ДВУХЭТАПНЫЙ СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА

М.Л. Мозгалева

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Настоящая статья посвящена построению численного метода, который можно разделить на два основных этапа. На первом этапе дискретная задача решается на грубой сетке, где количество узлов по каждому направлению одинаковое и является степенью 2. Затем количество узлов в каждом направлении увеличивается вдвое и полученное решение на грубой сетке с помощью дискретного базиса Хаара определяется в узлах мелкой сетки в качестве начального приближения. На втором этапе, используя наиболее подходящий итерационный метод, получаем решение в узлах мелкой сетки. В статье рассматриваются тестовые примеры решения краевых задач в одномерной, двумерной и трехмерной постановке.

Ключевые слова: краевая задача, дискретная постановка, дискретный базис Хаара, итерационные методы

TWO-STAGE GRID METHOD OF SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS WITH THE USE OF DISCRETE HAAR BASIS

Marina L. Mozgaleva

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to development of two-stage numerical method. At the first stage, the discrete problem is solved on a coarse grid, where the number of nodes in each direction is the same and is a power of 2. Then the number of nodes in each direction is doubled and the resulting solution on a coarse grid using a discrete Haar basis is defined at the nodes of the fine grid as the initial approximation. At the second stage, we obtain a solution in the nodes of the fine grid using the most appropriate iterative method. Test examples of the solution of one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional boundary problems are under consideration.

Key words: boundary problems, discrete formulation, discrete Haar basis, iterative methods

1. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

где $N_0 = N$ – четное;

Предварительные построения.

Пусть задан отрезок длиной L . Нанесем на него одномерную сетку, состоящую из N узлов. Сеточную векторную функцию $\bar{u} = [u_1, \dots, u_N]^T$ можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_0} u_j^0 \bar{\Phi}_j^0, \quad (1)$$

$$u_j^0 = u_j, \quad 1 \leq j \leq N;$$

$$\bar{\Phi}_j^0(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

– j -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня,
 $1 \leq j \leq N_0 = N, \quad 1 \leq i \leq N.$

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара первого уровня в виде [1-21]

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 + \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1, \quad (2)$$

где

$$N_1 = N/2;$$

$$u_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_j^1), \quad v_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_j^1), \quad 1 \leq j \leq N_1;$$

$$\bar{\Phi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2j-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j}^0);$$

– j -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j \leq N_1$

$$\bar{\Psi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2j-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j}^0);$$

– j -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j \leq N_1$;

$$\alpha = 1/\sqrt{2}$$

– нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (2) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке первого уровня, состоящей из N_1 – узлов, а второе слагаемое называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке первого уровня.

Представление (2) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0, \quad (3)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}, \quad (4)$$

$$\bar{v}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1 = \Psi_1 \Psi_1^T \bar{u}, \quad (5)$$

где $\Phi_1 = [\bar{\Phi}_1^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1}^1]$ и $\Psi_1 = [\bar{\Psi}_1^1, \dots, \bar{\Psi}_{N_1}^1]$

– матрицы размером $N \times N_1$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара первого уровня.

В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T \quad \text{и} \quad P_\Psi = \Psi_1 \Psi_1^T \quad (6)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке первого уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

Схема построения двухэтапного сеточного метода решения

Пусть системы линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (7)$$

$$A_1 \bar{u}^1 = \bar{f}^1 \quad (8)$$

являются дискретными аналогами некоторого операторного уравнения, определенного на заданном отрезке порядка N и $N_1 = N/2$, соответственно.

Находим решение системы (8). И затем ищем решение системы (7) в виде аппроксимации первого уровня в базисе Хаара

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad (9)$$

где $\bar{u}^1 = [u_1^1, \dots, u_{N_1}^1]^T$.

Здесь деление на нормирующий коэффициент α вызвано следующим фактом.

