DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-171-177

ПРОБЛЕМЫ И ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В.А. Шабанов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассматривается классическая гидродинамическая теория фильтрации. Рассматриваются модели грунта, жидкости и характер течения жидкости, легшие в основу создания классической теории фильтрации. Также рассматриваются допущения, принятые для линеаризации уравнений. Оценивается область применения классической теории фильтрации. Предложена новая модель фильтрации через пористую среду, основанная на применении законов теоретической механики. В основу положена классическая модель грунта: грунт состоит из капилляров с параллельными осям, по которым движется жидкость. Для задач инфильтрации выведены уравнения движения. Рассмотрены частные случаи нестационарного движения конечного объема жидкости. Приведен численный пример машинного эксперимента.

Ключевые слова: гидромеханическая теория фильтрации, ламинарное движение, закон Дарси, нестационарная фильтрация, модель грунта, конечный объём жидкости

PROBLEMS OF NONSTATIONARY FILTRATION

Vsevolod A. Shabanov
Samara State Technical University, Samara, RUSSIA

Abstract: The article deals with the classical hydrodynamic theory of filtration. Discusses models of soil, fluid and nature of fluid flow that formed the basis for the creation of the classic filtration theory. Also discusses the assumptions made for the linearization of the equations. Evaluated the scope of the classical filtration theory. Proposed a new model of filtration through a porous medium, based on the application of the laws of theoretical mechanics. It is based on the classical model of soil: the soil is composed of capillaries with ..parallel axes, in which the liquid moves. For tasks of infiltration equations of motion. Considered special cases of unsteady motion of a finite volume of liquid. Numerical example a machine experiment.

Keywords: hydro mechanical theory of filtration, laminar movement, Darcy's law, transient filtering, the soil model, finite volume of fluid

В последнее время участились процессы, связанные с затоплением территорий, аварийных разливов жидкостей по поверхности земли и т.п. В связи с нестационарностью этих процессов возникла необходимость разработки новых моделей инфильтрации жидкости в грунт.

Рассмотрим процесс проникновения тяжелой вязкой жидкости в пористую среду, причем сначала рассмотрим этот процесс с позиций классической теории фильтрации, следуя, в частности, [1-5].

Классическая теория фильтрации базируется на моделях теории сплошной среды, считая постоянными свойства жидкости (плотность ρ и вязкость μ) и пористой среды (пористость m и коэффициент фильтрации k). Решение задач сводится решению трех уравнении движения и уравнения неразрывности. Рассмотрим частный случай – движение вдоль оси y. [1].

Возьмем одно уравнение движения в общем случае с инерционными членами (ось y направлена вниз).

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+g-\frac{mg}{k}v_y \qquad (1)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) видно, v_y зависит только от y. А также, учитывая, что истинная скорость движения жидкости в порах равна

$$v_y = \frac{1}{m} v,$$

получим из (1):

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g - \frac{g}{k} v \qquad (3)$$

m – пористость среды.
В левой части уравнения стоит ускорение

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v}{dt},$$

которым в классической теории пренебрегают.
Вводя понятие – напор

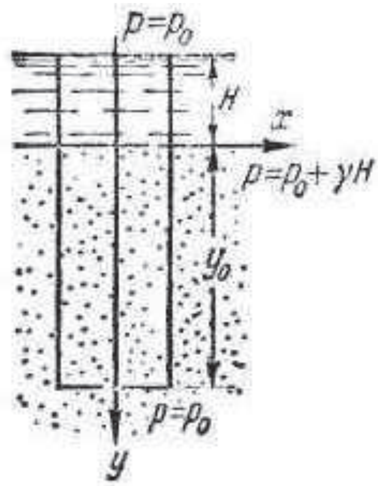
$$h = \frac{p}{\rho g} - y$$

и подставляя в (3) получим закон Дарси

$$v = -k\frac{dh}{dy},$$

т.е. закон Дарси применим и к неустановившемуся движению, если пренебречь ускорением. Предположим теперь, что вода просачивается в грунт под постоянным напором H, причем в момент времени t она просочилась на глубину y_0 от границы водоема.
Скорость фильтрации, при использовании вышеприведенной модели будет

$$\frac{1}{m}\frac{dy_0}{dt} = k\frac{H + h_k + y_0}{y_0} \qquad (4)$$



<u>Рисунок 1.</u> Схема фильтрации [1].

