \int_0^x \frac{g(S_0(u))}{f(S_0(u))} du. \quad (5)$$

Для упрощения системы введем новые функции (сделаем замены)

$$D(x,t) = g(S) \cdot C(x,t), \quad L(S) = \frac{\Lambda(S)}{g(S)},$$

$$m(S) = \frac{f(S)}{g(S)}. \quad (6)$$

В области $\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$ функции $D(x,t)$, $S(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(m(S)D)}{\partial x} = -L(S)D, \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L(S)D, \quad (8)$$

с краевым и начальными условиями

$$x = 0: D = g(S(0, t)) \cdot p, \quad p > 0, \quad (9)$$

$$t = 0: D = g(S_0(x))C_0(x), \quad S = S_0(x) \quad (10)$$

Где $S(0, t)$ может быть найдена из уравнения (2), которое при $x = 0$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dS(0, t)}{\Lambda(S(0, t))} = p dt, \quad (11)$$

с начальным условием $S(0, t = 0) = S_0(0)$.

3. TVD-СХЕМА

Зададимся сеткой в ограниченной области

$$\Omega_{XT} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\},$$

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, \quad h = \frac{1}{J}, \quad (12')$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad (12'')$$

где J - число интервалов разбиения отрезка $[0, 1]$, N - число интервалов разбиения отрезка $[0, T]$, h - шаг сетки по длине фильтра x , τ - шаг сетки по времени t .

Однако из-за разрывности начально-краевых условий, аппроксимация конечно-разностными схемами левых частей уравнений (1) или (7) либо приводит к диссипации, либо к дисперсии. К диссипации - при применении противопоточной схемы с первым порядком аппроксимации (так называемое сглаживание в местах разрывов). К дисперсии - при применении более быстро сходящихся схем типа Лакса-Вендроффа и подобных, которые дают в местах разрывов нефизические осцилляции (рябь вблизи разрывов решения).

Разнообразные TVD-схемы (Total Variation Diminishing) - схемы уменьшения полной вариации - позволяют получить неосциллирующие и высоко разрешимые решения вблизи разрывов и при определенных усло-

виях могут дать высокий порядок сходимости в местах непрерывности решения. При этом обычно устойчивая схема высокого порядка, например $O(\tau^2 + h^2)$ или выше модернизируется введением т.н. лимитеров, которые призваны гасить нефизические осцилляции и сохранять высокую скорость сходимости данной разностной схемы. Получаемая модернизированная разностная схема становится схемой, сохраняющей монотонность (сохраняющая монотонность - это когда шаблон схемы переводит монотонно убывающее или возрастающее решение с предыдущего временного слоя на последующий в монотонное с тем же направлением убывания или возрастания) и зависимой от поведения решения. При этом обычно строится TVD-схема [1], т.е. схема удовлетворяющая условию невозрастания полной вариации решения:

$$TV(D^{n+1}) \leq TV(D^n),$$

$$\text{где} \quad TV(D^n) = \sum_{j=0}^{J-1} |D_{j+1}^n - D_j^n|$$

- полная вариация сеточной функции [1, 10, 11]. А TVD-схема будет являться схемой, сохраняющей монотонность.

Монотонная схема будет строится только для первого (7) «проблемного» уравнения системы (7-10). Уравнение (8) - мы будем решать модифицированным методом Эйлера (предиктор - разность «вперед» для половины шага по времени, корректор - снова разность «вперед», но с учетом уже рассчитанного предиктора и по всему шагу по времени) [13].

Для (7) запишем схему Лакса-Вендроффа [11, 15]

$$\frac{\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(D_{j+1}^n + D_j^n)}{\frac{\tau}{2}} + \frac{(m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n)}{h} = -L(S_j^n)D_j^n, \quad (13')$$

$$\frac{\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(D_j^n + D_{j-1}^n)}{\frac{\tau}{2}} + \frac{(m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n)}{h} = -L(S_{j-1}^n)D_{j-1}^n, \quad (13'')$$

$$\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + \frac{\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} \tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} \tilde{D}_{j-\frac{1}{2}}}{h} = -L(S_j^n)D_j^n \quad (14)$$

для (8) модифицированную схему Эйлера

$$\tilde{S}_j = S_j^n + \frac{\tau}{2} L(S_j^n) D_j^n, \quad (15)$$

$$S_j^{n+1} = S_j^n + \tau L(\tilde{S}_j) \tilde{D}_j. \quad (16)$$

К сожалению из-за неравенства нулю правого члена выражения в (7) аппроксимационная точность (13-14) не достигает $O(\tau^2 + h^2)$, но только лишь $O(\tau + h)$ [14].

