О РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 1: ПОСТАНОВКА И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ

П.А. Акимов^{1,2,3,4}, В.Н. Сидоров^{5,6,7}, О.А. Негрозов^{1,3}

¹ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁵ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Московский архитектурный институт (государственная академия), г. Москва, РОССИЯ

⁷ Kielce University of Technology, Kielce, POLAND

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации много-точечной краевой задачи статического расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. В частности, представлены расчетная модель и общая постановка задачи, общие принципы аппроксимации области, принятые правила нумерации подобластей, правила нумерации конечных элементов и дискретно-континуальных конечных элементов; описано построение дискретной (конечноэлементной) и дискретно-континуальной аппроксимирующих моделей на подобластях.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, двумерные задачи, постановки задач, аппроксимация

ABOUT SOLUTION OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD PART 1: FORMULATION AND BASIC PRINCIPLES OF APPROXIMATION

Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}, Vladimir N. Sidorov^{5,6,7}, Oleg A. Negrozov^{1,3}

¹ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

² Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

³ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁵ The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁶ Moscow Institute of Architecture (State Academy), Moscow, RUSSIA

⁷ Kielce University of Technology, Kielce, POLAND

Abstract: The distinctive paper is devoted to formulation and basic principles of approximation of multipoint boundary problem of static analysis of deep beam with the use of combined application of finite element method and discrete-continual finite element method. Design model, general formulation of the problem, basic principles of domain approximation, rule of numbering of subdomains, rule of numbering of finite elements, rule of numbering of discrete-continual finite elements are considered. Construction of discrete (finite element) and discrete-continual approximation models for subdomains is under consideration as well.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, two-dimensional problems, formulation of problems, approximation

В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова [14-19,30] и развитого в исследованиях П.А. Акимова [1-9,33-43], М.Л. Мозгалевой [1-8,26,27,34-36,38-41], Моджтаба Аслами [2,3, 23-25,34-36,38], О.А. Козырева [10,22] и О.А. Негрозова [2,3, 9,38-40,42,43].

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Пусть требуется решить многоточечную краевую задачу статического расчета (определить напряжения и перемещения) балки-стенки. Расчетная модель – двумерная (плоская) задача теории упругости. Математическая постановка двумерной задачи теории упругости приведена, например, в [28].

Пусть Ω – область, занимаемая рассматриваемой конструкцией,

$$\Omega = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}, \quad (1.1)$$

причем можно записать, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n_b-1} \Omega_k, \quad (1.2)$$

где

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l_{1,k}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}; \quad (1.3)$$

$x_{2,k}^b, k=1, 2, \dots, n_b$ – координаты граничных точек (в общем случае $n_b > 2$ и имеем многоточечную краевую задачу); n_b – количество граничных точек; $\Omega_k, k=1, 2, \dots, n_b-1$ – подобласти области Ω .

Заметим, что $l_{1,k} = \text{const}$ при $x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b$, однако в общем случае $l_1 = l_1(x_2) \neq \text{const}$, т.е. допускается случай кусочного постоянства l_1 . Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [13,20,37], можем окаймить области $\Omega_k, k=1, 2, \dots, n_b-1$ соответствующими расширенными $\omega_k, k=1, 2, \dots, n_b-1$ и перейти к расширенной области ω ,

$$\omega = \bigcup_{k=1}^{n_b-1} \omega_k, \quad (1.4)$$

где

$$\omega_k = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < \tilde{l}_{1,k}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\} \supset \Omega_k, \quad (1.5)$$

причем можно выбрать

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{1,k} &= \tilde{l}_1 = \text{const}, k=1, 2, \dots, n_b-1, \text{ т.е.} \\ \omega_k &= \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < \tilde{l}_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\} \supset \Omega_k. \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ

Пусть в пределах одной группы областей ω_k из числа указанных в (1.4) физико-геометрические параметры (характеристики) конструкции не зависят от переменной x_2 , отвечающей так называемому основному направлению – для таких областей целесообразно использовать дискретизацию в рамках ДКМКЭ (имеем дискретно-континуальную модель). Пусть в пределах другой группы областей ω_k соответствующие физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно – для таких областей следует использовать дискретизацию в рамках МКЭ (имеем дискретную модель). Таким образом, целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ.

Для удобства последующего изложения введем параметр ρ_k , называемый параметр дискретизации и принимающий следующие значения: $\rho_k = 1$ – используется дискретизация в рамках МКЭ [11,12,29,44-46]; $\rho_k = 2$ – используется дискретизация в рамках ДКМКЭ [1,14-19].

3. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ ПОДОБЛАСТЕЙ

Вообще, могут использоваться различные подходы к нумерации подобластей (или, что эквивалентно, областей), определяемых формулой (1.5).

Первый подход предусматривает отдельную нумерацию областей с различными типами дискретизации:

$$k_1 = k_1(k) = \sum_{s=1}^k |\rho_s - 2|; \\ k_2 = k_2(k) = \sum_{s=1}^k |\rho_s - 1|, \quad (3.1)$$

где k – исходный номер подобласти ω_k ; $k_1 = k_1(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках МКЭ или $k_2 = k_2(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках ДКМКЭ. Разумеется, также можно построить обратные зависимости

$$k = k(k_1); \quad k = k(k_2), \quad (3.2)$$

выполнив табуляцию результатов вычислений по формулам (3.1).

Таким образом, можем переписать (1.4) в следующем виде:

$$\omega = \bigcup_{k_1=1}^{N_{fe}} \omega_{k_1}^{fe} + \bigcup_{k_2=1}^{N_{dc}} \omega_{k_2}^{dc}, \quad (3.3)$$

причем справедливы соотношения

$$N_{fe} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\rho_s - 2|; \quad N_{dc} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\rho_s - 1|; \quad (3.4)$$

$$N_{fe} + N_{dc} = n_b - 1, \quad (3.5)$$

где $\omega_{k_1}^{fe}$, $k_1 = 1, 2, \dots, N_{fe}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках МКЭ; $\omega_{k_2}^{dc}$, $k_2 = 1, 2, \dots, N_{dc}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках ДКМКЭ.

Второй подход, напротив, основан на единой нумерации областей с различными типами дискретизации, т.е. на использовании представления вида (1.4), в котором

$$\omega_k = \begin{cases} \omega_k^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ \omega_k^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (3.6)$$

В таком случае, очевидно, соответствующие пересчеты по формулам (3.1)-(3.2) не требуются. В настоящей статье далее будет использоваться именно второй подход.

4. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ КОНЕЧНЫХ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe} . Введем обозначение

$$l_{2,k}^{fe} = x_{2,k+1}^b - x_{2,k}^b, \text{ если } \rho_k = 1. \quad (4.1)$$

Пусть

$$x_{1,i}^{fe,k}, i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{fe} \text{ и } x_{2,j}^{fe,k}, j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{fe}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1 и x_2) узлов конечных элементов в области ω_k^{fe} ; $(N_{1,k}^{fe} - 1)$ и $(N_{2,k}^{fe} - 1)$ – количество конечных элементов, на которые «разбивается» область ω_k^{fe} по направлениям, соответствующим переменным x_1 и x_2 (рассматривается прямоугольная аппроксимирующая сетка). Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{fe} будем применять трехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k, i, j) , где k – номер подобласти дискретизации в рамках МКЭ, i и j – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 и x_2); $\omega_{k,i,j}^{fe}$ – обозначение соответствующего конечного элемента.

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc} . Введем обозначение

$$l_{2,k}^{dc} = x_{2,k+1}^b - x_{2,k}^b, \text{ если } \rho_k = 2. \quad (4.2)$$

Пусть $x_{1,i}^{dc,k}, i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{dc}$ – координаты (по переменной x_1) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области ω_k^{dc} ; $(N_{1,k}^{dc} - 1)$ – общее количество используемых дискретно-континуальных конечных элементов в области ω_k^{dc} . Для удобства алгоритмических по-

строений будем применять двухиндексную систему нумерации узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{dc} : имеем номер типа (k, i) , где k – номер подобласти, i – номер элемента по при дискретизации вдоль направления, соответствующего переменной x_1); $\omega_{k,i}^{dc}$ – обозначение соответствующего дискретно-континуального конечного элемента.

Примеры соответствующих обозначений показаны на рис. 4.1.

