

MATHEMATICAL MODELING OF NON-STATIONARY ELASTIC WAVES STRESSES UNDER A CONCENTRATED VERTICAL EXPOSURE IN THE FORM OF DELTA FUNCTIONS ON THE SURFACE OF THE HALF-PLANE (LAMB PROBLEM)

Vyacheslav K. Musayev

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA
Moscow Polytechnic University, Moscow, RUSSIA
Mingachevir state University, Mingachevir, AZERBAIJAN

Abstract: The problem of numerical simulation of longitudinal, transverse and surface waves on the free surface of an elastic half-plane is considered. The change of the elastic contour stress on the free surface of the half-plane is given. To solve the two-dimensional unsteady dynamic problem of the mathematical theory of elasticity with initial and boundary conditions, we use the finite element method in displacements. Using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions resulted in a linear Cauchy problem. Some information on the numerical simulation of elastic stress waves in an elastic half-plane under concentrated wave action in the form of a Delta function is given. The amplitude of the surface Rayleigh waves is significantly greater than the amplitudes of longitudinal, transverse and other waves with concentrated vertical action in the form of a triangular pulse on the surface of the elastic half-plane. After the surface Rayleigh waves there is a dynamic process in the form of standing waves.

Keywords: waves of stress, non-stationary process, computational mechanics, focused effects, a Delta function, leading edge of a disturbance, the falling edge of the perturbation, the direction of wave action, longitudinal wave, transverse wave, free surface, Rayleigh wave, surface wave, lamb problem, elastic half-plane, stress on the free surface

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ В ВИДЕ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПЛОСКОСТИ (ЗАДАЧА ЛЭМБА)

B.K. Musayev

Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, РОССИЯ
Московский политехнический университет, Москва, РОССИЯ
Мингячевирский государственный университет, Мингячевир, АЗЕРБАЙДЖАН

Аннотация: Рассматривается задача о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости. Приводится изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Приводится некоторая информация о численном моделировании упругих волн напряжений в упругой полуплоскости при сосредоточенном волновом воздействии в виде дельта функции. Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса на поверхности упругой полуплоскости. После поверхностных волн Релея наблюдается динамический процесс в виде стоячих волн.

Ключевые слова: волны напряжений, нестационарный процесс, вычислительная механика, сосредоточенное воздействие, дельта функция, передний фронт возмущения, задний фронт возмущения, направление волнового воздействия, продольная волна, поперечная волна, свободная поверхность, волна Релея, поверхностная волна, задача Лэмба, упругая полуплоскость, напряжения на свободной поверхности

1. STATEMENT OF THE PROBLEM ABOUT NON-STATIONARY WAVE INFLUENCES

Waves of stresses of different nature, spreading, in the deformable body interact with each other, this leads to the formation of new perturbation regions, redistribution of stresses and strains.

After three or four times the passage and reflection of stress waves in the body the process of propagation of disturbances becomes established, stresses and strains are averaged, the body is in oscillatory motion.

The formulation of dynamic problems of solid mechanics is given in the following works [1-5]. Application of the considered numerical method, algorithm and complex of programs in extreme problems of mechanics of deformable bodies is given in the works [6-30].

The estimation of reliability and accuracy of the considered numerical method, algorithm and complex of programs is given in the following works [6-12, 16-29].

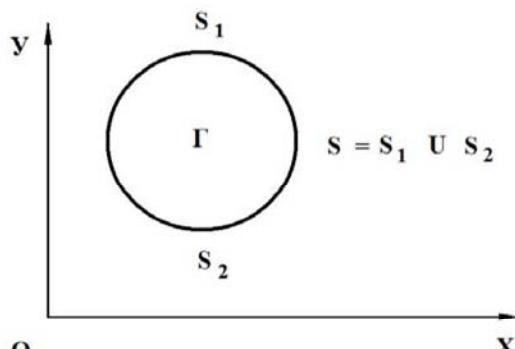


Figure 1. Some body Γ in a rectangular cartesian coordinate system XOY .

To solve the problem the modeling of transient elastic stress waves in deformable areas of the complex form consider some body Γ in a rectangular Cartesian coordinate system XOY

(Figure 1), which at the initial time $t = 0$ reported mechanical non-stationary impulsive effects.

Suggest, the body Γ made of homogeneous isotropic material, obeying Hooke's elastic law at small elastic deformations.

Exact two-dimensional equations (flat stress state) the dynamic theory of elasticity have the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma, \\ \sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \\ \tau_{xy} &= \rho C_s^2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \end{aligned} \quad (1)$$

where: σ_x , σ_y and τ_{xy} – components of elastic stress tensor; ε_x , ε_y и γ_{xy} – components of elastic strain tensor; u and v – the components of the vector of elastic displacements along the axes OX and OY respectively; ρ – material density;

$$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-v^2)}}$$

– the speed of longitudinal elastic waves;

$$C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+v)}}$$

– the speed of the transverse elastic waves; v – Poisson ratio; E – elastic modulus; $S (S_1 \cup S_2)$ - body boundary contour Γ .