Выразив из (13) $\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}}$ и $\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}}$, получим

$$\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_{j+1}^n + D_j^n) - \frac{\tau}{2h}(m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n) - \frac{\tau}{2} L(S_j^n) D_j^n, \quad (17')$$

$$\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_j^n + D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2h}(m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2} L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n. \quad (17'')$$

В правых частях (17) добавим и вычтем две разности типа $D_{j+1}^n - D_j^n$. Затем некоторые новые и старые слагаемые умножим на Φ так, чтобы после подстановки этих выражений в (14), мы смогли бы выделить часть, совпадающую с противопоточной разностной схемой без Φ , и отдельное дополнительное слагаемое, называемое антидиффузионным членом, которым можно было бы манипулировать с помощью Φ . Такое Φ

называется ограничителем или лимитером. Его мы возьмем с соответствующим индексом

$$\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_{j+1}^n + D_j^n) - \frac{\tau}{2h} \Phi_{j+\frac{1}{2}} (m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n) - \frac{\tau}{2} L(S_j^n) D_j^n + \left(\frac{1}{2} \Phi_{j+\frac{1}{2}} (D_{j+1}^n - D_j^n) - \frac{1}{2} (D_{j+1}^n - D_j^n) \right) \quad (18')$$

$$\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(D_j^n + D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2h} \Phi_{j-\frac{1}{2}} (m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2} L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} \Phi_{j-\frac{1}{2}} (D_j^n - D_{j-1}^n) - \frac{1}{2} (D_j^n - D_{j-1}^n) \right) \quad (18'')$$

Подставляя (18) в (14)

$$\begin{aligned} & \frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + \frac{\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} D_j^n - \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} D_{j-1}^n}{h} + \frac{1}{2h} \left(\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} \Phi_{j+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \left((D_{j+1}^n - D_j^n) - \frac{\tau}{h} (m_{j+1}^n D_{j+1}^n - m_j^n D_j^n) \right) - \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} \Phi_{j-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \left((D_j^n - D_{j-1}^n) - \frac{\tau}{h} (m_j^n D_j^n - m_{j-1}^n D_{j-1}^n) \right) \right) = \\ & = \frac{\tau}{2h} \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} L(S_j^n) D_j^n - \frac{\tau}{2h} \tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n - \\ & L(S_j^n) D_j^n, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} = m \left(\tilde{S}_{j+\frac{1}{2}} \right)$, $\tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} = m \left(\tilde{S}_{j-\frac{1}{2}} \right)$,

$$\tilde{S}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{S}_j + \tilde{S}_{j+1}}{2}, \text{ а в (16) } \tilde{D}_j = \frac{\tilde{D}_{j-\frac{1}{2}} + \tilde{D}_{j+\frac{1}{2}}}{2}.$$

Очевидно, (18) или (19), что при $\Phi \equiv 1$ мы вернемся к схеме Лакса-Вендроффа с осцилляциями зато без излишнего сглаживания в окрестностях разрывов, а при $\Phi \equiv 0$ получим противопоточную схему, лишенную осцилляций, но диссипативную в окрестностях разрывов.

