КРИТЕРИИ МИНИМАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Л.С. Ляхович[1], П.А. Акимов[2,3,4,5], Б.А. Тухфатуллин[1]

[1] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[3] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
[4] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
[5] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В большинстве работ по оптимизации сооружений при постановке проблемы используется аппарат математического программирования. Однако в ряде исследований были выявлены особые свойства оптимальных систем и сформулированы критерии, позволяющие оценивать близость оптимальных решений к минимально материалоемкому. В частности были созданы соответствующие критерии, для стержней с прямоугольным поперечным сечением при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний. Вместе с тем не все особенности некоторых критериев были отмечены. Кроме того представляется целесообразным выявление соответствующих критериев для частных случаев набора варьируемых параметров. В данной статье отмечается еще одно дополнительное свойство критерия близости оптимального решения к минимально материалоемкому для стержней с прямоугольным поперечным сечением при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний, модифицируется один из ранее предложенных критериев, а также формулируется соответствующий критерий для случая, когда один из варьируемых параметров прямоугольного сечения не изменяется по длине стержня.

Ключевые слова: оптимизация, системы минимальной материалоемкости, особые свойства, устойчивость, частота, критическая сила, формы потери устойчивости, собственных колебаний приведенные напряжения

CRITERIA OF MINIMUM MATERIALS CONSUMPTION FOR BARS WITH RECTANGULAR CROSS-SECTION AND RESTRICTIONS ON STABILITY OR LIMITATIONS ON THE VALUE OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY

Leonid S. Lyakhovich[1], Pavel A. Akimov[2,3,4,5], Boris A. Tukhfatullin[1]

[1] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[3] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[4] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
[5] Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: Apparatus of mathematical programming is normally used in the most part of research works, dealing with structural optimization. However, the special properties of optimal systems have been identified in several studies. Besides, corresponding criteria, which have been formulated as well, can be used for assessments of proximity of optimal solutions to minimal material consumption. Particularly relevant criteria for bars with rectangular cross-section and restrictions on the stability or limitations on the value of the first natural frequency

have been formulated. However, not all the features of some of the criteria have been observed. In addition it seems appropriate to identify relevant criteria for special cases set variable parameters. The distinctive paper contains additional property proximity criterion of optimal solutions to minimal consumption of materials for the bars with a rectangular cross-section and limitations on the value of the first natural frequency, modification of one of the previously proposed criteria and formulation of appropriate criterion for the case where one of the parameters of variable rectangular cross-section is constant along the length of the bar.

Keywords: structural optimization, systems of minimum material consumption, special properties of optimal systems, stability, frequency, critical load, buckling modes, reduced stresses of natural vibrations

Существует точка зрения, которая относит методы оптимизации к чисто теоретическим изысканиям, имеющим очень ограниченное практическое значение. Действительно, во многих случаях оптимальные проекты не учитывают ряд особенностей сооружений и оказываются технологически трудно реализуемыми. Однако по мере развития методов оптимизации, изучения свойств оптимальных систем появляются возможности сближения методов оптимального и реального проектирования [1]. Здесь уместно привести слова академика АН СССР М.А. Лаврентьева «*Всегда вслед за познанием сил природы идет овладение ими».* Есть достаточно оснований полагать, что по мере своего совершенствования методы оптимизации в ближайшее время будут играть более существенную роль в реальном проектировании.

Оптимальный проект, полученный даже без формализованного учета в процессе оптимизации некоторых ограничений, может оказаться полезным и при реальном проектировании. Определенный интерес представляют две функции оптимального проекта.

Во-первых, оптимальный проект может рассматриваться как идеализированный объект в смысле предельного. Эта функция оптимального проекта позволяет оценивать реальное конструкторское решение по критерию его близости к предельному (например, по материалоемкости, несущей способности, динамическим характеристикам и так далее).

Во-вторых, оптимальный проект может использоваться как некий ориентир при реальном проектировании. При таком подходе последнее может рассматриваться как поэтапный процесс отхода от идеального объекта с целью выполнения требований, не учтенных в оптимальном проекте или как движение от начального варианта в направлении идеального объекта. Следует отметить, что при этом на каждом этапе реального проектирования появляется возможность оценки изменения показателя оптимальности объекта по сравнению, как с начальным, так и с идеализированным решением [5-7,17].

Как известно, наряду с большим числом работам по оптимизации сооружений, в которых задачи формулируются и решаются на основе аппарата математического программирования [1], начиная с работ Ж.-Л. Лагранжа [18], Т. Клаузена [17], Е.Л. Николаи [8], появляются исследования, в которых выявляются особые свойства оптимальных систем и формулируются критерии, позволяющие оценивать близость полученных решений к минимально материалоемкому. В частности, это работы Н.Г. Ченцова [13], А.Ф. Смирнова [12], А.И. Виноградова [2], Я.Л. Нудельмана [9], Н. Ольхоффа [10] и других авторов.

Так в [5] был сформулирован критерий минимальной материалоемкости для стержней с прямоугольным поперечным сечением (рис. 1) при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний. Стержень несет распределенную массу и загружен продольной силой. Величины массы и продольной силы могут изменяться по длине стержня (рис. 2). Граничные условия в главных плоскостях могут отличаться от показанных на рис. 2.