– Когда известно решение на 0-ом уровне, тогда аппроксимация

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}$$

проходит покомпонентно по формуле:

$$\bar{u}_1^0(2j-1) = \bar{u}_1^0(2j) = \frac{u(2j-1) + u(2j)}{2},$$

$$1 \leq j \leq N_1$$

при этом деление на 2 – это умножение на величину $\alpha^2 = 1/2$, содержащуюся в проекторе $\Phi_1 \Phi_1^T$, где $\alpha = 1/\sqrt{2}$ является нормирующим коэффициентом для каждого сомножителя. Если происходит наоборот, т.е. известно решение на первом уровне, тогда аппроксимация представлена в виде

$$\bar{u}_1^0(2j-1) = \bar{u}_1^0(2j) = \bar{u}^1(j), \quad 1 \leq j \leq N_1$$

Начальное приближение решения системы (7) представим в виде

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0, \quad (10)$$

где

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha; \\ \bar{v}_1^0 = \Psi_1 \bar{v}^1, \quad \bar{v}^1 = [v_1^1, \dots, v_{N_1}^1]^T$$

– требуется найти

Подставляем (10) в систему (7):

$$A \bar{u}_1^0 + A \Psi_1 \bar{v}^1 = \bar{f}, \quad (11)$$

Умножаем уравнение (11) слева на Ψ_1^T и переносим в правую часть известные величины. В итоге получаем систему уравнений порядка $N_1 = N/2$ относительно $\bar{v}^1$

$$A_v \bar{v}^1 = \bar{f}_v, \quad (12)$$

$$\text{где } A_v = \Psi_1^T A \Psi_1, \quad \bar{f}_v = \Psi_1^T \bar{f} - \Psi_1^T A \bar{u}_1^0.$$

Затем строим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \varphi(\bar{u}_k) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где φ – заданный каким-либо образом оператор итерационного процесса.

Пример расчета – численное решение краевой задачи о поперечном изгибе балки Бернулли.

Постановка задачи. В качестве модельного примера рассмотрим балку на упругом осно-

вании со следующими параметрами (см. рис. 1): $L=8$ м – длина; $h=1.3$ м, $b=1$ м – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м² – модуль упругости; $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке, $P_h = 100/h_b$; $k = 75 \cdot 10^3$ кН/м³ – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера; $\bar{k} = k \cdot b$, $J = bh^3/12$.

Определение прогиба балки Бернулли сводится к решению краевой задачи:

$$y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x), \quad 0 < x < L, \quad (14)$$

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \quad \text{– краевые условия} \quad (15)$$

$$\text{где } 4\alpha^4 = \frac{\bar{k}}{EJ}; \quad F = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{L}{2}).$$

Дискретное решение задачи. Разбиваем отрезок $(0, L)$ на равные части с шагом h_b (см. рис. 2).

Если n – общее количество точек, то очевидно, что

$$h_b = L/(n-1). \quad (16)$$

Далее переходим от решения краевой задачи (14)-(15) к решению системы разностных уравнений $A \bar{y} = \bar{f}$, подробно представленных с учетом краевых условий (15) в виде:

$$\begin{aligned} \underline{i=1:} \quad y_1 &= f_1 \\ \underline{i=2:} \quad -2y_1 + (5 + 4h_b^4 \alpha^4)y_2 - 4y_3 + y_4 &= f_2 \\ \underline{2 < i < n-1:} \\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 4h_b^4 \alpha^4)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} &= f_i \\ \underline{i=n-1:} \\ y_{n-3} - 4y_{n-2} + (5 + 4h_b^4 \alpha^4)y_{n-1} - 2y_n &= f_{n-1} \\ \underline{i=n:} \quad y_n &= f_n \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$x_i = h_b(i-1); \quad y_i = y(x_i);$$

Рисунок 1. К постановке рассматриваемой краевой задачи.

Рисунок 2. Дискретная аппроксимация области.

$$f_i = \begin{cases} 0, & i=1 \\ h_b^4 [F(x_i)/h_b], & 2 \leq i \leq n-1 \\ 0, & i=n \end{cases}$$

Итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k - \tau(A\bar{u}_k - \bar{f}) \end{cases}, \quad k=0,1,\dots \quad (18)$$

где $\tau = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$

– итерационный параметр; $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное, соответственно, собственное значение матрицы A . Если

$$\|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k\| < \varepsilon,$$

где величина $\varepsilon > 0$ – заданная точность (достаточно малая величина), тогда

$$\bar{y} \approx \bar{u}_{k+1}$$

– окончательное приближение решения системы (17). По результатам расчета при $N=32$ построены сравнительные графики прогибов. На рис. 3 – сравнение точного решения в единичном базисе y с начальным приближением u_0 , построенного по форму-

ле (10). На рис. 4 – y в сравнении с u_k – окончательным приближением.

2. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ.

Предварительные построения.