Здесь, через h_k ,обозначена высота капиллярного поднятия.
Как видно из этой формулы, скорость фильтрации изменяется по гиперболе и при возрастании y_0 стремится коэффициенту фильтрации. При стремлении y_0 к нулю – скорость неограниченно возрастает.
Данные исследования выполнены для непрерывной среды, в гидромеханическом понимании, при ламинарном течении и без учета сил инерции. Однако, на практике, встречаются случаи пролива конечного объема жидкости на поверхность грунта, и эта жидкость фильтруется в грунт. Процесс имеет начало и конец, а масса жидкости конечна. Для исследования подобных процессов модель сплошной среды не подходит.
Нами разработана иная модель инфильтрации. Основные положения её таковы:
1) В качестве модели грунта принята модель идеального грунта.
Поскольку движение вязкой жидкости достаточно хорошо изучено при определенных допущениях, а именно, для движения с малыми скоростями в прямолинейных призматических каналах, поэтому в качестве модели для изучения законов фильтрации в грунте, принимается грунт, имеющий поры в виде цилиндров с параллельными осями. Такой грунт называют идеальным [5].

2) В качестве модели жидкости принята ньютоновская модель вязкой жидкости.
3) Масса жидкости, участвующей в движении является переменной и конечной.
4) Процесс протекает во времени, имеет начало и конец.
5) При составлении уравнения движения используются модели и основные теоремы теоретической механики.

Пусть на поверхности грунта находится вода (жидкость) слоем толщиной Δ, которая инфильтрует вглубь под действием силы тяжести. Толщина слоя жидкости на поверхности остается постоянной. Эти условия рассмотрены выше.

В качестве модели грунта возьмем, как уже говорилось, модель идеального грунта с вертикальными цилиндрическими круговыми порами диаметром d. Будем исследовать процесс проникновения жидкости в пору.

Ось y направим вниз, а начало отсчета поместим на поверхности грунт.

Будем считать, что часть жидкости над порой движется вместе с жидкостью в поре. Они образуют жидкий цилиндр высотой Δ+ y и диаметром d. По мере проникновения в пору масса цилиндра возрастает за счет присоединения частиц с поверхности. Присоединяющиеся частицы движутся нормально к оси y (рис. 2).

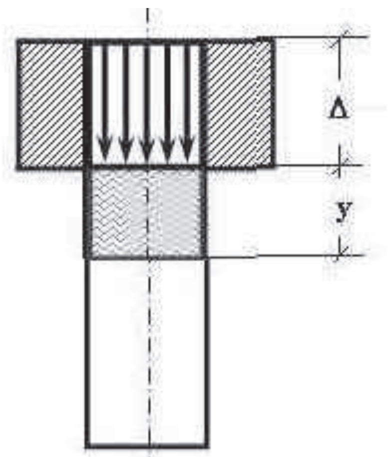


Рисунок 2. Схема движения жидкости.

На жидкий цилиндр, движущийся в поре, действуют силы:

– Сила тяжести

$$Fg = g\rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\,; \qquad (6)$$

– Силы вязкого трения, которые в общем случае можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых -$T1$- пропорциональна первой степени скорости, а вторая – $T2$ пропорциональна квадрату скорости [7]. Они также пропорциональны площади контакта жидкого цилиндра со стенками поры.

$$T1 = R1\pi dy \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (7)$$

$$T2 = R2\pi dy \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (8)$$

Коэффициенты $R1$ и $R2$ учитывают как свойства жидкости, так и свойства грунта.

На жидкий цилиндр, поскольку движение его не стационарно, действуют и силы инерции. Поскольку масса цилиндра изменяется по мере проникновения жидкости в пору, будем рассматривать её (массу цилиндра) как материальную точку переменной массы [8].