Для удобства последующего изложения можно ввести обозначения:

$$N_{1,k} = \begin{cases} N_{1,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ N_{1,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2; \end{cases} \quad N_{2,k} = N_{2,k}^{fe}, \text{ если } \rho_k = 1; \quad (4.3)$$

$$x_{1,k,i} = \begin{cases} x_{1,i}^{fe,k}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ x_{1,i}^{dc,k}, & \text{если } \rho_k = 2; \end{cases} \quad x_{2,k,j} = x_{2,j}^{fe,k}, \text{ если } \rho_k = 1; \quad (4.4)$$

$$l_{2,k} = \begin{cases} l_{2,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ l_{2,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Заметим, что в простейших случаях схема дискретизации конструкции по направлению, отвечающему переменной x_1 , неизменна по всей области, т.е. справедливы равенства (в ходе дальнейшего изложения будем полагать, что эти равенства выполняются для рассматриваемого в настоящей статье случая (в противном случае приводимые далее выкладки существенно усложняются))

$$N_{1,k} = N_1, \quad k = 1, 2, \dots, n_b - 1; \quad (4.6)$$

$$x_{1,k,i} = x_{1,i}, \quad k = 1, 2, \dots, n_b - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (4.7)$$

Заметим, что при изложении аппроксимаций в рамках ДККЭ будем следовать системе обозначений, принятой в [1].

Рисунок 4.1. Пример к постановке трехточечной краевой задачи.

5. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe} . Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по обоим координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_k^{fe} разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\omega_k^{fe} = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_{2,k}-1} \omega_{k,i,j}^{fe};$$

$$\omega_{k,i,j}^{fe} = \{(x_1, x_2) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1},$$

$$x_{2,k,j} < x_2 < x_{2,k,j+1}\}, \quad (5.1)$$

определяя характеристическую функцию конечного элемента $\omega_{k,i,j}^{fe}$ по следующей формуле

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j}^{fe} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i,j}^{fe} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (5.2)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \mu. \quad (5.3)$$

Основными неизвестными в узлах конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ (верхний индекс «(k)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$), т.е. для (k, i, j) -го узла это $u_1^{(k,i,j)}, u_2^{(k,i,j)}$.

Поля $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ по обоим координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$) в пределах каждого конечного элемента аппроксимируются линейно (т.е. используются стандартные прямоугольные четырехузловые конечные элементы двумерной задачи теории упругости (в перемещениях) [12,29]).

Можно показать [12,29], что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{fe} , разрешающая система $2N_1N_{2,k}$ линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_k \bar{U}_k = \bar{R}_k, \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_k = & [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots \\ & (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & (\bar{u}_n^{(k,1,N_{2,k})})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,N_{2,k})})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,N_{2,k})})^T]^T \end{aligned} \quad (5.5)$$

– $4N_1$ -мерный глобальный вектор неизвестных (нижний индекс «(k)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$);

$$\bar{u}_n^{(k,i,j)} = [u_1^{(k,i,j)} \quad u_2^{(k,i,j)}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}; \quad (5.6)$$

K_k – глобальная матрица жесткости $2N_1N_{2,k}$ -го порядка; $\bar{R}_k$ – $2N_1N_{2,k}$ - мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок).

6. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ.

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc} . Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси $0x_2$) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси $0x_1$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_1 разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\begin{aligned} \omega_k^{dc} &= \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \omega_{k,i}^{dc}; \\ \omega_{k,i}^{dc} &= \{ (x_1, x_2) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \\ & \quad x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

определяя характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента (ДККЭ) $\omega_{k,i}^{dc}$ по следующей формуле

$$\theta_{k,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i}^{dc} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i}^{dc} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (6.2)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{k,i} = \theta_{k,i} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i} = \theta_{k,i} \mu. \quad (6.3)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ и их производные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}$ по переменной x_2 (верхний индекс «(k)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{dc}$), т.е. для (k, i) -го узла это $u_1^{(k,i)}, u_2^{(k,i)}$ и $v_1^{(k,i)}, v_2^{(k,i)}$.

Поля $u_1^{(k,i)}, u_2^{(k,i)}$ и $v_1^{(k,i)}, v_2^{(k,i)}$ по неосновному направлению (вдоль x_1) в пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются линейно.