Пусть задан прямоугольник со сторонами длиной L_1 и L_2 в направлении x_1 и x_2 , соответственно. Нанесем на него прямоугольную сетку разбив каждую сторону прямоугольника на $(N-1)$ -частей. Таким образом, сеточная область будет содержать N^2 узлов. Сеточную векторную функцию

$$\bar{u} = [u_{11}, \dots, u_{1N}, \dots, u_{N1}, \dots, u_{NN}]^T$$

можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j_2=1}^{N_0} \sum_{j_1=1}^{N_0} u_{j_2 j_1}^0 \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^0, \quad (19)$$

где

$$N_0 = N - \text{четное};$$

$$u_{j_2 j_1}^0 = u_{j_2 j_1}, \quad 1 \leq j_1, j_2 \leq N$$

$$\bar{\Phi}_{j_2 j_1}^0(i_2, i_1) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \\ 0, & \neg(i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2) \end{cases}$$

– (j_2, j_1) -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня, $1 \leq j_2, j_1 \leq N_0 = N$, $1 \leq i_2, i_1 \leq N$.

Рисунок 3. Сравнение точного результата с начальным приближением.

Рисунок 4. Сравнение точного результата с окончательным приближением.

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара первого уровня в виде [1-21]

$$\bar{u} = \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2 j_1}^1 \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1 + \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{1 j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{1 j_2 j_1}^1 + \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{2 j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{2 j_2 j_1}^1 + \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{3 j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{3 j_2 j_1}^1, \quad (20)$$

$$\text{где } N_1 = N/2, \quad u_{j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1),$$

$$v_{1 j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{1 j_2 j_1}^1), \quad v_{2 j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{2 j_2 j_1}^1).$$

$$v_{3 j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{3 j_2 j_1}^1),$$

$$\bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1 = \alpha (\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1}^0)$$

– (j_2, j_1) -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j_2, j_1 \leq N_1$;

$$\bar{\Psi}_{1 j_2 j_1}^1 = \alpha (\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1}^0)$$

– $(1, j_2, j_1)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\bar{\Psi}_{2 j_2 j_1}^1 = \alpha (\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1}^0)$$

– $(2, j_2, j_1)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\bar{\Psi}_{3 j_2 j_1}^1 = \alpha (\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1}^0)$$

– $(3, j_2, j_1)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара 1-го уровня, $1 \leq j_2, j_1 \leq N_1$, $\alpha = 1/2$ – нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (20) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке 1-го уровня, состоящей из N_1^2 – узлов, а другие три слагаемых называются детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке 1-го уровня.

Представление (20) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0, \quad (21)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2 j_1}^1 \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}, \quad (22)$$

$$\bar{v}_{k1}^0 = \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{k j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{k j_2 j_1}^1 = \Psi_k \Psi_k^T \bar{u}, \quad k=1, 2, 3 \quad (23)$$

где $\Phi_1 = [\bar{\Phi}_{11}^1, \dots, \bar{\Phi}_{1N_1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1 1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1 N_1}^1]$;

$$\Psi_k = [\bar{\Psi}_{k11}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k1N_1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{kN_1 1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{kN_1 N_1}^1],$$

$$k=1, 2, 3$$

– матрицы размером $N^2 \times N_1^2$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара 1-го уровня. В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T \quad \text{и} \quad P_{\Psi_k} = \Psi_k \Psi_k^T, \quad k=1, 2, 3 \quad (24)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке 1-го уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

Схема построения двухэтапного сеточного метода решения

Пусть системы линейных алгебраических уравнений

$$A \bar{u} = \bar{f} \quad (25)$$

$$A_1 \bar{u}^1 = \bar{f}^1 \quad (26)$$

являются дискретными аналогами некоторого операторного уравнения, определенного на заданном прямоугольнике порядка N^2 и $N_1^2 = (N/2)^2$, соответственно.

Находим решение системы (26). И затем ищем решение системы (25) в виде аппроксимации первого уровня в базисе Хаара

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad (27)$$

где $\bar{u}^1 = [u_{11}^1, \dots, u_{1N_1}^1, \dots, u_{N_11}^1, \dots, u_{N_1N_1}^1]^T$.

Здесь деление на нормирующий коэффициент α вызвано следующим фактом.