Для определения силы инерции используем второй закон Ньютона в такой формулировке:

$$Fi = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right); \qquad (9)$$

– Масса

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y) \qquad (10)$$

$$Fi = \frac{d}{dt}\left(\rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{dy}{dt}\right); \qquad (11)$$

Дифференцируя уравнение по времени, получим:

$$Fi = \rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{d^2 y}{dt^2} + \rho \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (12)$$

Составим уравнение движения жидкого цилиндра переменной массы:

$$Fi + T1 + T2 = Fg \qquad (13)$$

Подставив выражения для действующих сил в (1), получим:

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{d^2 y}{dt^2} + \rho\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \\ + R1\pi dy \cdot \frac{dy}{dt} + R2\pi dy \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = g\rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y) \qquad (14)$$

Разделив правую и левую части уравнения (2) на массу, что можно сделать, поскольку она всегда отлична от нуля, получим:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{\Delta + y} + \frac{4R1}{\rho d}\frac{dy}{dt} \cdot \frac{y}{\Delta + y} + \\ + \frac{4R2}{\rho d}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g. \qquad (15)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. В нем явно не присутствует переменная t и, следовательно, оно допускает понижение порядка [10].
Введем новую переменную

$$p(y) = \frac{dy}{dt}. \qquad (16)$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dy}p \qquad (17)$$

Подставив в уравнение (12), получим:

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta + y} + \frac{4R1}{\rho d} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + \\ + \frac{4R2}{\rho d} \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g. \qquad (18)$$

Получили уравнение первого порядка, т.н. уравнение Абеля второго порядка класса В. Исследуем решение на границах интервала.
Пусть y достаточно велико и

$$\Delta << y.$$

Тогда силами инерции можно пренебречь и

$$\frac{y}{\Delta + y} \approx 1.$$

Уравнение (18) запишется так:

$$\frac{4R1}{\rho d} \cdot p + \frac{4R2}{\rho d} \cdot p^2 = g \qquad (19)$$

Получено общее равнение инфильтрации под действием гравитационных сил.
Предположим, что имеет место линейная фильтрация – закон Дарси, который записывается так

$$v = kI.$$

Здесь $I = 1$, градиент, k – коэффициент фильтрации. Т.е. скорость течения в поре будет равняться истинной скорости течения,

$$p = \frac{k}{m}.$$

m – пористость.
Для рассматриваемого случая уравнение инфильтрации запишется так

$$\frac{4R1}{\rho d} \cdot \frac{k}{m} = g; \qquad (20)$$

откуда

$$\frac{4R1}{\rho d} = \frac{mg}{k} \qquad (21)$$

Если же имеет место квадратичная инфильтрация, то скорость инфильтрации определяется законом Краснопольского

$$v = k\sqrt{I}\,, \qquad (22)$$

или

$$v^2 = k^2 I\,,\ p^2 = \left(\frac{k}{m}\right)^2 \qquad (23)$$

Из уравнения

$$\frac{4R2}{\rho d}\cdot p^2 = g \qquad (24)$$

Найдем

$$\frac{4R2}{\rho d} = g\left(\frac{m}{k}\right)^2 \qquad (25)$$

Подставим найденные значения сил сопротивления в уравнение движения (18)

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta + y} + r1\cdot\frac{mg}{k}\cdot p\cdot\frac{y}{\Delta + y} + r2\cdot\left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot g\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta + y} = g. \qquad (26)$$

Теперь исследуем уравнение движения при малых значениях y. Предположим, что

$$y << \Delta$$

и имеет место квадратичная инфильтрация. При этих предположениях уравнение (9) запишется так:

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta} + \left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot g\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta} = g. \qquad (27)$$

В начальный момент влияние присоединенной массы на движение невелико и им можно пренебречь. Тогда уравнение движения будет:

$$\frac{dp}{dy}p + \left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot g\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta} = g. \qquad (28)$$

Обозначим

$$r = \left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot\frac{g}{\Delta} \qquad (29)$$

И тогда

$$\frac{dp}{dy}p + r\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta} = g. \qquad (30)$$

При начальной скорости

$$v(0) = v0\,,$$

или

$$p(0) = v0\,,$$

уравнение (18) имеет решение вида:

$$p^2 = \frac{\dfrac{g\sqrt{\pi} * erf(\sqrt{-r}\cdot y}{\sqrt{-r}} + v0^2}{\exp(ry^2)} \qquad (31)$$

Здесь $erf(\sqrt{-r})$ функция ошибок.