System (1) in the area occupied by the body Γ , it should be integrated under initial and boundary conditions.

2. DEVELOPMENT OF METHODOLOGY AND ALGORITHM

To solve the two-dimensional plane dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions (1) we use the finite element method in displacements.

The problem is solved by a method of through computation, without allocation of breaks.

The main relations of the finite element method are obtained using the principle of possible displacements.

Taking into account the definition of the stiffness matrix, the inertia vector and the external force vector for the body Γ , we write the approximate value of the equation of motion in the theory of elasticity

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \\ \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где: \bar{H} - diagonal inertia matrix; \bar{K} - stiffness matrix; $\vec{\Phi}$ - vector of nodal elastic displacements; $\dot{\vec{\Phi}}$ - vector of nodal elastic velocities of displacements; $\ddot{\vec{\Phi}}$ - the vector of elastic nodal accelerations; \vec{R} - vector of external nodal elastic forces.

Relation (2) a system of linear ordinary differential equations of the second order in displacements with initial conditions.

Thus, using the finite element method in displacements, linear problem with initial and boundary conditions (1) led to the linear Cauchy problem (2).

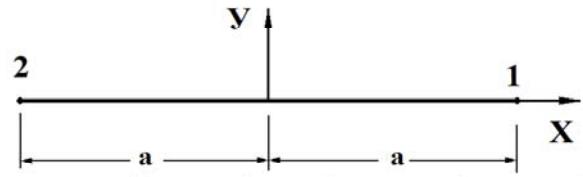


Figure 2. Contour finite element with two nodal points.

We determine the elastic contour stress at the boundary of the area free from loads.

By degenerating a rectangular finite element with four nodal points, we obtain a contour finite element with two nodal points (Figure 2). When axis is rotated x by an angle α counter-clockwise, we obtain an elastic contour stress σ_k at the center of gravity of a contour finite element with two nodal points

$$\sigma_k = (E/(2a(1-v^2)))((u_1 - u_2)\cos\alpha + \\ + (v_1 - v_2)\sin\alpha). \quad (3)$$

To integrate the equation (2) with the finite element version of the Galerkin method, we give it to the following form

$$\bar{H}\frac{d}{dt}\vec{\dot{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt}\vec{\dot{\Phi}} = \vec{\ddot{\Phi}}. \quad (4)$$

Integrating the time coordinate ratio (4) using the finite element version of the Galerkin method, we obtain a two-dimensional explicit two-layer finite element linear scheme in displacements for internal and boundary nodal points

$$\vec{\dot{\Phi}}_{i+1} = \vec{\dot{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1}(-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \\ \vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\dot{\Phi}}_{i+1}. \quad (5)$$

The main relations of the finite element method in displacements are obtained using the principle of possible displacements and the finite element version of the Galerkin method.

The General theory of numerical equations of mathematical physics requires the imposition of certain conditions on the ratio of steps in the

time coordinate Δt and on spatial coordinates, namely

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

where: Δl – the length of the end element side. The results of the numerical experiment showed that at $k = 0,5$ the stability of a two-dimensional explicit two-layer finite element linear scheme in displacements for internal and boundary nodal points on quasi-regular grids is ensured. For the study area consisting of materials with different physical properties, the minimum step in the time coordinate (6) is selected.

On the basis of the finite element method in displacements the technique is developed, the algorithm is developed and compiled a set of programs to solve two-dimensional wave problems of dynamic elasticity theory.

DETERMINATION OF UNSTEADY WAVE STRESSES IN AN ELASTIC HALF-PLANE

Consider the problem of the action of a concentrated wave in the form of Delta functions (fig. 4) perpendicular to the free surface of the elastic half-plane (Figure 3).

Calculations were carried out in the following units: kilogram-force (kgf); centimeter (cm); second (s). The following assumptions were made for conversion to other units: $1 \text{ kgf/cm}^2 \approx 0,1 \text{ MPa}$.

At the point B perpendicular to the free surface ABC elastic normal stress is applied σ_y (fig. 3), which, when $0 \leq n \leq 11$ ($n = t/\Delta t$) changes linearly against 0 until P , and when $11 \leq n \leq 21$ against P until 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1 \text{ MPa}$ (-1 kgf/cm^2)).

Boundary conditions for the contour $CDEA$ by $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Reflected waves from the circuit $CDEA$ do not reach to the point when $0 \leq n \leq 500$.

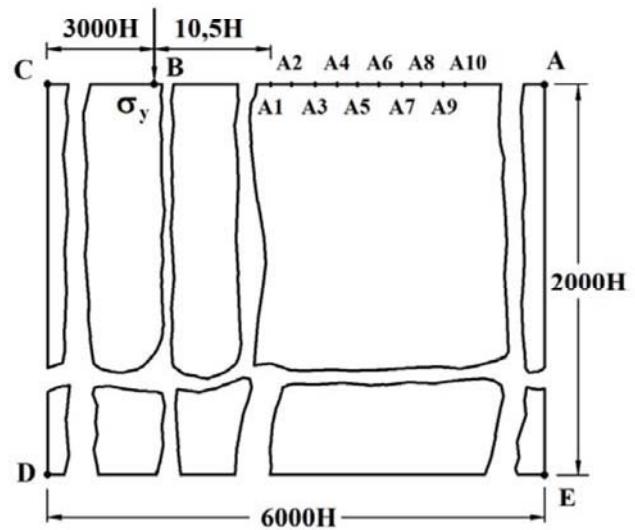


Figure 3. Formulation of the problem of the effect of a concentrated wave in the form of Delta functions on the free surface of the elastic half-plane.