– Когда известно решение на 0-ом уровне, тогда аппроксимация

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}$$

проходит покомпонентно по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1) = \\ \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1) = \\ &= (\bar{u}(2j_2 - 1, 2j_1 - 1) + \bar{u}(2j_2 - 1, 2j_1) + \\ &+ \bar{u}(2j_2, 2j_1 - 1) + \bar{u}(2j_2, 2j_1)) / 4, \\ &1 \leq j_2, j_1 \leq N_1 \end{aligned}$$

при этом деление на 4 – это умножение на величину $\alpha^2 = 1/4$, содержащуюся в проекторе $\Phi_1 \Phi_1^T$, где $\alpha = 1/2$ является нормирующим коэффициентом для каждого сомножителя

– Если происходит наоборот, т.е. известно решение на первом уровне, тогда аппроксимация представлена в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1) = \\ \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1) = \\ &= \bar{u}^1(j_2, j_1), \quad 1 \leq j_2, j_1 \leq N_1 \end{aligned}$$

Начальное приближение решения системы (25) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0, \quad (28) \\ \text{где} \quad \bar{u}_1^0 &= \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad \bar{v}_{k1}^0 = \Psi_{k1} \bar{v}_k^1, \\ \bar{v}_k^1 &= [v_{k11}^1, \dots, v_{k1N_1}^1, \dots, v_{kN_11}^1, \dots, v_{kN_1N_1}^1]^T, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

– требуется найти.

Подставляем (28) в систему (25):

$$A \bar{u}_1^0 + A \Psi_{11} \bar{v}_1^1 + A \Psi_{21} \bar{v}_2^1 + A \Psi_{31} \bar{v}_3^1 = \bar{f}, \quad (29)$$

Умножаем уравнение (29) слева поочередно на Ψ_{11}^T , Ψ_{21}^T , Ψ_{31}^T и перебрасываем в правую часть известные величины. В итоге получаем систему уравнений порядка $3N_1^2$ относительно $\bar{v}^1 = [\bar{v}_1^1 \quad \bar{v}_2^1 \quad \bar{v}_3^1]^T$

$$A_v \bar{v}^1 = \bar{f}_v, \quad (30)$$

где $A_v = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

– блочная матрица;

$$A_{ij} = \Psi_{i1}^T A \Psi_{j1}$$

– матрицы размером N_1^2 , $i, j = 1, 2, 3$

$$\bar{f}_v = [\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \bar{f}_3]^T$$

– блочный вектор правой части,

$$\bar{f}_i = \Psi_{i1}^T \bar{f} - \Psi_{i1}^T A \bar{u}_1^0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решение системы (30) можно проводить по методу Гаусса, используя блочную структуру матрицы и вектора правой части.

Расширенная матрица

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{f}_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \bar{f}_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \bar{f}_3 \end{array} \right]$$

Прямой ход

1-й шаг: $A_{ij}^1 = A_{ij} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j}$, $j=1,2,3$,

$\bar{f}_i^1 = \bar{f}_i - A_{i1}A_{11}^{-1}\bar{f}_1$, $i=2,3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{f}_1 \\ 0 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & \bar{f}_2^1 \\ 0 & A_{32}^1 & A_{33}^1 & \bar{f}_3^1 \end{array} \right]$$

2-й шаг: $A_{3j}^2 = A_{3j}^1 - A_{32}^1(A_{22}^1)^{-1}A_{2j}^1$, $j=2,3$,

$\bar{f}_3^2 = \bar{f}_3^1 - A_{32}^1(A_{22}^1)^{-1}\bar{f}_2^1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{f}_1 \\ 0 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & \bar{f}_2^1 \\ 0 & 0 & A_{33}^2 & \bar{f}_3^2 \end{array} \right]$$

Обратный ход

$$\bar{v}_3^1 = (A_{33}^2)^{-1}\bar{f}_3^2$$

$$\bar{v}_2^1 = (A_{22}^1)^{-1}(\bar{f}_2^1 - A_{23}^1\bar{v}_3^1)$$

$$\bar{v}_1^1 = (A_{11})^{-1}(\bar{f}_1 - A_{12}\bar{v}_2^1 - A_{13}\bar{v}_3^1)$$

Таким образом, решаем систему (30), оперируя матрицами и векторами порядка N_1^2 .
Затем строим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0, \\ \bar{u}_{k+1} = \varphi(\bar{u}_k) \end{cases}, \quad k=0,1,\dots \quad (31)$$

где φ – заданный каким-либо образом оператор итерационного процесса.