Численный эксперимент показал, что скорости инфильтрации и ускорения быстро меняются. Эпюры скоростей и ускорения представлены на рисунках 3 и 4.

Из рисунков видно, что при глубине проникновения свыше миллиметра влияние ускорения становится малым и им можно пренебречь.

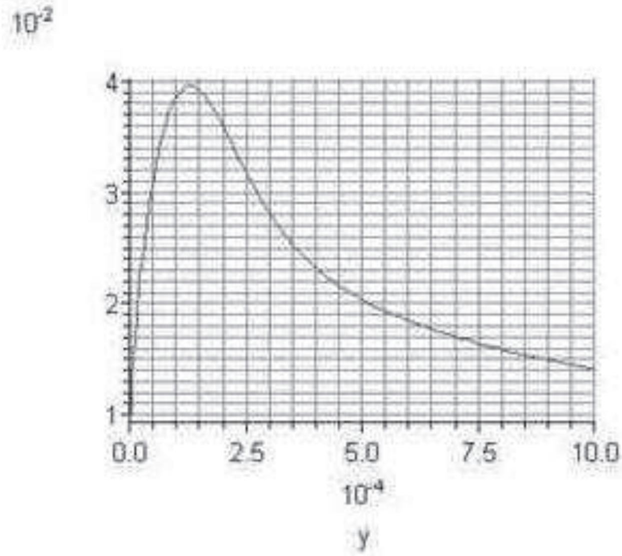


Рисунок 3. Эпюра скоростей.

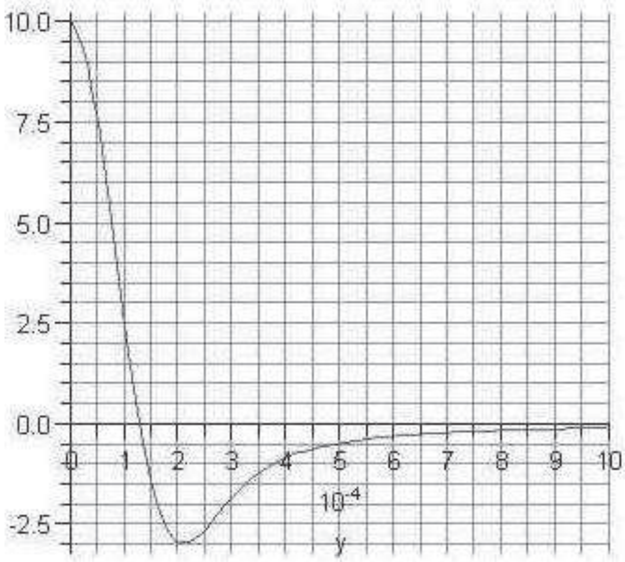


Рисунок 4. Эпюра ускорений.

Соответственно для расчета скоростей можно использовать упрощенное уравнение движения.(13) в общем виде:

$$\frac{p^2}{\Delta + y} + r1 \cdot \frac{mg}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + + r2 \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^2 \cdot g \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g \qquad (32)$$

А для ламинарного движения

$$\frac{p^2}{\Delta + y} + \frac{mg}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + = g \qquad (33)$$

Если же в вышерассмотренных уравнениях заменить Δ на $\Delta - my$, то будет иметь место случай впитывания воды в грунт.