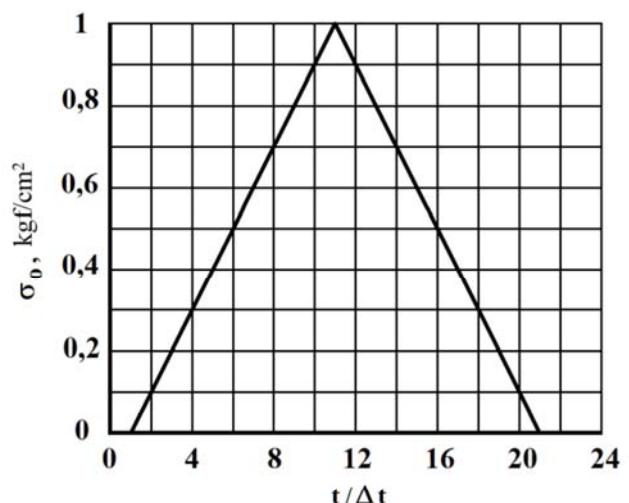


Figure 4. Impact in the form of Delta function.

Circuit ABC free from loads, besides the point B , where concentrated elastic normal stress is applied σ_y .

The calculations are carried out with the following initial data: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6} \text{ s}$; $E = 3,15 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ($3,15 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$); $v = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$ ($0,255 \cdot 10^5 \text{ kgf}\cdot\text{s}^2/\text{cm}^4$); $C_p = 3587 \text{ m/s}$; $C_s = 2269 \text{ m/s}$.

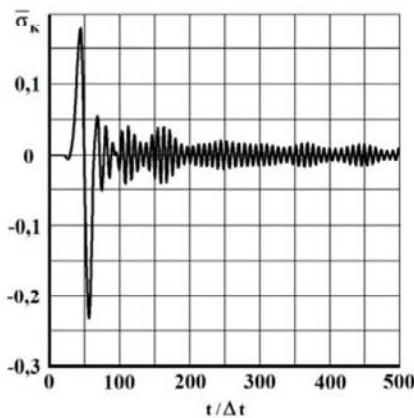


Figure 5. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A1.

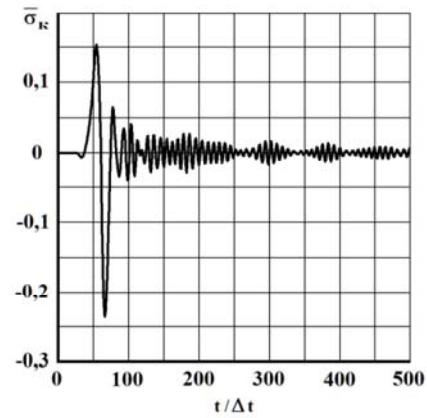


Figure 8. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A4.

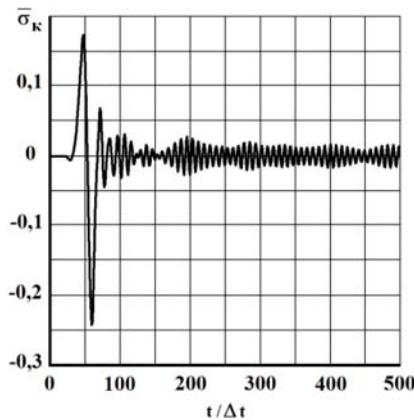


Figure 6. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A2.

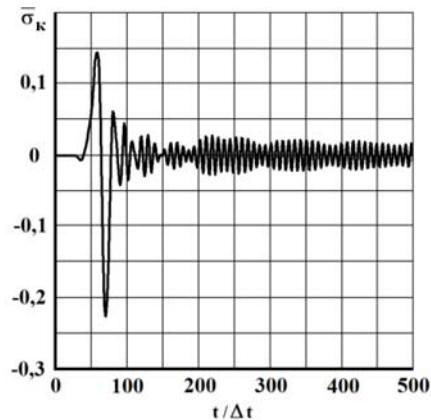


Figure 9. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A5.

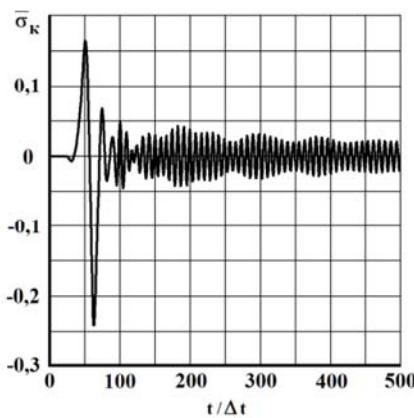


Figure 7. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A3.