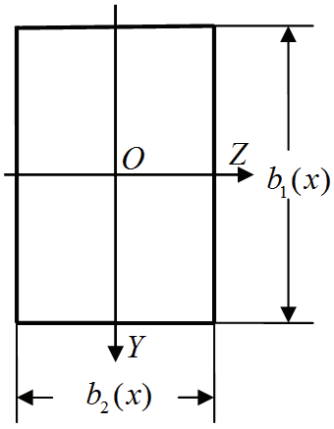

Рисунок 1. Поперечное сечение стержня.

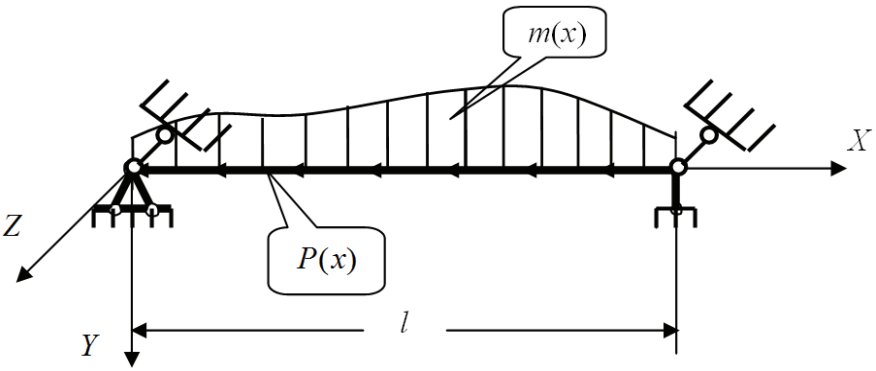

Рисунок 2. Схема рассматриваемого стержня.

Варьируемые параметры – размеры сечений стержня $b_1(x)$ и $b_2(x)$, а функционал цели – объем материала стержня

$$V_0 = \int_0^l b_1(x) b_2(x) dx, \qquad (1)$$

где l – длина стержня; V_0 – объем материала стержня.

Ограничения на величину низшей частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции могут быть записаны в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega \le \omega_{1,1}; \qquad (2)$$

$$\omega_0 k_\omega \le \omega_{2,1}, \qquad (3)$$

где ω_0 – заданная частота; k_ω – установленный коэффициент запаса; $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$ – соответственно низшие частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции.

Если ограничения (2) и (3) будут выполняться в виде равенств, то они, очевидно, переписываются в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1}. \qquad (4)$$

Соответственно в оптимизационной задаче требуется отыскать функции $b_1(x)$, $b_2(x)$, которые придадут функционалу (1) минимальное значение при условиях, что будут выполнены ограничения (4).

При разных граничных условиях в главных плоскостях инерции критерий имеет вид

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4} E\rho(\omega_0 k_\omega)^2 (v_\omega^2 + \frac{\sigma_{1\omega}^2}{\sigma_{2\omega}^2} w_\omega^2)} = const; \qquad (5)$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4} E\rho(\omega_0 k_\omega)^2 (\frac{\sigma_{2\omega}^2}{\sigma_{1\omega}^2} v_\omega^2 + w_\omega^2)} = const, \qquad (6)$$

где $\sigma_{1\omega}(x), \sigma_{2\omega}(x)$ – нормальные напряжения в крайних волокнах стержня, возникающие от изгибающих моментов, появляющихся при колебаниях по первой собственной форме в соответствующих главных плоскостях инерции; E – модуль упругости материала стержня; ρ – плотность материала стержня; $\bar{\sigma}_{1\omega}(x), \bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ – соответствующие приведенные напряжения; v_ω и w_ω – ординаты первых форм собственных колебаний в соответствующих главных плоскостях инерции.

При одинаковых граничных условиях в главных плоскостях инерции имеем

$$\sigma_{1\omega}(x) = \sigma_{2\omega}(x), \quad v_\omega = w_\omega \tag{7}$$

и критерий (5)-(6) переходит в

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2 - 1.5 \cdot (\omega_0 k_\omega)^2 E\rho v_\omega^2} = const; \tag{8}$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega} - 1.5 \cdot (\omega_0 k_\omega)^2 E\rho w_\omega^2} = const. \tag{9}$$

Если ограничения на низшую частоту собственных колебаний вводятся только в одной главной плоскости инерции, то критерии для соответствующих плоскостей инерции представляются в виде

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E\rho v_\omega^2} = const; \tag{10}$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega}(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E\rho w_\omega^2} = const. \tag{11}$$

Критерии (5)-(6) и (8)-(9) утверждают, *что стержень минимальной материалоемкости при прямоугольных поперечных сечениях и ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции, является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям* $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ *и* $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$*, возникающим при собственных колебаниях.*

Соотношение критерия (10) соответствует случаю, когда ограничивается величина первой частоты собственных колебаний только в главной плоскости инерции $X-O-Y$, варьируется функция $b_1(x)$, а $b_2(x)$ задается. В этом случае *стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям* $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$*, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции* $X-O-Y$.

Соотношение критерия (11) соответствует случаю, когда ограничивается только величина первой частоты собственных колебаний в главной плоскости инерции $X-O-Z$, варьируется функция $b_2(x)$, а $b_1(x)$ задается. В этом случае *стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям* $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$*, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции* $X-O-Z$.