Можно показать [1], что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{dc} , разрешающая система $4N_1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\bar{U}'_k(x_2) = A_k \bar{U}_k(x_2) + \bar{R}_k(x_2), \quad (6.4)$$

$$\text{где } \bar{U}_k = \bar{U}_k(x_2) = [(\bar{u}_k)^T \quad (\bar{v}_k)^T]^T \quad (6.5)$$

– $4N_1$ -мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс «(k)», следуя

[1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{dc}$;

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_2) = [(\bar{u}_n^{(k,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1)})^T]^T; \quad (6.6)$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k(x_2) = [(\bar{v}_n^{(k,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1)})^T]^T; \quad (6.7)$$

$$\bar{u}_n^{(k,i)} = \bar{u}_n^{(k,i)}(x_2) = [u_1^{(k,i)} \quad u_2^{(k,i)}]^T; \\ \bar{v}_n^{(k,i)} = \bar{v}_n^{(k,i)}(x_2) = [v_1^{(k,i)} \quad v_2^{(k,i)}]^T; \quad (6.8)$$

A_k – матрица коэффициентов $4N_1$ -го порядка; $\bar{R}_k(x_2)$ – $4N_1$ -мерная вектор-функция правых частей.

Решение системы (6.4) может быть представлено в виде [1]:

$$\bar{U}_k(x_2) = E_k(x_2)\bar{C}_k + \bar{S}_k(x_2), \quad (6.9)$$

где $E_k(x_2) = \varepsilon_k(x_2 - x_{2,k}^b) - \varepsilon_k(x_2 - x_{2,k+1}^b)$;

$$\bar{S}_k(x_2) = \varepsilon_k(x_2) * \bar{R}_k(x_2); \quad (6.10)$$

$\varepsilon_k(x_2)$ – фундаментальная матрица-функция системы (6.4), определяемая согласно [1,26]; символ «*» здесь и далее обозначает операцию свертки функций [21,31,32]; $\bar{C}_k$ – $4N_1$ -мерный вектор постоянных, определяемый из соответствующих граничных условий.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе

совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 33-45.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 18-32.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении

- трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 44-63.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 64-82.
 6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 51-55.
 7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 56-79.
 8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 80-97.
 9. **Акимов П.А., Негрозов О.А.** Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 11, Issue 4, 2015, pp. 14-28.
 10. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Определение собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики на основе дискретно-континуального метода конечных элементов. // *Вестник МГСУ*, №3, 2009, с. 255-259.
 11. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия – закрытия швов и макротрещин. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.07 «Гидротехническое и мелиоративное строительство». – М.: МГУП, 1998. – 367 с.
 12. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.

13. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. – 284 с.
14. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
15. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
16. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
17. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
18. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
19. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
20. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. – М.: МИСИ, 1992. – 86 с.
21. **Кеч В., Теодореску П.** Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
22. **Козырев О.А.** Определение собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: МГСУ, 2009. – 200 с.
23. **Моджтаба Аслами.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные подходы к локальному расчету строительных конструкций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». – М.: НИУ МГСУ, 2015. – 321 с.
24. **Моджтаба Аслами, Акимов П.А., Мсхалая Ж.И.** К вопросу о верификации многоуровневых подходов к локальному расчету строительных конструкций. Часть 1: Дискретный (численный) подход. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 41-60.
25. **Моджтаба Аслами, Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** К вопросу о верификации многоуровневых подходов к локальному расчету строительных конструкций Часть 2: Дискретно-континуальный (численно-аналитический) подход. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 61-79.
26. **Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные методы много-

- уровневого расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: НИУ МГСУ, 2015. – 489 с.
27. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 120-122.
 28. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
 29. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
 30. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // *Известия ВУЗов. Строительство*, №10, 2004, с. 8-14.
 31. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
 32. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
 33. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // *Applied Mechanics and Materials* Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
 34. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // *MATEC Web Conferences*, Vol. 86 (2016) 8 pages.
 35. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // *MATEC Web Conferences*, Vol. 86 (2016) 8 pages.
 36. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Advanced Materials Research* Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
 37. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
 38. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, Vol. 91 (2014), pp. 2-7.
 39. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research*, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 89-94.
 40. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical

- Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research*, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 95-103.
41. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, Vol. 91 (2014), pp.14-19.
42. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
43. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // *Procedia Engineering*, Vol. 153 (2016) pp. 926-932.
44. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** *Finite Elements and Approximation*. Dover Publications, 2006, 352 pages.
45. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Volume 2*. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 pages.
46. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 pages.
- хитектурный институт (государственная академия), кафедра высшей математики и строительной механики; Российский университет дружбы народов; 107031, Россия, г. Москва, ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4; E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; email: NegrozovOA@mgsu.ru.
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Vladimir N. Sidorov, Professor, Dr.Sc., Department of Advanced Mathematics and Structural Mechanics; Moscow Institute of Architecture (State Academy); The Peoples' Friendship University of Russia; 11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031, Russia; E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Московский ар-