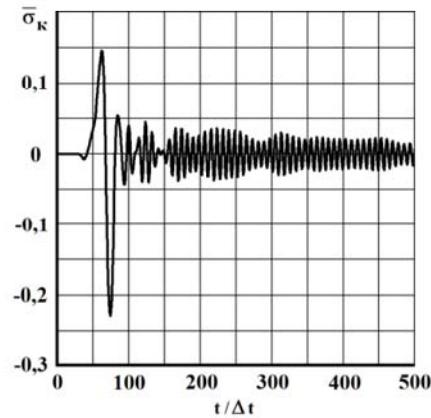


Figure 10. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A6.

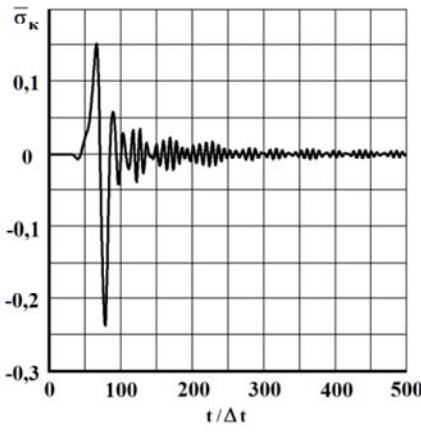


Figure 11. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A7.

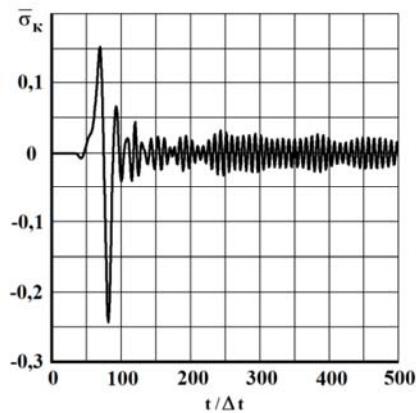


Figure 12. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A8.

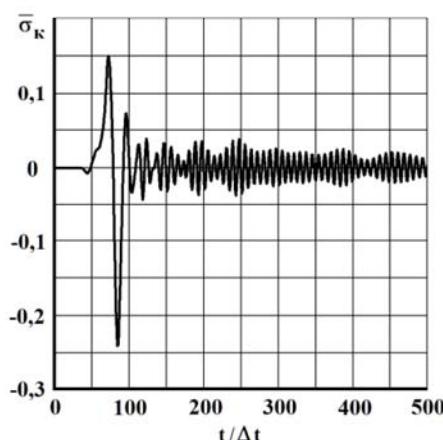


Figure 13. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A9.

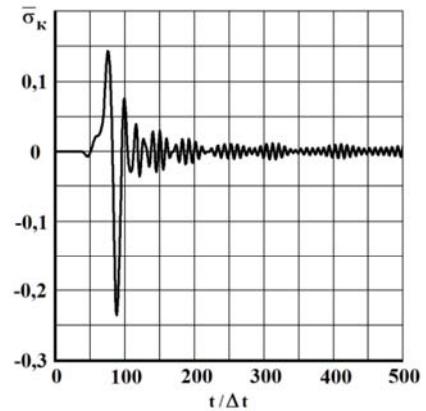


Figure 14. Change of elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t / \Delta t$ at the point A10.

The studied computational domain has 12008001 nodal point. The system of equations is solved from 48032004 unknown.

Upon fig. 5-14 the change of elastic contour stress is shown $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) in time n in points A1 - A10 (fig. 3), on the free surface of the elastic half-plane (distance between points: A1 and A2 equally H ; A2 and A3 equally H ; A3 and A4 equally H ; A4 and A5 equally H ; A5 and A6 equally H ; A6 and A7 equally H ; A7 and A8 equally H ; A8 and A9 equally H ; A9 and A10 equally H).

SUMMARY

1. On the basis of the finite element method the technique is developed, algorithm and software for solving linear two-dimensional plane problems, which allow you to solve complex problems in case of unsteady wave effects on complex objects. The main relations of the finite element method are obtained using the principle of possible displacements. The elasticity matrix is expressed in terms of longitudinal wave velocity, transverse wave velocity, and density.
2. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions in the form of partial differential equations, to solve problems under wave influences, with the help of the