Критерии (5)-(6), (8)-(9) и (10)-(11) могут использоваться и в случаях, когда необходимо учитывать влияние продольной силы на частоту собственных колебаний. В случаях, когда вводятся только лишь ограничения по устойчивости, критерии переходят в известную форму (например [5,8]).

Для наглядности приведенные напряжения целесообразно нормировать таким образом, чтобы наибольшее значение каждого из $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ по длине стержня было бы равно единице. Тогда близость полученного решения к минимально материалоемкому будет оцениваться соответственно близостью значений $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ по всей длине стержня к единице.

При выводе критерия (5)-(6), приведенном в [5], использовалось правило поиска условного экстремума. Учитывая, что при выполнении ограничений (4) энергетические функционалы принимают нулевые значения, был сформирован функционал $V_{0\omega}$, экстремум которого при варьировании $b_1(x)$ и $b_2(x)$ должен обеспечить как минимум функционала цели (1), так и нулевые значения энергетических функционалов.

$$Э_{\omega 1} = \frac{1}{2}\int_0^l \{EJ_1(x)(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - \\ -(\omega_0 k_\omega)^2[m(x) + \rho F(x) v_\omega^2]\}dx = 0; \tag{12}$$

$$Э_{\omega 2} = \frac{1}{2}\int_0^l \{EJ_2(x)(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - \\ -(\omega_0 k_\omega)^2[m(x) + \rho F(x) w_\omega^2]\}dx = 0, \tag{13}$$

где

$$F(x) = b_1(x) b_2(x) \tag{14}$$

$$v'_\omega = dv_\omega / dx; \quad v''_\omega = d^2 v_\omega / dx^2; \tag{15}$$

$$w'_\omega = dw_\omega / dx; \quad w''_\omega = d^2 w_\omega / dx^2; \tag{16}$$

– площадь поперечного сечения; $m(x)$ и $P(x)$ показаны на рис. 2; $Э_{\omega 1}, Э_{\omega 2}$ – энергетические функционалы собственных колебаний в главных плоскостях инерции; $J_1(x), J_2(x)$ – соответствующие моменты инерции сечения.

Имеем:

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = \int_0^l \{ & b_1(x) * b_2(x) - \\ & - \lambda_{\omega 1}[E\frac{b_1^3(x)b_2(x)}{12}(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - \\ & - (\omega_0 k_\omega)^2 (m(x) + \rho b_1(x) b_2(x)) v_\omega^2] - \\ & - \lambda_{\omega 2}[E\frac{b_1(x)b_2^3(x)}{12}(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - \\ & - (\omega_0 k_\omega)^2 (m(x) + \rho b_1(x) b_2(x)) w_\omega^2]\} dx, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ – неопределенные множители.

С учетом соотношений (12) и (13) рассматриваемая задача является изопериметрической [4], а $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ постоянными величинами. Экстремум функционала (17) определялся решением уравнений [3]

$$(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)} = 0; \quad (\delta V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0, \quad (18)$$

где $(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)}$ и $(\delta V_{0\omega})_{b_2(x)}$ – соответственно вариации функционала $V_{0\omega}$ по $b_1(x)$ и $b_2(x)$.

В результате решения уравнений (18) был сформулирован критерий (5)-(6). Кроме того, при решении уравнений (18) было установлено соотношение

$$\lambda_{\omega 1}\sigma_{1\omega}^2(x) = \lambda_{\omega 2}\sigma_{2\omega}^2(x). \quad (19)$$

Учитывая, что $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ постоянные величины, непосредственно из (19) следует, что

$$\frac{\sigma_{1\omega}^2(x)}{\sigma_{2\omega}^2(x)} = \frac{\lambda_{\omega 2}}{\lambda_{\omega 1}} = const, \quad (20)$$

т.е.

$$\frac{\sigma_{1\omega}(x)}{\sigma_{2\omega}(x)} = const. \quad (21)$$

Соотношения (20)-(21) не были отмечены в [5], а они определяют в дополнение к критерию (5)-(6) еще одно особое свойство минимально материалоемкого стержня прямоугольного поперечного сечения при ограничении величины первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции при разных граничных условиях. Это свойство (21) показывает, что и *при разных граничных условиях в главных плоскостях инерции в стержне минимальной материалоемкости с прямоугольным поперечным сечением при ограничении величины первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции отношение нормальных напряжений, возникающих в крайних волокнах стержня во всех сечениях одинаково*, при этом

$$\frac{\sigma_{1\omega}(x)}{\sigma_{2\omega}(x)} \neq 1. \quad (22)$$

Иллюстрацию этого свойства проведем на примере.

<u>Пример 1.</u> Рассматривается стержень прямоугольного сечения, несущий равномерно распределенную массу $m = 300\,кг/м$. Граничные условия в главной плоскости инерции $X-O-Y$ показаны на рис. 3а, а в плоскости $X-O-Z$ – на рис. 3б. При переходе к дискретной модели из 30 участков (далее i – номер участка) узловая масса составит 60 кг. Удельная масса $\rho = 2400\,кг/м^3$. Заданная величина первой круговой собственной частоты с учетом необходимого запаса принята

$$\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1} = 30\,сек^{-1}.$$

Модуль упругости материала стержня $E = 24000\,МПа$. Оптимизация выполнялась методом случайного поиска. В решении использовалось ограничение малости размеров $b_1[i] \geq 0.0001$ и $b_2[i] \geq 0.0001$, где $b_1[i]$ и $b_2[i]$ – соответствующие размеры сечения стержня на i-м участке (сечении).