Третье слагаемое в левой части (19) можно существенно упростить, выполнив замены

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{j-\frac{1}{2}} &= m_j^n + O(h), \quad \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}} = m_j^n + O(h), \\ m_{j-1}^n &= m_j^n + O(h), \quad m_{j+1}^n = m_j^n + O(h).\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + m_j^n \frac{D_j^n - D_{j-1}^n}{h} + \frac{m_j^n}{2h} \left(1 - \frac{\tau}{h} m_j^n \right) \\ \left(\Phi_{j+\frac{1}{2}}(D_{j+1}^n - D_j^n) - \Phi_{j-\frac{1}{2}}(D_j^n - D_{j-1}^n) \right) = \quad (20) \\ \frac{\tau}{2h} m_j^n (L(S_j^n) D_j^n - L(S_{j-1}^n) D_{j-1}^n) - L(S_j^n) D_j^n\end{aligned}$$

Левая часть (20) аналогична линейному уравнению переноса и, следовательно, здесь получено обоснование (нестрогое) применимости уже ставших классическими трех лимитеров *minmod*, *superbee*, *Van-Leer* [11]. Несмотря на нестрогость, как показывает практический опыт, схема (18-19) с данными лимитерами хорошо работает и для нелинейных систем (1-4) или (7-10). Третье слагаемое в левой части (19) или (20) и есть тот самый антидиффузионный член. Он устраняет диссипативный член в первом дифференциальном приближении противоточной схемы [11], что приводит к уменьшению сглаживающих эффектов решений вблизи разрывов. В то же время, уменьшая антидиффузионный член, мы можем добиться уменьшения нефизических осцилляций на разрывных решениях. Само первое дифференциальное приближение при переменных m_j^n (т.е. зависящих от узла) можно найти в [12].

Дополнительно к нашим трем тестовым ограничителям применим еще один [11]. Но в отличие от трех ограничителей, перечисленных выше, он не гарантирует высокую сходимость со скоростью $O(\tau^2 + h^2)$. Назовем его просто *min2* (формулу дадим позднее). Но тем естественнее его применение,

что как было сказано выше, точность схемы (13-14), а значит и (18-19) также не столь высока и соответствует $O(\tau + h)$.

Итак, мы считаем Φ некоторой функцией непрерывного аргумента ξ , где ξ определяется [11] в узлах $j + \frac{1}{2}$

$$\xi_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{D_j^n - D_{j-1}^n}{D_{j+1}^n - D_j^n} & \text{при } D_{j+1}^n - D_j^n \neq 0 \\ 1 & \text{при } D_{j+1}^n - D_j^n = 0 \end{cases}, \quad (21)$$

А в случае $\xi < 0$ (т.е. на осциллирующих решениях) мы будем брать $\Phi(\xi) = 0$.

Функции-ограничители (лимитеры)

1) *minmod*

$$\Phi(\xi) = \max(0, \min(1, \xi))$$

2) *superbee*

$$\Phi(\xi) = \max(0, \min(2\xi, 1), \min(2, \xi))$$

3) *Van-Leer*

$$\Phi(\xi) = \frac{|\xi| + \xi}{|\xi| + 1} = \begin{cases} \frac{2\xi}{1 + \xi} & , \quad \xi > 0 \\ 0 & , \quad \xi \leq 0 \end{cases}$$

4) *min2*

$$\Phi(\xi) = \max(0, \min(2\xi, 2))$$

Графики этих функций даны на рис.2.

Рисунок 2. Функции-ограничители.

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Порядок численного расчета системы (7-10) состоит из следующих шагов. Вначале по формуле (21) находим узловые значения ξ и затем узловые значения выбранного лимитера. Далее т.н. предварительные значения $\tilde{S}_j^{n+1}$ (15) и предварительные значения $\tilde{D}_{j+\frac{1}{2}}$ из (17). Затем мы окончательно находим значение S_j^{n+1} из (16) и D_j^{n+1} из (19). Замены (6) помогут обратно вернуться от D_j^{n+1} к C_j^{n+1} . Для численного расчета выбран блокирующий коэффициент фильтрации:

$$\Lambda(S) = S_{\max} - S, \quad S_{\max} = 1,$$

пористость

$$g(S) = 1 + 3S,$$

проницаемость

$$f(S) = 1 + 0.1S.$$

Начальные условия

$$t = 0: C = 0, S = \frac{S_{\max}}{2}(1-x) \text{ (рис.1)}, T=4.$$

Всюду $p=1$, кроме рис. 4-7, где для наглядности графиков взяты разные значения для p . Соотношение между шагом τ по времени и шагом h по материальной координате x выбираются из условия сходимости Куранта

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{x \in [0,1], t \in [0,T]} (m(S(x,t)))}.$$

Несмотря на нелинейность уравнений (1) или (7), практика показывает, что данное условие может быть применено и для систем (1-4) или (7-10), а при нарушении данного

условия решение систем почти всегда становится неустойчивым.