- finite element method in displacements is reduced to a system of linear ordinary differential equations with initial conditions, which is solved by an explicit two-layer scheme.
3. The problem of mathematical modeling of unsteady elastic stress waves with concentrated vertical action in the form of a Delta function on the half-plane surface is solved. The studied computational domain has 12008001 nodal points. Solve the system of equations of 48032004 unknown. Tensile elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ has the following maximum value $\bar{\sigma}_k = 0,18$. Compressive elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ has the following maximum value $\bar{\sigma}_k = -0,24$.
 4. Amplitude of surface Rayleigh waves significantly larger than the amplitudes of the longitudinal, transverse and other waves with concentrated vertical action in the form of a triangular pulse on the surface of an elastic half-plane.
 5. After Rayleigh surface waves dynamic process observed in the form of standing waves.
 5. **Musayev V.K.** O dostovernosti rezul'tatov chislenного metoda resheniya slozhnyh zadach volnovoj teorii uprugosti pri udarnyh, vzryvnyh i sejsmicheskikh vozdejstviyah [On the reliability of the results of the numerical method for solving complex problems of the wave theory of elasticity in shock, explosion and seismic effects]. // *Uchenye zapiski Rossijskogo gosudarstvennogo social'nogo universiteta*. 2009. No. 5, pp. 21-33.
 6. **Kurantsov V.A., Denisyuk D.A., Denisenkov A.N., Savichev V.A., Akatyev S.V.** Reshenie zadachi ob interferencii ploskih prodol'nyh uprugih voln napryazhenij v vide funkciyi Hevisajda s pomoshch'yu chislenного metoda Musaeva V.K. v peremeshcheniyah [Solving the problem of interference of plane longitudinal elastic stress waves in the form of the Heaviside function using the numerical method of Musayev V.K. in displacements]. // *Bezopasnost' i ekologiya tekhnologicheskikh processov i proizvodstv. Materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii*. The village Persianovka, Rostov region, Donskoj gosudarstvennyj agrarnyj universitet, 2012, pp. 216-221.
 7. **Sazonov K.B., Fedorov A.L., Yuzbekov N.S., Shepelina P.V., Akatyev D.V.** Komp'yuternoe modelirovanie vozdejstviya ploskoj prodol'noj volny v vide pryamougol'nogo impul'sa na upruguyu poluploskost' s pomoshch'yu chislenного metoda Musaeva V.K. v peremeshcheniyah [Computer simulation of the impact of a plane longitudinal wave in the form of a rectangular pulse on an elastic half-plane using the numerical method Musayev V.K. in displacements]. // *Tekhnosfernaya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, ehnergo i resursosberezenie*: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XIV. V 3 t. Tom 2. Rostov-on-don, Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, 2012, pp. 368-376.

REFERENCES

1. **Kolsky G.** Volny napryazhenij v tverdyh telah [Stress waves in solids]. Moscow, Inostrannaya literatura, 1955. 192 pages.
2. **Ionov V.I., Ogibalov P.M.** Napryazheniya v telah pri impul'sivnom nagruzhenii [Stresses in bodies under impulsive loading]. Moscow, Vysshaya shkola, 1975, 464 pages.
2. **Zenkevich O.** Mctod konechnyh chlementov v tekhnike [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir, 1975, 543 pages.
3. **Timoshenko S.P., Gudyer D.** Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1975, 576 pages.
4. **Tikhonov A.N., Samarsky A.A.** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1977, 736 pages.

8. Starodubtsev V.V., Samoylov S.N., Shepelina P.V., Shiyanov S.M., Sergunov A.B. Modelirovanie difrakcii voln napryazhenij v svobodnom i podkreplennom kruglom otverstiyah s pomoshch'yu chislenного метода Musaeva V.K. v peremeshcheniyah [Simulation of diffraction of stress waves in free and reinforced round holes using the numerical method of Musayev V.K. in displacements]. // *Tekhnosfernaya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, ehnergo i resursosberezenie*: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XVI. V 2 t. Tom 2. Rostov-on-don, Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, 2014, pp. 303-312.
9. Starodubtsev V.V., Samoylov S.N., Shepelina P.V., Shiyanov S.M., Sergunov A.B. Reshenie zadachi o difrakcii voln davleniya v svobodnom i podkreplennom kvadratnom otverstiyah s pomoshch'yu chislenного метода Musaeva V.K. v peremeshcheniyah [Solution of the problem of diffraction of pressure waves in free and reinforced square holes using the numerical method of Musayev V.K. in displacements]. // *Tekhnosfernaya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, ehnergo i resursosberezenie*: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XVI. V 2 t. Tom 2. Rostov-on-don, Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, 2014, pp. 312-321.
10. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Volume 11, Issue 1, pp. 135-146.
11. Musayev V.K. On the mathematical modeling of nonstationary elastic waves stresses in corroborated by the round hole // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Volume 11, Issue 1, pp. 147-156.
12. Sushchev T.S., Akatyev S.V., Musayev A.V., Samoylov S.N., Starodubtsev V.V. Modelirovanie nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij v deformiruemyh oblastyah s pomoshch'yu chislenного метода, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Simulation of unsteady elastic stress waves in deformable areas using the numerical method, the algorithm and the Musayev V.K. program complex]. // *Tekhnosfernaya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, ehnergo i resursosberezenie*: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XVII. V 2 t. Tom 2. Rostov-on-don, Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, 2015, pp. 333-342.
13. Spiridonov V.P. Opredelenie nekotoryh zakonomernostej volnovogo napryazhennogo sostoyaniya v geoob'ektah s pomoshch'yu chislenного метода, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [The definition of some patterns of wave stress in geoobject using numerical method, algorithm and program complex Musayeva V. K.]. // *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2015, No. 12-5, pp. 832-835.
14. Fedorov A.L., Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Kuznetsov M.E., Idelson Ye.V. Opredelenie zakonomernostej nestacionarnogo volnovogo napryazhennogo sostoyaniya v geoob'ektah s pomoshch'yu chislenного метода, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Determination of the regularities of the unsteady wave stress state in geoobjects using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Tekhnosfernaya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, ehnergo i resursosberezenie*: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XVIII. V 2 t. Tom 2. Rostov-on-don, Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, 2016, pp. 289-297.
15. Dikova Ye.V. Dostovernost' chislenного метода, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. pri reshenii zadachi o rasprostranenii ploskih prodl'nyh uprugih