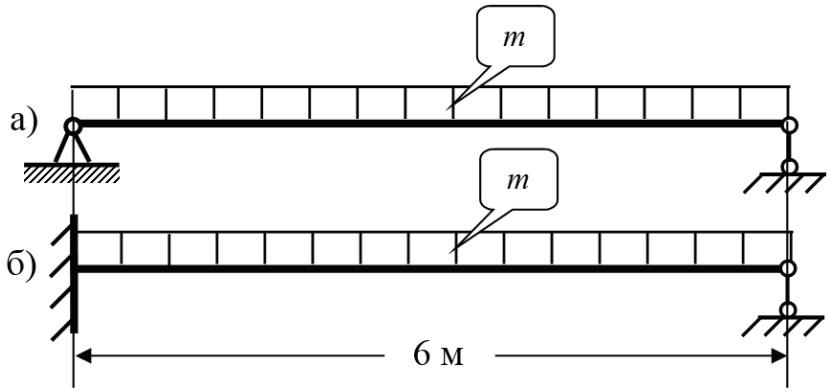

Рисунок 3. Рассматриваемый стержень прямоугольного сечения (пример 1).

Таблица 1. Результаты оптимизации (пример 1).

i	$b_1[i]$	$b_2[i]$	$\sigma_{1\omega}[i]$	$\sigma_{2\omega}[i]$	$\sigma_{1\omega}[i]/\sigma_{2\omega}[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$\bar{\sigma}_{2\omega}[i]$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0330	0.5949	0.6311	0.9096	0.6938	0.9990	1.0000
2	0.0711	0.3813	0.6323	0.9113	0.6938	0.9984	0.9992
3	0.1036	0.2944	0.6351	0.9144	0.6945	0.9991	0.9990
4	0.1350	0.2377	0.6376	0.9175	0.6950	0.9990	0.9982
5	0.1676	0.1937	0.6404	0.9224	0.6942	0.9990	0.9994
6	0.2034	0.1563	0.6427	0.9266	0.6936	0.9984	0.9996
7	0.2460	0.1223	0.6458	0.9306	0.6939	0.9989	0.9996
8	0.3042	0.0891	0.6486	0.9347	0.6939	0.9988	0.9995
9	0.4084	0.0538	0.6521	0.9392	0.6943	0.9989	0.9990
10	8.7805	0.0001	1.0000	0.0018	541.24	0.0144	0.0422
11	0.4495	0.0499	0.6646	0.9573	0.6942	0.9990	0.9993
12	0.3708	0.0760	0.6722	0.9674	0.6949	0.9995	0.9989
13	0.3351	0.0956	0.6787	0.9771	0.6946	0.9992	0.9989
14	0.3137	0.1109	0.6837	0.9856	0.6936	0.9981	0.9993
15	0.2985	0.1234	0.6884	0.9920	0.6940	0.9985	0.9992
16	0.2869	0.1333	0.6916	0.9968	0.6938	0.9986	0.9995
17	0.2771	0.1413	0.6935	0.9989	0.6942	0.9987	0.9991
18	0.2686	0.1475	0.6940	1.0000	0.6940	0.9992	0.9998
19	0.2607	0.1521	0.6927	0.9981	0.6940	0.9988	0.9994
20	0.2530	0.1552	0.6904	0.9945	0.6942	0.9990	0.9994
21	0.2453	0.1568	0.6865	0.9893	0.6939	0.9988	0.9996
22	0.2371	0.1570	0.6817	0.9815	0.6946	0.9991	0.9989
23	0.2285	0.1557	0.6756	0.9731	0.6943	0.9988	0.9991
24	0.2191	0.1528	0.6684	0.9639	0.6935	0.9983	0.9997
25	0.2082	0.1483	0.6616	0.9527	0.6944	0.9991	0.9991
26	0.1959	0.1416	0.6538	0.9423	0.6939	0.9988	0.9996
27	0.1811	0.1326	0.6465	0.9317	0.6940	0.9989	0.9996
28	0.1626	0.1202	0.6398	0.9217	0.6942	0.9989	0.9992
29	0.1377	0.1024	0.6342	0.9138	0.6940	0.9985	0.9992
30	0.0956	0.0714	0.6318	0.9096	0.6946	1.0000	0.9998

За начальное приближение было принято квадратное сечение, размеры которого при первом выходе на границу области допустимых решений составили 0.2241 м. Значение функции цели при этом $V_0 = 0.30134161\text{м}^3$. В конце процесса оптимизации функция цели $V_0 = 0.17430151\text{м}^3$, что на 72.89% меньше начальной величины. Результаты оптимизации представлены в таблице 1.