Пример расчета – численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Постановка задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = F, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (32)$$

$$U_\Gamma = \varphi(x_1, x_2), \quad \text{– краевые условия} \quad (33)$$

где $F(x_1, x_2) = -4P$, $P=1$;

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < L_1 \wedge 0 < x_2 < L_2\}$$

– прямоугольник, $L_1 = 1.4$, $L_2 = 1.4$;

$$\varphi(x_1, x_2) = Px_1(L_1 - x_1) + Px_2(L_2 - x_2)$$

Численное решение задачи методом конечных разностей.

Разбиваем исходную область на $(N-1)$ -частей по каждому направлению.

$$h_1 = \frac{L_1}{(N-1)}, \quad h_2 = \frac{L_2}{(N-1)}$$

– шаги разбиения по 1-му и 2-му направлениям, соответственно; (i_2, i_1) – мультииндекс сеточного узла с координатами (x_{i_1}, x_{i_2}) , где

$$x_{i_1} = h_1(i_1 - 1), \quad x_{i_2} = h_2(i_2 - 1), \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq N;$$

$u_{i_2 i_1} = u(x_{i_1}, x_{i_2})$ – значение неизвестной функции u в (i_2, i_1) -узле сетки.

Аппроксимируем вторые производные разностями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)_{i_2 i_1} &= \frac{u_{i_2, i_1-1} - 2u_{i_2, i_1} + u_{i_2, i_1+1}}{h_1^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)_{i_2 i_1} &= \frac{u_{i_2-1, i_1} - 2u_{i_2, i_1} + u_{i_2+1, i_1}}{h_2^2} \end{aligned} \quad (34)$$

В результате исходная краевая задача (32)-(33) переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $u_{i_2 i_1}$. Ниже представлены разрешающие уравнения для граничных и внутренних узлов сетки (i_2, i_1) :

граничные узлы:

$$u_{i_2 i_1} = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}), \quad (35)$$

внутренние узлы:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i_2, i_1-1} - 2u_{i_2, i_1} + u_{i_2, i_1+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i_2-1, i_1} - 2u_{i_2, i_1} + u_{i_2+1, i_1}}{h_2^2} \\ = F(x_{i_1}, x_{i_2}), \end{aligned} \quad (36)$$

Векторно-матричное представление системы (35)-(36):

$$A\bar{u} = \bar{f}, \quad (37)$$

$\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное, соответственно, собственное значение матрицы A .

Если

Итерационный процесс.

$$\|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k\| < \varepsilon,$$

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k - \tau(A\bar{u}_k - \bar{f}) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (38)$$

где величина $\varepsilon > 0$ – заданная точность (достаточно малая величина), тогда

$$\bar{u} \approx \bar{u}_{k+1}$$

где $\bar{u}_0$ – начальное приближение, представленное формулой (28), было дополнительно подкорректировано: используя краевые условия (33), в граничных узлах были заданы значения неизвестной функции,

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

– итерационный параметр,

– окончательное приближение решения системы (37).

Далее приведены данные точного решения исходной системы, начального приближения, построенного по формуле (28) и конечного приближения по итерационной схеме. (Для удобства представления расчет проводился при $N = 8$).

Таблица 1. Точное решение в единичном базисе U .

0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0

Таблица 2. Начальное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе $U0$.

0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0
0.2400	0.2961	0.5256	0.6314	0.6314	0.5256	0.2961	0.2400
0.4000	0.5256	0.7566	0.8701	0.8701	0.7566	0.5256	0.4000
0.4800	0.6314	0.8701	0.9876	0.9876	0.8701	0.6314	0.4800
0.4800	0.6314	0.8701	0.9876	0.9876	0.8701	0.6314	0.4800
0.4000	0.5256	0.7566	0.8701	0.8701	0.7566	0.5256	0.4000
0.2400	0.2961	0.5256	0.6314	0.6314	0.5256	0.2961	0.2400
0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0

Таблица 3. Окончательное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе Uk .

0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0

3. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ.

Предварительные построения.