- voln (voskhodyashchaya chast' - linejnaya, niskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga) v poluploskosti [Reliability of the numerical method, algorithm and software complex of V.K. Musayev in solving the problem of propagation of plane longitudinal elastic waves (the ascending part is linear, the descending part is a quarter of a circle) in a half-plane]. // *Mezhdunarodnyj zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya*, 2016. No. 12-3, pp. 354-357.
16. **Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Kurantsov V.A., Musayeva S.V., Kulagina N.V.** Ocenka tochnosti i dostovernosti modelirovaniya ploskih nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij (treugol'nyj impul's) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musayev V.K. [Estimation of accuracy and reliability of simulation of plane unsteady elastic waves of stresses (triangular momentum) in the half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Problemy upravleniya bezopasnost'yu slozhnyh sistem. Materialy XXIV Mezhdunarodnoj konferencii*, Moscow, RGGU, 2016, pp. 371-374.
17. **Salikov L.M., Musayev A.V., Idelson Ye.V., Samoylov S.N., Blinnikov V.V.** Ocenka fizicheskoy dostovernosti modelirovaniya ploskih nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij v vide impul'snogo vozdejstviya (funkciya Hevisajda) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musayev V.K. [Estimation of the physical reliability of modeling plane unsteady elastic waves of stresses in the form of pulse action (Heaviside function) in the half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Problemy upravleniya bezopasnost'yu slozhnyh sistem. Materialy XXIV Mezhdunarodnoj konferencii*, Moscow, RGGU, 2016, pp. 352-355.
18. **Akatyev S.V., Kuznetsov M.E., Sushchev T.S., Kurantsov O.V., Kurantsov V.V.** Ocenka tochnosti modelirovaniya ploskih nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij (pryamougol'nyj impul's) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musayev V.K. [Estimation of the accuracy of simulation of plane unsteady elastic waves of stresses (rectangular pulse) in the half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Problemy upravleniya bezopasnost'yu slozhnyh sistem. Materialy XXIV Mezhdunarodnoj konferencii*, Moscow, RGGU, 2016, pp. 371-374.
19. **Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Dikova Ye.V., Krylov A.I.** Modelirovanie dostovernosti i tochnosti impul'snogo vozdejstviya v uprugej poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musayev V.K. [Simulation of the reliability and accuracy of the impulse action in the elastic half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Informacionno-telekommunikacionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnyh sistem. Materialy Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem*, Moscow, RUDN, 2017, pp. 339-341.
20. **Fedorov A.L., Shiyanov S.M., Salikov L.M., Blinnikov V.V.** Modelirovanie ploskih voln pri rasprostranenii impul'sa (voskhodyashchaya chast' – linejnaya, niskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga) v uprugej poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musayev V.K. [Simulation of plane waves at momentum propagation (ascending part – linear, descending part – quarter of a circle) in an elastic half-plane by means of the numerical method, algorithm and program complex Musayev V.K.]. // *Informacionno-telekommunikacionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnyh sistem. Materialy Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem*, Moscow, RUDN, 2017, pp. 353-355.
21. **Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Musayev A.V., Shiyanov S.M., Kurantsov O.V.** nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij (pryamougol'nyj impul's) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musayev V.K. [Estimation of the accuracy of simulation of plane unsteady elastic waves of stresses (rectangular pulse) in the half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Problemy upravleniya bezopasnost'yu slozhnyh sistem. Materialy XXIV Mezhdunarodnoj konferencii*, Moscow, RGGU, 2016, pp. 371-374.