Во втором и третьем столбцах приведены размеры варьируемых величин $b_1[i]$ и $b_2[i]$. В седьмом и восьмом столбцах показаны соответствующие приведенные напряжения $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}[i]$ на i-м участке, близость которых к единице по всей длине стержня кроме десятого сечения подтверждает оптимальность полученного решения. Размер $b_2[10] = 0.0001м$ конструктивно ограничен. В сечениях, где конструктивные ограничения выполняются в виде равенства приведенные выше критерии не соблюдаются. В четвертом и пятом столбцах показаны соответствующие нормальные напряжения в крайних волокнах в обеих главных плоскостях инерции $\sigma_{1\omega}[i]$ и $\sigma_{2\omega}[i]$ на i-м участке. Напряжения нормированы таким образом, чтобы наибольшее значение по длине стержня каждого из $\sigma_{1\omega}[i]$, $\sigma_{2\omega}[i]$ было бы равно единице. Как видно из таблицы 1, напряжения $\sigma_{1\omega}[i]$ и $\sigma_{2\omega}[i]$ изменяются по длине стержня, а отношения между ними $\sigma_{1\omega}[i]/\sigma_{2\omega}[i]$ (шестой столбец), с точностью до долей процента остаются постоянными по всей длине стержня кроме десятого сечения. Полученный результат иллюстрирует свойство (21) и дополняет критерий (5)-(6).

Таким образом, близость полученных решений к минимально материалоемкому для стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничении величины первой частоты собственных колебаний и при разных граничных условиях в главных плоскостях инерции может оцениваться как по критерию (5)-(6), так и по свойству (21).

В [5] также сформулирован критерий оценивающий близость полученных решений к минимально материалоемкому при ограничении величины первой частоты собственных колебаний для стержней с таким типом поперечного сечения, для которого радиус инерции при оптимизации не зависит от x. К такого рода сечениям относится и прямоугольное. Соответствующие критерии сформулированы в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{1\omega r}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega r}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E\rho v_\omega^2} = const; \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega r}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega r}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E\rho w_\omega^2} = const, \quad (24)$$

где $\sigma_{1\omega r}(x), \sigma_{2\omega r}(x)$ нормальные напряжения, возникающие от изгибающих моментов, появляющихся при собственных колебаниях в соответствующей главной плоскости инерции в волокнах, отстоящих от нейтрального слоя на расстоянии радиусов инерции ($r_{i1}(x), r_{i2}(x)$); $\bar{\sigma}_{1\omega r}(x), \bar{\sigma}_{2\omega r}(x)$ – соответствующие приведенные напряжения.

Приведем отличия в постановке задач оптимизации для стержней с прямоугольным сечением при использовании критерия (23)-(24) от случаев, относящихся к критерию (10)-(11).

В отличии от критерия (10)-(11) соотношение критерия (23) соответствует случаю, когда ограничивается величина первой частоты собственных колебаний в главной плоскости инерции $X-O-Y$, но варьируется функция $b_2(x)$, а $b_1(x)$ задается. В этом случае *стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям* $\bar{\sigma}_{1\omega r}(x)$, *возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции* $X-O-Y$.

Соотношение критерия (24) в отличии от критерия (10)-(11) соответствует случаю, когда ограничивается величина первой частоты собственных колебаний в главной плоскости инерции $X-O-Z$, варьируется функция $b_1(x)$, а $b_2(x)$ задается. В этом случае *стер-*

жень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{2\omega r}(x)$*, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции* $X-O-Z$.

Для стержней с прямоугольными поперечными сечениями для единообразия с критериями (5)-(6), (8)-(9), (10)-(11) критерий (23)-(24) целесообразно модифицировать. Как известно, нормальное напряжение при изгибе в волокне, отстоящем от нейтрального слоя на расстоянии радиуса инерции сечения, равно

$$\sigma_{1\omega r}(x)=[M_1(x)\,r_{i,1}(x)]/J(x), \qquad (25)$$

где $r_{i,1}(x)$ – радиус инерции сечения.

Для прямоугольного сечения имеем:

$$r_{i,1}^2(x)=J(x)/[b_1(x)b_2(x)]=b_1^2(x)/12,$$

откуда

$$r_{i1}(x)=b_1(x)/(2\sqrt{3}). \qquad (26)$$

Следовательно,

$$\sigma_{1\omega r}(x)=[M_1(x)b_1(x)]/[J(x)2\sqrt{3}]. \qquad (27)$$

Вместе с тем,

$$[M_1(x)b_1(x)]/[2J(x)]=\sigma_{1\omega}(x), \qquad (28)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$ – нормальное напряжение в крайнем волокне.

Рассмотрев совместно (27) и (28), можем заключить, что

$$\sigma_{1\omega r}=\sigma_{1\omega}(x)/\sqrt{3}. \qquad (29)$$

Теперь соотношения (23)-(24) для стержней с прямоугольным поперечным сечением могут быть представлены в виде

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x)=\sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x)/3-(\omega_0 k_\omega)^2 E\rho v_\omega^2}=const; \qquad (30)$$

$$\sigma_{2\omega}(x)=\sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x)/3-(\omega_0 k_\omega)^2 E\rho w_\omega^2}=const. \qquad (31)$$

Рассмотрим постановку задачи оптимизации стержня с прямоугольным поперечным сечением и ограничением в обеих главных плоскостях инерции по устойчивости или величине первой частоты собственных колебаний в случае, когда варьируются оба размера сечения, но один из них не зависит от x. В начале сформулируем критерий близости решения задачи оптимизации к минимально материалоемкому при ограничении величины первой частоты собственных колебаний для случая, когда варьируется размер сечения b_1, но он не меняется по длине стержня, а второй варьируемый размер $b_2(x)$ определяется в виде функции от x. Функция цели в этом случае принимает форму

$$V_0=b_1\int_0^l b_2(x)dx. \qquad (32)$$

Итак, оптимизационная задача формулируется следующим образом: *требуется отыскать величину* b_1 *и функцию* $b_2(x)$*, которые придадут функции цели (30) минимальное значение при условии выполнения ограничений на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции (4).*

Ограничения в форме (4) требуют выполнения зависимостей (12)-(13). Используем для решения задачи метод поиска условного экстремума.