Пусть задан прямоугольный параллелепипед с ребрами длиной L_1 , L_2 и L_3 в направлении x_1 , x_2 и x_3 , соответственно. Нанесем на нее прямоугольную сетку разбив каждое ребро на $(N-1)$ -частей. Таким образом, сеточная область будет содержать N^3 узлов. Сеточную векторную функцию

$$\bar{u} = [u_{111}, \dots, u_{1,N,1}, \dots, u_{N,N,1}, \dots, u_{NNN}]^T$$

можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j_3=1}^{N_0} \sum_{j_2=1}^{N_0} \sum_{j_1=1}^{N_0} u_{j_2 j_1 j_3}^0 \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^0, \quad (39)$$

где $N_0 = N - \text{четное}$;

$$u_{j_2 j_1 j_3}^0 = u_{j_2 j_1 j_3}, \quad 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq N;$$

$$\bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^0(i_2, i_1, i_3) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \wedge i_3 = j_3 \\ 0, & \neg(i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \wedge i_3 = j_3); \end{cases}$$

– $j = (j_2, j_1, j_3)$ -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня, $1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_0 = N$, $1 \leq i_2, i_1, i_3 \leq N$.

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара первого уровня в виде [1-21]

$$\bar{u} = \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2 j_1 j_3}^1 \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^1 + \sum_{k=1}^7 \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{k, j_2 j_1 j_3}^1 \bar{\Psi}_{k, j_2 j_1 j_3}^1, \quad (40)$$

где $N_1 = N/2$, $u_{j_2 j_1 j_3}^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^1)$, $v_{k, j_2 j_1 j_3}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{k, j_2 j_1 j_3}^1)$, $k = 1, 2, \dots, 7$,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $j = (j_2, j_1, j_3)$ -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1$;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{1, j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(1, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{2, j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(2, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{3, j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(3, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{4,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(4, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{5,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(5, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{6,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(6, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{7,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(7, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1$,

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

– нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (40) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке 1-го уровня, состоящей из N_1^3 – узлов, а другие семь слагаемых называются детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке 1-го уровня.

Представление (40) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, \quad (41)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2,j_1,j_3}^1 \bar{\Phi}_{j_2,j_1,j_3}^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}, \quad (42)$$

$$\bar{v}_{k1}^0 = \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{k,j_2,j_1,j_3}^1 \bar{\Psi}_{k,j_2,j_1,j_3}^1 = \Psi_{k1} \Psi_{k1}^T \bar{u}, \quad (43)$$

$$k = 1, \dots, 7$$

где

$$\Phi_1 = [\bar{\Phi}_{111}^1, \dots, \bar{\Phi}_{1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1,N_1,N_1}^1]$$

$$\Psi_{k1} = [\bar{\Psi}_{k,111}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k,1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k,N_1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k,N_1,N_1,N_1}^1] \\ k = 1, \dots, 7$$

– матрицы размером $N^3 \times N_1^3$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара 1-го уровня.

В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T \quad \text{и} \quad P_{\Psi_k} = \Psi_{k1} \Psi_{k1}^T, \quad k = 1, \dots, 7 \quad (44)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке 1-го уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

Схема построения двухэтапного сеточного метода решения

Пусть системы линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (45)$$

$$A_1 \bar{u}^1 = \bar{f}^1 \quad (46)$$

являются дискретными аналогами некоторого операторного уравнения, определенного на заданном прямоугольном параллелепипеде порядка N^3 и $N_1^3 = (N/2)^3$, соответственно.

Находим решение системы (46). И затем ищем решение системы (45) в виде аппроксимации 1-го уровня в базисе Хаара

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad (47)$$

где $\bar{u}^1 = [u_{111}^1, \dots, u_{1,N_1,1}^1, \dots, u_{N_1,N_1,1}^1, \dots, u_{N_1,N_1,N_1}^1]^T$.

Здесь деление на нормирующий коэффициент α вызвано следующим фактом.

– Когда известно решение на 0-ом уровне, тогда аппроксимация

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}$$

проходит покомпонентно по формуле:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3 - 1) = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3) = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3) = \\ & = \frac{1}{8} \sum_{s_3=0,1} \sum_{s_2=0,1} \sum_{s_1=0,1} u(2j_2 - 1 + s_2, 2j_1 - 1 + s_1, 2j_3 - 1 + s_3) \\ & \quad 1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1 \end{aligned}$$

при этом деление на 8 – это умножение на величину $\alpha^2 = 1/8$, содержащуюся в проекторе $\Phi_1 \Phi_1^T$, где

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

является нормирующим коэффициентом для каждого сомножителя

Если происходит наоборот, т.е. известно решение на первом уровне, тогда аппроксимация представлена в виде

$$\begin{aligned} & \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3 - 1) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3) = \\ & = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3) = \bar{u}^1(j_2, j_1, j_3) \\ & \quad 1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1 \end{aligned}$$

Начальное приближение решения системы (45) представим в виде

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, \quad (48)$$

$$\text{где } \bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad \bar{v}_{k1}^0 = \Psi_{k1} \bar{v}_k^1,$$

$$\bar{v}_k^1 = [v_{k,111}^1, \dots, v_{k,1,N_1,1}^1, \dots, v_{k,N_1,N_1,1}^1, \dots, v_{k,N_1,N_1,N_1}^1]^T,$$

$k = 1, \dots, 7$ – требуется найти.