- Modelirovanie uprugih voln v vide impul'snogo vozdejstviya (voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda Musaeva V.K. [Modeling of elastic waves in the form of impulse action (ascending part - a quarter of a circle, descending part - a quarter of a circle) in a half-plane by means of the numerical method Musayev V.K.]. // *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, 2017, No. 1, pp. 36-40.
22. **Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Musayev A.V., Shiyanov S.M., Kurantsov O.V.** Modelirovanie s pomoshch'yu chislenного metoda Musaeva V.K. nestacionarnyh uprugih voln v vide impul'snogo vozdejstviya (voskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga, srednyaya - horizontal'naya, niskhodyashchaya chast' - linejnaya) v sploshnoj deformiruemoj srede [Modeling of unsteady elastic waves in the form of pulse action (ascending part - a quarter of a circle, the middle part - horizontal, the descending part - linear) in a continuous deformable medium using the Musayev V.K. numerical method] // *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, 2017, No. 1, pp. 63-68.
23. **Kurantsov V.A., Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Samoylov S.N., Kuznetsov M.E.** Modelirovanie impul'sa (pervaya vety': voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – linejnaya; vtoraya vety': treugol'nik) v uprugoj poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda Musaeva V.K. [Modeling of momentum (the first branch: the ascending part - a quarter of a circle, the descending part - linear; the second branch: a triangle) in an elastic half-plane using the numerical method of Musayev V.K.]. // *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, 2017, No. 2, pp. 51-55.
24. **Kurantsov V.A., Musayev A.V., Kurantsov O.V., Mikhedova Ye.E., Chernykh Yu.K.** Modelirovanie rasprostraneniya impul'sa (voskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Modeling of the propagation of the pulse (rising - a quarter of a circle, the descending part of the - linear) in the half-plane using a numerical method, algorithm and program complex Musayev V.K.]. // *Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki vysshej shkoly: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2017"*, Moscow, Moskovskij politekh, 2017, pp. 23-28.
25. **Kurantsov V.V., Musayev A.V., Samoylov S.N., Musayeva S.V., Shiyanov S.M.** Modelirovanie impul'sa (voskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga, srednyaya - horizontal'naya, niskhodyashchaya - linejnaya) v uprugoj poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Modeling of momentum (ascending part - a quarter of a circle, middle - horizontal, descending - linear) in an elastic half-plane by means of the numerical method, algorithm and program complex Musayev V.K.]. // *Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki vysshej shkoly: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2017"*, Moscow, Moskovskij politekh, 2017, pp. 29-35.
26. **Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Dikova Ye.V., Musayev A.V., Krylov A.I.** Modelirovanie impul'snogo vozdejstviya (voskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga) v poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Simulation of impulse action (ascending part - quarter of a circle, descending part - quarter of a circle) in a half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musayev V.K.]. // *Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki vysshej shkoly: materialy*

- Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2017", Moscow, Moskovskij politekh, 2017, pp. 82-87.*
27. **Starodubtsev V.V., Dikova Ye.V., Denisenkov A.N., Kormilitsin A.I., Shepelina P.V.** Modelirovanie vozdejstviya v vide dvuh impul'sov (pervyj: voskhodyashchaya chast' - chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – linejnaya; vtoroj - treugol'nik) v uprugoj poluploskosti s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Modeling of the impact in the form of two pulses (the first: the ascending part – a quarter of a circle, the descending part – a linear; the second – a triangle) in the elastic half-plane using the numerical method, algorithm and software complex Musaev V. K.]. // *Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki vysshej shkoly: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2017", Moscow, Moskovskij politekh, 2017, pp. 88-94.*
28. **Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Dikova Ye.V., Kuznetsov M.E., Fedorov A.L.** Primenenie chislenного metoda Musaeva V.K. dlya modelirovaniya vozdejstviya v vide dvuh impul'sov (pervyj – polukrug, vtoroj – treugol'nik) v uprugoj poluploskosti [Application of the numerical method Musaev V.K. to simulate the impact of two pulses (the first – a semicircle, the second - a triangle) in the elastic half-plane]. // *Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki vysshej shkoly: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2017", Moscow, Moskovskij politekh, 2017, pp. 94-100.*
29. **Derevyashkin I.V., Popadeykin V.V., Salikov L.M., Blinnikov V.V., Doronin F.L.** Modelirovanie bezopasnosti unikal'nyh sooruzhenij ehnergetiki s pomoshch'yu chislenного metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [Modeling the safety of unique energy facilities using the numerical method, algorithm and software complex Musaev V.K.]. // *Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki vysshej shkoly: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2017", Moscow, Moskovskij politekh, 2017, pp. 178-184.*
- ## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
1. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. – М.: Иностранная литература, 1955. – 192 с.
 2. Ионов В.И., Огibalов П.М. Напряжения в тела при импульсивном нагружении. – М.: Высшая школа, 1975. – 464 с.
 3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М: Мир, 1975. – 543 с.
 4. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
 6. Мусаев В.К. О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Ученые записки Российского государственного социального университета, 2009, №5, с. 21-33.
 7. Куранцов В.А., Денисюк Д.А., Денисенков А.Н., Савичев В.А., Акатьев С.В. Решение задачи об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. С. 216-221.
 8. Сазонов К.Б., Федоров А.Л., Юзбеков Н.С., Шепелина П.В., Акатьев Д.В. Компьютерное моделирование воздей-