Сформируем интеграл, условия экстремума которого должны обеспечить как минимум функции цели (32), так и условие, что заданная частота ω_0 будет низшей собственной в обеих главных плоскостях инерции (т.е. условие (4)):

$$V_{0\omega} = b_1 \int_0^l b_2(x)dx - \\ - \lambda_{\omega 1} \int_0^l [E \frac{b_1^3 b_2(x)}{12} (v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - \\ - (\omega_0 k_\omega)^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) v_\omega^2] dx - \\ - \lambda_{\omega 2} \int_0^l [E \frac{b_1 b_2^3(x)}{12} (w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - \\ - (\omega_0 k_\omega)^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) w_\omega^2] dx. \quad (33)$$

Так как одна из двух варьируемых величин b_1 не является функцией, зависящей от x, а другая $b_2(x)$, напротив, является, интеграл (33) относительно b_1 должен рассматриваться как функция, а относительно $b_2(x)$ как функционал.

С учетом (12)-(13) приходим к изопериметрической задаче.

Очевидно, что вариации функционала $V_{0\omega}$ по v и w приведут к уравнениям собственных колебаний в главных плоскостях инерции, а вариации функционала $V_{0\omega}$ по $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ – к выполнению условий (12)-(13).

С учетом вышеизложенного для отыскания минимума функционала (33) требуется выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial V_{O\omega}}{\partial b_1} = 0; \quad (\delta V_{O\omega})_{b_2(x)} = 0. \quad (34)$$

Соответственно имеем (воспользуемся ниже уравнением Эйлера, соответствующим второму условию (34) [14,15]):

$$\frac{\partial V_{O\omega}}{\partial b_1} = \int_0^l \{b_2(x) - \\ - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^2 b_2(x)}{4} (v''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho b_2(x) v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_2^3(x)}{12} (w''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho b_2(x) w_\omega^2]\} dx = 0; \quad (35)$$

$$\delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = b_1 - \\ - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^3}{12} (v''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho b_1 v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_1 b_2^2(x)}{4} (w''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho b_1 w_\omega^2] = 0. \quad (36)$$

Умножив все члены первого уравнения на b_1, а второго на $b_2(x)$, и, воспользовавшись (14) будем иметь:

$$\int_0^l \{1 - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^2}{4} (v''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_2^2(x)}{12} (w''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho w_\omega^2]\} F(x) dx = 0; \quad (37)$$

$$\{1 - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^2}{12} (v''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_2^2(x)}{4} (w''_\omega)^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho w_\omega^2\} F(x) = 0. \quad (38)$$

Как известно нормальное напряжение при изгибе в крайнем волокне стержня определяется по формулам:

$$\sigma_1(x) = \frac{EJ(x) b_1 v''_\omega}{2J(x)} = \frac{E b_1}{2} v''_\omega; \quad (39)$$

$$\sigma_2(x) = \frac{E b_2(x)}{2} w''_\omega. \quad (40)$$

Умножив все члены полученных уравнений на E и проинтегрировав второе уравнение, можем с учетом (39)-(40) переписать их в следующем виде:

$$\int_0^l \{E - \lambda_{\omega 1} [\sigma_1^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 2} [\frac{1}{3} \sigma_2^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2]\} F(x) dx = 0. \quad (41)$$

$$\int_0^l \{E - \lambda_{\omega 1} [\frac{1}{3} \sigma_1^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 2} [\sigma_2^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2\} F(x) dx = 0. \quad (42)$$

Взяв разность уравнений (41) и (42), очевидно, будем иметь:

$$\frac{2}{3}\left[\lambda_{\omega 1}\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x)F(x)dx - \lambda_{\omega 2}\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x)F(x)dx\right] = 0,$$

т.е.

$$\lambda_{\omega 1}\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x)F(x)dx = \lambda_{\omega 2}\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x)F(x)dx, \tag{43}$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\omega 2} = \lambda_{\omega 1}\frac{\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x)F(x)dx}{\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x)F(x)dx} = \lambda_{\omega 1}\mu_{\omega 1}, \tag{44}$$

где
$$\mu_{\omega 1} = \frac{\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x)F(x)dx}{\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x)F(x)dx}. \tag{45}$$

Разделив все члены уравнения (38) на $F(x)$, и умножив их на E, с учетом (39)-(40) и (45) получим:

$$\{E - \lambda_{\omega 1}[\frac{1}{3}\sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2] - \\ - \lambda_{\omega 1}\mu_{\omega 1}[\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2\} = 0 \tag{46}$$

или, что эквивалентно,

$$\lambda_{\omega 1}[\frac{1}{3}\sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2] + \\ + \lambda_{\omega 1}\mu_{\omega 1}[\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2\} = E \tag{47}$$

С учетом постоянности величин $\lambda_{\omega 1}$ и E можем переписать (46) в виде

$$\frac{1}{3}\sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2 + \\ + \mu_{\omega 1}[\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2\} = const. \tag{48}$$