Для предварительного расчета τ можно выбрать по формуле

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{x \in [0,1]} (m(S_0(x)))}.$$

Точного решения данной задачи нет, но при заданных начальных условиях из (5) можно найти точное уравнение границы раздела сред Γ

$$t_{\Gamma}(x) = 30x + 580 \ln \left(1 - \frac{x}{21} \right). \quad (22)$$

На рис.4-9 из точки пересечения $t_{\Gamma}(x)$ и сечений $x = const$ либо $t = const$ восстановлены вертикальные перпендикуляры (оранжевая сплошная линия). Данные линии показывают точные места разрывов функции концентрации взвешенных частиц $C(x,t)$.

На рис.3 изображен фронт раздела сред Γ . Точное решение (22) которого (обозн. exact) сравнивается с численным решением по противоточной схеме (обозн. upwind) и схеме TVD с ограничителем $min2$ при $J = 10$ и 250 . Причем численное нахождение границы Γ находится интегрированием методом левых прямоугольников формулы (5) уже после нахождения численного решения системы (7-10).

На рис.4-7 показаны сечения функции концентрации взвешенных частиц $C(x,t)$ при $x=0.5$ и разных $p=1, J=200$, $p=1.2, J=500$, $p=1.4, J=1000$, $p=1.6, J=2000$. Каждый из рис.4-7 соответствует расчету с использованием одной из выбранных функций-ограничителей.

На рис.8 и рис.9 даны сечения $C(x,t)$ при $x=0.5$ и $t=0.5$ соответственно. Расчет велся по противоточной схеме (обозн. upwind), Лакса-Вендроффа (обозн. LaxWen) и TVD: *minmod*, *superbee*, *Van-Leer* и *min2*, при $J = 1000$ и 10000 .

Рисунок 3. Граница раздела сред Γ .

Рисунок 6. $C(0.5, t)$ (Van-Leer).

Рисунок 4. $C(0.5, t)$ (minmod).

Рисунок 7. $C(0.5, t)$ (min2).

Рисунок 5. $C(0.5, t)$ (superbee).

Рисунок 8. Концентрации взвеси $C(0.5, t)$.

Рисунок 9. Концентрации взвеси $C(x, 0.5)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано численное решение задачи о потоке суспензии в пористой среде с помощью TVD-схемы с различными функциями ограничителями. Граница Γ двух сред найдена численно и аналитически. Построены сечения функции взвешенных частиц при заданном моменте времени и заданной точке по длине фильтра.

В точках вблизи разрыва (вблизи Γ) противопоточная схема дает сильный сглаживающий эффект точного решения (точное решение имеет вид «ступеньки») – это т.н. эффект диссипации. Этот эффект крайне медленно устраняется при увеличении числа точек сетки конечно-разностного решения (рис.8,9). А немонотонная схема Лакса-Вендроффа вблизи места разрыва дает неестественные осцилляции решения – т.н. явление дисперсии (рис.8,9). Область дисперсии при сгущении сетки уменьшается, но устранить ее нельзя. Что касается TVD-схемы, то в сравнении с диссипативными и диспергирующими схемами она дает довольно хороший результат.

Расчет границы раздела сред Γ (рис.2.) показывает, что противопоточная схема сходится

к точному решению несколько хуже, чем одна из TVD-схем (*min2*).