- ствия плоской продольной волны в виде прямоугольного импульса на упругую полуплоскость с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // *Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение*: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIV. В 3 т. Том 2. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2012. С. 368-376.
9. Стародубцев В.В., Самойлов С.Н., Шепелина П.В., Шиянов С.М., Сергунов А.Б. Моделирование дифракции волн напряжений в свободном и подкрепленном круглом отверстиях с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // *Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение*: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XVI. В 2 т. Том 2. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2014. С. 303-312.
10. Стародубцев В.В., Самойлов С.Н., Шепелина П.В., Шиянов С.М., Сергунов А.Б. Решение задачи о дифракции волн давления в свободном и подкрепленном квадратном отверстиях с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // *Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение*: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XVI. В 2 т. Том 2. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2014. С. 312-321.
11. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Volume 11, Issue 1, pp. 135-146.
12. Musayev V.K. On the mathematical modeling of nonstationary elastic waves stresses in corroborated by the round hole // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Volume 11, Issue 1, pp. 147-156.
13. Сущев Т.С., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Самойлов С.Н., Стародубцев В.В. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение*: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XVII. В 2 т. Том 2. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2015. С. 333-342.
14. Спиридонов В.П. Определение некоторых закономерностей волнового напряженного состояния в геообъектах с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Современные наукоемкие технологии*, 2015. №12-5, с. 832-835.
15. Федоров А.Л., Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Кузнецов М.Е., Идельсон Е.В. Определение закономерностей нестационарного волнового напряженного состояния в геообъектах с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение*: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XVIII. В 2 т. Том 2. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2016, с. 289-297.
16. Дикова Е.В. Достоверность численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. при решении задачи о распространении плоских продольных упругих волн (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости // *Международный журнал экспериментального образования*, 2016, №12-3, с. 354-357.

17. Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Куранцов В.А., Мусаева С.В., Кулагина Н.В. Оценка точности и достоверности моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений (треугольный импульс) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXIV Международной конференции. – М.: РГГУ, 2016, с. 352-355.
18. Саликов Л.М., Мусаев А.В., Идельсон Е.В., Самойлов С.Н., Блинников В.В. Оценка физической достоверности моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений в виде импульсного воздействия (функция Хевисайда) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXIV Международной конференции. – М.: РГГУ, 2016, с. 356-359.
19. Акатьев С.В., Кузнецов М.Е., Сущев Т.С., Куранцов О.В., Куранцов В.В. Оценка точности моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений (прямоугольный импульс) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXIV Международной конференции. – М.: РГГУ, 2016, с. 371-374.
20. Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Дикова Е.В., Крылов А.И. Моделирование достоверности и точности импульсного воздействия в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2017, с. 339-341.
21. Федоров А.Л., Шиянов С.М., Саликов Л.М., Блинников В.В. Моделирование плоских волн при распространении импульса (восходящая часть - линейная, нисходящая часть - четверть круга) в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2017, с. 353-355.
22. Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В. Моделирование упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества, 2017, №1, с. 36-40.
23. Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В. Моделирование с помощью численного метода Мусаева В.К. нестационарных упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая часть – линейная) в сплошной деформируемой среде // Проблемы безопасности российского общества, 2017, №1, с. 63-68.
24. Куранцов В.А., Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Самойлов С.Н., Кузнецов М.Е. Моделирование импульса (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная; вторая ветвь: треугольник) в упругой полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества, 2017, №2, с. 51-55.
25. Куранцов В.А., Мусаев А.В., Куранцов О.В., Михедова Е.Е., Черных Ю.К. Моделирование распространения импульса (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная) в полуплоско-

- сти с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии - 2017». – М.: Московский политех, 2017, с. 23-28.
26. **Куранцов В.В., Мусаев А.В., Самойлов С.Н., Мусаева С.В., Шиянов С.М.** Моделирование импульса (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2017»*. – М.: Московский политех, 2017, с. 29-35.
27. **Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Дикова Е.В., Мусаев А.В., Крылов А.И.** Моделирование импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полу平面 с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2017». – М.: Московский политех, 2017, с. 82-87.
28. **Стародубцев В.В., Дикова Е.В., Денисенков А.Н., Кормилицин А.И., Шепелина П.В.** Моделирование воздействия в виде двух импульсов (первый: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная; второй - треугольник) в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии - 2017»*.
- М.: Московский политех, 2017, с. 88-94.
29. **Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Дикова Е.В., Кузнецов М.Е., Федоров А.Л.** Применение численного метода Мусаева В.К. для моделирования воздействия в виде двух импульсов (первый – полуокружность, второй – треугольник) в упругой полуплоскости // *Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2017»*. – М.: Московский политех, 2017. С. 94-100.
30. **Деревяшкин И.В., Попадейкин В.В., Саликов Л.М., Блинников В.В., Доронин Ф.Л.** Моделирование безопасности уникальных сооружений энергетики с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2017»*. – М.: Московский политех, 2017, с. 178-184.
-
- Musayev Vyacheslav Kadyr oglu, Honorary worker of higher professional education of the Russian Federation, doctor of technical Sciences, Professor, Professor of Technosphere safety Department, Russian University of transport, Professor of engineering and technology of mining and oil and gas production Department, Moscow Polytechnic University; 127994, Moscow, 9b9 Obrazcova str., Russia; 107023, Moscow, B. Semenovskaya str., 38, Russia; tel. +7(926)5670558.
E-mail: musayev-vk@yandex.ru.
- Musaev Vyacheslav Kadyr oglu, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры Техносферная безопасность Российского университета транспорта, профессор кафедры Техника и технология горного и нефтегазового производства Московского политехнического университета; 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; 107023, Россия, г. Москва, ул. Б. Семеновская, 38; тел. +7(926) 5670558.
E-mail: musayev-vk@yandex.ru.