Итак, показано, что стержень минимальной материалоемкости прямоугольного поперечного сечения при ограничении по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний для случая, когда параметр сечения b_1 варьируется, но не зависит от x, а параметр $b_2(x)$ варьируется по всей длине стержня. является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях или при потере устойчивости. Здесь

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2 + \mu_{\omega 1}[\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2]} = const; \tag{49}$$

Аналогично формулируется критерий для случая, когда варьируется функция $b_1(x)$, а b_2 варьируется, но не зависит от $\mathbf{x}$. Критерий имеет вид

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2 + \mu_{\omega 2}[\sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2]} = const, \tag{50}$$

где
$$\mu_{\omega 2} = \frac{\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x)F(x)dx}{\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x)F(x)dx} \tag{51}$$

Критерий (50) утверждает, что *стержень минимальной материалоемкости прямоугольного поперечного сечения при ограничении по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний для случая, когда параметр сечения* $b_1(x)$ *варьируется по всей длине стержня, а параметр* b_2 *варьируется, но не зависит от* x*, является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям* $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$*, возникающим при собственных колебаниях или при потере устойчивости.*

Критерии (23)-(24), (30)-(31), (49), (50) могут использоваться и при необходимости учитывать влияние продольной силы на величину частоты собственных колебаний. Эти критерии также могут применяться и для случаев, когда вводятся ограничения на величину первой критической силы.

Проведем на примерах иллюстрацию различия постановок оптимизационных задач при использовании критериев (5)-(6), (10)-(11), (30)-(31), (49).

Постановка задачи при использовании критерия (5)-(6) и свойства (20)-(21) приведена в примере 1: *При ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции (4) требовалось отыскать* ***функции*** $b_1(x)$ и $b_2(x)$, *придающие функционалу цели (1) минимальное значение.*

Иллюстрацию постановок задач при использовании критериев (10)-(11), (30)-(31), (49) проведем в примере 2.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим стержень, схема которого в главных плоскостях инерции одинакова и приведена на рис. 3а. Стержень несет равномерно распределенную массу. При переходе к дискретной модели из 30 участков узловая масса составит 60 кг. Удельная масса $\rho = 2400 кг/м^3$. Модуль упругости материала стержня $E = 24000\ МПа$. Оптимизация выполнялась методом случайного поиска. За начальное приближение было принято квадратное сечение, размеры которого при первом выходе на границу области допустимых решений составили 0.2241 м. Значение функции цели при этом $V_0 = 0.30134161 м^3$.

При использовании критерия (49) *ограничение на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции с учетом необходимого запаса принималась в виде* $\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1} = 30\ сек^{-1}$. *Требовалось отыскать* ***величину*** *высоты сечения* b_1 *и* ***функцию****, изменения ширины сечения* $b_2[i]$*, которые бы придавали функции цели*

$$V_0 = b_1 \sum_{i=1}^{30} b_2[i]$$

минимальное значение. Результаты приведены в таблице 2. Над столбцами 2 и 3 показано оптимальное значение высоты сечения $b_1 = 0.2219\ м$. В столбце 2 оптимальные значения функции $b_2[i]$, а в столбце 3 значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$. Близость значений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ к единице свидетельствует об оптимальности решения. Под столбцами 2 и 3 приведена функция цели и процент ее отличия от первоначального значения при выходе на границу допустимой области. Постановка задачи при использовании критерия (50) аналогична.

При использовании первого соотношения критерия (30)-(31) *ограничивается величина первой частоты собственных колебаний только в главной плоскости инерции* $X - O - Y$ *(*$\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = 30\ сек^{-1}$*), варьируется функция изменения ширины сечения* $b_2[i]$*, а высота сечения* $b_1[i]$ *задается.*

В этом примере принята постоянная высота сечения $b_1[i] = b_1 = 0.2241\ м$. Результаты приведены в таблице 2. Над столбцами 4 и 5 показано принятое значение высоты сечения $b_1 = 0.2241\ м$. В столбце 4 оптимальные значения функции $b_2[i]$, а в столбце 5 значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$.

Таблица 2. Результаты оптимизации (пример 2).