Подставляем (48) в систему (45):

$$A \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 A \Psi_{k1} \bar{v}_k^1 = \bar{f}, \quad (49)$$

Умножаем уравнение (49) слева поочередно на $\Psi_{11}^T, \Psi_{21}^T, \dots, \Psi_{71}^T$ и перебрасываем в правую часть известные величины. В итоге получаем систему уравнений порядка $7N_1^3$ относительно $\bar{v}^1 = [\bar{v}_1^1 \quad \dots \quad \bar{v}_7^1]^T$

$$A_v \bar{v}^1 = \bar{f}_v, \quad (50)$$

$$\text{где } A_v = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{71} & \dots & A_{77} \end{bmatrix}$$

– блочная матрица;

$$A_{ij} = \Psi_{il}^T A \Psi_{jl}$$

– матрицы размером N_1^3 , $i, j = 1, \dots, 7$;

$$\bar{f}_v = [\bar{f}_1 \quad \dots \quad \bar{f}_7]^T$$

– блочный вектор правой части,

$$\bar{f}_i = \Psi_{il}^T \bar{f} - \Psi_{il}^T A \bar{u}_1^0, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Решение системы (50) можно проводить по методу Гаусса, используя блочную структуру матрицы и вектора правой части.

Прямой ход

k-й шаг: $C_{ik} = A_{ik} \cdot A_{kk}^{-1}$,

$$A_{ij} = A_{ij} - C_{ik} A_{kj}, \quad j = k+1, \dots, 7,$$

$$\bar{f}_i = \bar{f}_i - C_{ik} \bar{f}_k, \quad i = k+1, \dots, 7$$

$k = 1, \dots, 6$.

Обратный ход

$$\bar{v}_7^1 = A_{77}^{-1} \bar{f}_7$$

$$\bar{v}_i^1 = A_{ii}^{-1} (\bar{f}_i - \sum_{j=i+1}^7 A_{ij} \bar{v}_j^1), \quad i = 6, \dots, 1$$

Таким образом, решаем систему (50), оперируя матрицами и векторами порядка N_1^3 . Затем строим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, & k = 0, 1, \dots \\ \bar{u}_{k+1} = \varphi(\bar{u}_k) \end{cases} \quad (51)$$

где φ – заданный каким-либо образом оператор итерационного процесса.

Пример расчета – численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
Постановка задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = F, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (52)$$

$$U_\Gamma = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \text{– краевые условия} \quad (53)$$

где $F(x_1, x_2, x_3) = -6P$, $P = 1$;

$$\Omega = \{\bar{x} : 0 < x_1 < L_1 \wedge 0 < x_2 < L_2 \wedge 0 < x_3 < L_3\},$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = 1.4;$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= Px_1(L_1 - x_1) + Px_2(L_2 - x_2) + Px_3(L_3 - x_3)$$

Численное решение задачи методом конечных разностей.

Разбиваем исходную область на $(N-1)$ -частей по каждому направлению.

$$h_1 = \frac{L_1}{(N-1)}, \quad h_2 = \frac{L_2}{(N-1)}, \quad h_3 = \frac{L_3}{(N-1)}$$

– шаги разбиения по 1, 2 и 3 направлениям, соответственно;

(i_2, i_1, i_3) – мультииндекс сеточного узла с координатами $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$, где

$$x_{i_1} = h_1(i_1 - 1), \quad x_{i_2} = h_2(i_2 - 1),$$

$$x_{i_3} = h_3(i_3 - 1), \quad 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq N;$$

$u_{i_2 i_1 i_3} = u(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ – значение неизвестной функции u в (i_2, i_1, i_3) -узле сетки.