Большие ускорения, большие градиенты могут вызвать уплотнение грунта, изменение его фильтрационных характеристик. Это подтверждено нашими исследованиями [7-9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полубаринова-Кочина П.Я**. Теория движения грунтовых вод. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. – 678 с.
2. Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Расчеты фильтрации. – М.: Стройиздат Наркомстроя, 1941. – 152 с.
3. **Седов Л.Н.** Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
4. **Вебстер А.Г., Маскет М.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1949. – 613 с.
5. **Лейбензон Л.С.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.: ОГИЗ, 1947. – 244 с.
6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.
7. **Шабанов В.А., Пупков Е.А., Каширина Т.В.** Экспериментальное исследование нестационарной фильтрации в песчаных грунтах. // Градостроительство и архитектура, 2015, №3(20), с. 82-86.
8. **Шабанов В.А., Михасек А.А.** Экспериментальное исследование проникновения вязкой жидкости в пористую среду. // Известия высших учебных заведений. Строительство, 2006, №11-12, с. 52-56.
9. **Шабанов В.А.** Исследование фильтрационных характеристик песчаных грунтов при многократном изменении гради-

ентов напоров. // Сборник «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство». – Самара: СГАСУ, 2016, с. 159-161.

REFERENCES

1. **Polubarinova-Kochina P.Ya.** Teoriya Dvizheniya Gruntovykh Vod [Theory of Groundwater Movement]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1952, 678 pages.
2. Tekhnicheskiye Usloviya i Normy Proyektirovaniya Gidrotekhnicheskikh Sooruzheniy. Raschety Filtratsii [Technical Conditions and Design Standards for Hydraulic Structures. Filtering Analysis]. Moscow, Stroyizdat Narkomstroya, 1941, 152 pages.
3. **Sedov L.N.** Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983, 528 pages.
4. **Webster A.G., Masket M.** Dvizheniye Prirodnykh Zhidkostey i Gazov v Poristoy Srede [Movement of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium]. Moscow, Gostekhizdat, 1949, 613 pages.
5. **Leybenzon L.S.** Dvizheniye Prirodnykh Zhidkostey i Gazov v Poristoy Srede [Movement of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium]. Moscow, OGIZ, 1947, 244 pages.
6. **Kamke E.** Spravochnik po Obyknovennym Differentsialnym Uravneniyam [A Handbook of Ordinary Differential Equations]. Saint-Petersburg, Lan, 2003, 576 pages.
7. **Shabanov V.A., Pupkov Ye.A., Kashirina T.V.** Eksperimentalnoye Issledovaniye Nestatsionarnoy Filtratsii v Peschanykh Gruntakh [Experimental Study of Non-Stationary Filtration in Sandy Soils]. // Gradostroitelstvo i Arkhitektura, 2015, No. 3(20), pp. 82-86.
8. **Shabanov V.A., Mikhasek A.A.** Eksperimentalnoye Issledovaniye Proniknoveniya Vyazkoy Zhidkosti v Poristuyu Sredu [Experimental Study of the Penetration of a Viscous Liquid into a Porous Medium]. // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitelstvo, 2006, No. 11-12, pp. 52-56.
9. **Shabanov V.A.** Issledovaniye Filtratsionnykh Kharakteristik Peschanykh Gruntov pri Mnogokratnom Izmenenii Gradiyentov Naporov [Investigation of Filtration Parameters of Sandy Soils with Multiple Changes in Pressure Gradients]. // Sbornik «Traditsii i innovatsii v stroitelstve i arkhitekture. Stroitelstvo». Samara, SGASU, 2016, pp. 159-161.

Шабанов Всеволод Александрович, член-корреспондент РААСН, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры «Природоохранное и гидротехническое строительство», Самарский государственный технический университет; 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194;
тел.: +7(846) 242-17-84; факс.: +7(846) 332-19-65;
E-mail: shabanov@samgasu.ru.

Vsevilid A. Shabanov, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Ph.D., Professor of the Department “Environmental and Hydraulic Engineering”, Samara State Technical University; 443001, Russia, Samara, ul. Molodogvardeyskaya, 194; phone: +7(846) 242-17-84;
fax: +7(846) 332-19-65; e-mail: shabanov@samgasu.ru.