i	Варианты					
	$b_1 = 0.2219$ *м*		$b_1 = 0.2241$ *м*		$b_2 = 0.2241$ *м*	
	$b_2[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$b_2[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$b_1[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$
1	2	3	4	5	6	7
1	0.0583	0.9998	0.0181	0.9966	0.0612	0.9998
2	0.1016	1.0000	0.0535	0.9993	0.1055	1.0000
3	0.1314	0.9996	0.0871	0.9994	0.1353	0.9998
4	0.1553	0.9994	0.1181	0.9997	0.1586	1.0000
5	0.1753	0.9995	0.1462	0.9995	0.1776	0.9998
6	0.1924	0.9993	0.1711	0.9997	0.1937	1.0000
7	0.2070	0.9995	0.1930	0.9996	0.2072	0.9996
8	0.2195	0.9992	0.2118	0.9994	0.2187	0.9997
9	0.2301	0.9997	0.2278	0.9997	0.2283	0.9999
10	0.2390	0.9995	0.2410	0.9998	0.2363	1.0000
11	0.2462	0.9998	0.2519	1.0000	0.2428	0.9996
12	0.2519	0.9997	0.2604	0.9997	0.2479	0.9998
13	0.2561	0.9997	0.2667	0.9993	0.2516	0.9999
14	0.2590	0.9992	0.2708	0.9993	0.2541	0.9999
15	0.2603	0.9995	0.2728	0.9997	0.2553	0.9999
16	0.2603	0.9995	0.2728	0.9997	0.2553	0.9999
17	0.2590	0.69992	0.2708	0.9993	0.2541	0.9999
18	0.2561	0.9997	0.2667	0.9993	0.2516	0.9999
19	0.2519	0.9997	0.2604	0.9997	0.2479	0.9998
20	0.2462	0.9998	0.2519	1.0000	0.2428	0.9996
21	0.2390	0.9995	0.2411	0.9998	0.2363	1.0000
22	0.2301	0.9997	0.2278	0.9997	0.2283	0.9999
23	0.2195	0.9992	0.2118	0.9994	0.2187	0.9997
24	0.2070	0.9995	0.1930	0.9996	0.2072	0.9996
25	0.1924	0.9993	0.1711	0.9997	0.1937	1.0000
26	0.1753	0.9995	0.1462	0.9995	0.1776	0.9998
27	0.1553	0.9994	0.1181	0.9997	0.1586	1.0000
28	0.1314	0.9996	0.0871	0.9994	0.1353	0.9998
29	0.1016	1.0000	0.0535	0.9993	0.1055	1.0000
30	0.0583	0.9998	0.0181	0.9966	0.0612	0.9998
V_0 $м^3$, %	0.2648 $м^3$ 12.11%		0.2501 $м^3$ 17.00%		0.2666 $м^3$ 11.53%	

Близость значений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ к единице свидетельствует об оптимальности решения. Под столбцами 4 и 5 приведена функция цели и процент ее отличия от первоначального значения при выходе на границу допустимой области. Постановка задачи при использовании второго соотношения критерия (30)-(31) аналогична.

При использовании критериального соотношения критерия (10) *ограничивается величина первой частоты собственных колебаний только в главной плоскости инерции*

$X-O-Y$ *($\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = 30\,сек^{-1}$), варьируются величины* $b_1[i]$*, а* $b_2[i]$ *задаются.* В этом примере принята постоянная ширина сечения $b_2[i] = b_2 = 0.2241\,м$. Результаты приведены в таблице 2. Над столбцами 6 и 7 показано принятое значение ширины сечения $b_2 = 0.2241\,м$. В столбце 6 оптимальные значения функции $b_1[i]$, а в столбце 7 значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$. Близость значений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ к единице свидетельствует об оптимальности решения. Под столбцами 6 и 7 приведена функция цели и процент ее отличия от первоначального значения при выходе на границу допустимой области. Постановка задачи при использовании критериального соотношения (12) аналогична.

Итак, в данной статье отмечается еще одно дополнительное свойство ранее сформулированного [5] критерия близости оптимального решения к минимально материалоемкому для стержней с прямоугольным поперечным сечением при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний. Для стержней прямоугольного поперечного сечения проведена модификация критерия (21)-(22), предложенного в [5]. Сформулирован новый критерий для стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или величины первой частоты собственных колебаний для случая, когда один из варьируемых параметров прямоугольного сечения не изменяется по длине стержня. На примерах приведена иллюстрация различий в постановках оптимизационных задач при использовании рассмотренных критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баничук Н.В.** Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
2. **Виноградов А.И.** Проблема оптимального проектирования в строительной механике. Цикл лекций. – Харьков: Вища школа, Издательство при Харьковском университете, 1973. – 167 с.
3. **Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
4. **Гельфонд И.М., Фомин С.В.** Вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 1961. – 228 с.
5. **Ляхович Л.С.** Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009.–372с.
6. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П., Тухфатуллин Б.А.** Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 12, Issue 2, 2016, pp. 118-125.
7. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 14-23.
8. **Николаи Е.Л.** Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны. // Известия Петербургского политехнического института, Том 8, Вып. 1, 1907, с. 255-288.
9. **Нудельман Я.Л.** Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. – М.: Гостехиздат, 1949. – 175 с.
10. **Ольхофф Н., Расмуссен С.Х.** О простых и двухкратных оптимальных критических нагрузках потери устойчивости для защемленных стержней. // Механика. Новое в зарубежной науке. Оптимальное проектирование конструкций, №27. – М.: Мир, 1981, с. 139-154.
11. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005.

– 736 с.
12. **Смирнов А.Ф.** Устойчивость и колебания сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1958. – 571 с.
13. **Ченцов Н.Г.** Стойки наименьшего веса. // Труды ЦАГИ, Вып. 265, 1936. – 48 с.
14. **Эльсгольц Л.Э.** Вариационное исчисление. – М.: ЛКИ, 2014. – 208 с.
15. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
16. **Clausen T.** Uber die form architektonischer Säulen // Bull. cl. physico-raath. Acad. St.-Petersbourg, Vol. 9, 1851, pp. 371-380 (in Russian).
17. **Lyakhovich L.S.** Dual approach to solving the problems of structural optimization. // Procedia Engineering, Volume 111, 2015, pp. 510-515.
18. **Lagrange J.-L.** Sur la figure des collonnes // Mescellanea Taurinensia, Vol. 5, 1770-1773, pp. 123.

Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2;
e-mail: lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: prtsuab@mail.ru

Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Head of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2;
e-mail: lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Boris A. Tukhfatullin, Associate Professor, Ph.D, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: prtsuab@mail.ru