Аппроксимируем вторые производные разностями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)_{i_2 i_1 i_3} &= \frac{u_{i_2, i_1-1, i_3} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2, i_1+1, i_3}}{h_1^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)_{i_2 i_1 i_3} &= \frac{u_{i_2-1, i_1, i_3} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2+1, i_1, i_3}}{h_2^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right)_{i_2 i_1 i_3} &= \frac{u_{i_2, i_1, i_3-1} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2, i_1, i_3+1}}{h_3^2} \end{aligned} \quad (54)$$

В результате исходная краевая задача (52)-(53) переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно величин

$u_{i_2 i_1 i_3}$. Ниже представлены разрешающие уравнения для граничных и внутренних узлов сетки (i_2, i_1, i_3) :

граничные узлы : $-(1 < i_1, i_2, i_3 < N)$

$$u_{i_2 i_1 i_3} = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), \quad (55)$$

внутренние узлы: $1 < i_1, i_2, i_3 < N$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i_2, i_1-1, i_3} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2, i_1+1, i_3}}{h_1^2} + \\ & \frac{u_{i_2-1, i_1, i_3} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2+1, i_1, i_3}}{h_2^2} + \\ & \frac{u_{i_2, i_1, i_3-1} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2, i_1, i_3+1}}{h_3^2} = \\ & = F(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \end{aligned} \quad (56)$$

Векторно-матричное представление системы (55)-(56):

$$A\bar{u} = \bar{f}, \quad (57)$$

Итерационный процесс.

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k - \tau(A\bar{u}_k - \bar{f}) \end{cases}, \quad k=0,1,\dots \quad (58)$$

где $\bar{u}_0$ – начальное приближение, представленное формулой (48), было дополнительно подкорректировано: используя краевые условия (53), в граничных узлах были заданы значения неизвестной функции,

Таблица 4. Точное решение в единичном базисе U .

$U(:, :, 7)$							
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400

Таблица 5. Начальное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе $U0$.

$U0(:, :, 7)$							
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4800	0.4311	0.6675	0.7686	0.7686	0.6675	0.4311	0.4800
0.6400	0.6675	0.8960	1.0011	1.0011	0.8960	0.6675	0.6400
0.7200	0.7686	1.0011	1.1082	1.1082	1.0011	0.7686	0.7200
0.7200	0.7686	1.0011	1.1082	1.1082	1.0011	0.7686	0.7200
0.6400	0.6675	0.8960	1.0011	1.0011	0.8960	0.6675	0.6400
0.4800	0.4311	0.6675	0.7686	0.7686	0.6675	0.4311	0.4800
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400

Таблица 6. Окончательное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе Uk .

$Uk(:, :, 7)$							
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

– итерационный параметр,
 $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное, соответственно, собственное значение матрицы A .
Если

$$\|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k\| < \varepsilon,$$

где величина $\varepsilon > 0$ – заданная точность (достаточно малая величина), тогда

$$\bar{u} \approx \bar{u}_{k+1}$$

– окончательное приближение решения системы (57).

Далее приведены данные точного решения исходной системы, начального приближения, построенного по формуле (48) и окончательного приближения по итерационной схеме. (Для удобства представления расчет проводился при $N=8$). В качестве иллюстративного материала были использованы результаты, полученные для 7-ой плоскости по каждой категории данных.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Введение. Одномерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 30-39.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 40-46.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 39-46.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 47-56.

6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 57-61.
7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Понятие о вейвлетах и кратномасштабном вейвлет-анализе. // *Вестник МГСУ*, №7, 2012, с. 44-50.
8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Анализ и синтез. // *Вестник МГСУ*, №8, 2012, с. 60-65.
9. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 1: Двумерная задача теории упругости. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 18-25.
10. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 2: Трехмерная задача теории упругости. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 26-33.
11. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 3: Задача об изгибе тонкой пластины. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 34-41.
12. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Одномерные проблемы. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 3, 2012, pp. 17-23.
13. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 3, 2013, pp. 78-86.
14. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Вейвлет-анализ и его применение для решения задач расчета конструкций: Библиографический обзор. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 3, 2012, pp. 24-37.
15. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли. // *International Journal for Computational*

- Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 97-107.
16. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** К вопросу об оценке влияния спрямления аппроксимирующей сетки на численное решение краевой задачи. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 11, Issue 1, 2015, pp. 115-120.
17. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Об исследовании дискретных методов получения локальных решений одномерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 11, Issue 1, 2015, pp. 121-134.
18. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 29-37.
19. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 38-46.
20. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 47-55.
21. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А., Моджтаба Аслами.** О верификации вейвлет-реализаций многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 2014, с. 14-20.

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(499) 183-59-94; E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com