Хотя все функции-ограничители были изначально выведены для линейного уравнения переноса, но как показывают численные расчеты, они с успехом могут применяться и в похожем, но нелинейном уравнении фильтрации (1) или (7). Однако все это верно при заданных функциях пористости и проницаемости, а также при заданных начальных условиях. Практика применения TVD-схем при решении системы (1-4) для других исходных данных говорит о том, что при изменении, например, только лишь начальных условий, функция *superbee* очень часто оказывается предпочтительной, а функция *min2* может дать осцилляции даже вдали от разрывных решений. Тем не менее по численному расчету данной статьи наилучшим вариантом, хорошо отображающим решения вблизи разрывов, можно считать функцию *min2*. Функция *superbee* быстро сходится вблизи разрыва, приобретая форму «ступеньки», но при этом можно заметить нефизическое колебание (одна полуволна) вблизи разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Harten A.** High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. Journal of Computational Physics, 1997, Vol. 135, pp. 260-278.
2. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. Theoretical Foundations of Chemical Engineering, 2007, Vol. 41, No. 5, pp. 556-564.
3. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media. Abstract and Applied Analysis. art. ID 680693, 2013, pp. 1-9.

4. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. *Chemical Engineering Journal*, 2014, Vol. 258, pp. 374-385.
5. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. *Procedia Engineering*, 2015, Vol. 111, pp. 491-494.
6. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotics of the filtration problem for suspension in porous media. *Vestnik MGSU*, 2015, No. 1, pp. 54-62.
7. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Inverse problem of filtering the suspension in porous media. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Vol. 11, No. 1, pp. 34-41.
8. **Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В.** Расчет задачи фильтрации на входе фильтра. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, Vol. 13, No. 1, pp. 63-68.
9. **Galaguz Yu.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 157-161.
10. **Yee H.C., Warming R.F., Harten A.** Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations (paper). // NASA, 1983.
11. **Хакимзянов Г.С., Черный С.Г.** Методы вычислений. Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. – 207 с.
12. **Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.** Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985. – 368 с.
13. **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
14. **Рябенский В.С.** Введение в вычислительную математику. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.
15. **Lax P.D., Wendroff B.** Systems of Conservation Laws. // *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1960, Vol. 13, pp. 217-237.

REFERENCES

1. **Harten A.** High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 1997, Vol. 135, pp. 260-278.
2. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2007, Vol. 41, No. 5, pp. 556-564.
3. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media. *Abstract and Applied Analysis*. art. ID 680693, 2013, pp. 1-9.
4. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. *Chemical Engineering Journal*, 2014, Vol. 258, pp. 374-385.
5. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. *Procedia Engineering*, 2015, Vol. 111, pp. 491-494.
6. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotics of the filtration problem for suspension in porous media. *Vestnik MGSU*, 2015, No. 1, pp. 54-62.
7. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Inverse problem of filtering the suspension in porous media. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Vol. 11, No. 1, pp. 34-41.
8. **Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В.** Расчет задачи фильтрации на входе фильтра. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, Vol. 13, No. 1, pp. 63-68.
9. **Galaguz Yu.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with

- Changing Flow Direction. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 157-161.
10. **Yee H.C., Warming R.F., Harten A.** Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations (paper). // NASA, 1983.
 11. **Hakimzjanov G.S., Chernyj S.G.** Metody vychislenij. Chast 4. Chislennye metody reshenija zadach dlja uravnenij giperbolicheskogo tipa [Computing Methods. Part 4. Numerical Methods of Solution of Equations of Hyperbolic Type]. Novosibirsk, RIC NGU, 2014, 207 p.
 12. **Shokin Ju.I., Janenko N.N.** Metod differencial'nogo priblizhenija. Primenenie k gazovoj dinamike [Method of Differential Approximation. Application in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 1985, 368 p.
 13. **Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova Je.Z.** Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkcij, differencial'nye i integral'nye uravnenija [Numerical Methods of Analysis. Approximation of Functions, Differential and Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1967, 368 p.
 14. **Rjaben'kij V.S.** Vvedenie v vychislitel'nuju matematiku [Introduction to Computational Mathematics]. Moscow, FIZMATLIT, 2000, 296 p.
 15. **Lax P.D., Wendroff B.** Systems of Conservation Laws. // *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1960, Vol. 13, pp. 217-237.

Галагуз Юрий Петрович, старший преподаватель кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994; e-mail: yuri.galaguz@gmail.com

Yuri P. Galaguz, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavl'skoe Shosse, 26; Phone +7(499)1835994; e-mail: yuri.galaguz@gmail.com