DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-164-170

ЖЕСТКОЕ И НЕЖЕСТКОЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЛЯ МНОГООПОРНОЙ СИСТЕМЫ: ЕЩЕ РАЗ О РОЛИ ДЕМПФИРОВАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ ПРИ РАСЧЕТЕ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.Г. Тяпин

Атомэнергопроект, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье обсуждаются вопросы вывода уравнений движения для линейных расчетов сооружений на сейсмические воздействия. Статья продолжает ранее начатую дискуссию: автор не согласен с предложением коллег по включению в правую часть уравнений движения, описывающую динамические нагрузки, матрицы демпфирования. Эти возражения относятся к самому распространенному случаю «жесткого» движения нескольких опор. В настоящей статье автор воспроизводит логику вывода уравнений движения для общего случая «нежесткого» движения опор и указывает момент при выводе уравнений, когда оппонентами нарушается физическая логика перехода к «жесткому» движению опор, как к частному случаю «нежесткого» движения. По мнению автора, ошибка заключается в использовании модели демпфирования Рэлея для правой части уравнения движения. Это противоречит физической логике, поскольку демпфирование в модели Рэлея не является целиком «внутренним»: оно благодаря участию матрицы масс работает на жестких смещениях системы, в отличие от внутреннего демпфирования.

Ключевые слова: сейсмическая реакция, модель демпфирования Рэлея, многоопорные системы

RIGID AND NON-RIGID KINEMATIC EXCITATION FOR MULTIPLY-SUPPORTED SYSTEM: ONCE MORE ABOUT THE CONTRIBUTION OF DAMPING TO THE DYNAMIC LOADS IN SEISMIC ANALYSIS

Alexander G. Tyapin

Atomenergoproject, Moscow, RUSSIA

Abstract: Development of linear equations of motion for seismic analysis is discussed in the paper. The paper continues the discussion: the author does not agree with colleagues putting damping matrix into the right-hand part of the equation of motion describing dynamic loads. This disagreement refers to the most popular case of "rigid" motion of multiple supports. In this paper the author follows the logic of general "non-rigid" support motion and points out a step in the equation development when the transition to "rigid" support motion (as a particular case of "non-rigid" motion) is spoiled by the opponents. In the author's opinion, the mistake is in the implementation of the Rayleigh damping model for the right-hand part of the equation. This is in the contradiction with physical logic, as damping in the Rayleigh model is not really "internal": due to the participation of mass matrix it works on rigid displacements, which is impossible for internal damping.

Keywords: seismic response, Rayleigh damping model, multiply-supported systems

14 февраля 2018 года в Российской Академии Архитектуры и Строительных Наук состоялись VII Золотовские чтения. На них, в частности, обсуждались вопросы, затронутые автором в статье [1]. Прошедшее обсуждение не привело участников дискуссии к согласию, однако позволило, по мнению автора, локализовать и прояснить предмет раз-

ногласий. Это поможет сделать дальнейшее обсуждение более сфокусированным. Поскольку вопрос вызвал интерес и других специалистов, считаю полезным продолжить его публичное обсуждение.

Сначала комментарий о терминологии (обсуждение терминологии не решает вопросов по существу, но способно прояснить предмет спора). В Стандартах (например, [2, 3]) принято говорить об «одноопорных» и «многоопорных» системах. В буквальном смысле слова это разграничение, на мой взгляд, в наши дни устарело: времена одноопорных «шашлычных» консольных моделей сооружений давно ушли в прошлое. С точки зрения количества опор – т.е. узлов моделей, на которые подается кинематическое возбуждение при расчете на сейсмические воздействия в абсолютных перемещениях, – практически все современные модели сооружений являются многоопорными. Автор в [4] предложил термин «платформенные модели», понимая под «платформой» в широком смысле слова как раз множество узлов, движение которых задается в качестве кинематического воздействия на систему. Почему понадобился новый термин, почему просто не оставить термин «многоопорные»? Потому, что множество рассматриваемых опор не обязательно конечное или даже счетное, – это может быть некоторая сплошная поверхность, которую не обязательно дискретизировать конечной сеткой. Определение «много» для точек сплошной поверхности, на мой взгляд, не совсем удачно. Впрочем, чтобы не сбивать фокус дискуссии, автор в данной статье будет говорить не о движении платформы, а о движении некоторого множества опор.

Реальное разграничение расчетных схем проходит сегодня не по количеству опор с заданным их движением, а по характеру этого задаваемого движения. Движение опор, задаваемое расчетчиком, может быть либо «жестким», либо «нежестким». В первом случае движение всех опор определяется движением одной «контрольной» точки (в общем случае по шести степеням свободы), а также положением всех опор в пространстве относительно этой «контрольной» точки. Если движение контрольной точки чисто поступательное, то «жесткое» движение всех опор будет просто повторять движение контрольной точки по всем трем поступательным направлениям. Но «жесткое» движение может быть и вращательным – в этом случае движение опор будет не просто иметь угловые компоненты (одинаковые для всех опор), но поступательные перемещения разных опор будут разными: поступательные движения каждой опоры будут зависеть от координат этой опоры. Ситуация с жестким движением опор близка к одноопорной ситуации: действительно, можно мысленно связать все опоры невесомыми абсолютно жесткими балками с «контрольной точкой» и задавать движение только в ней, как в единственной опоре, – от этого физически ничего не изменится.

Понятно, что у одноопорной системы движение единственной опоры всегда «жесткое». Для многоопорной системы ситуации на практике бывают разными. В сейсмических расчетах большинства сооружений движение опор принимается «жестким» (при этом фундамент сооружения может быть податливым, а опоры системы «сооружение-основание» могут располагаться под грунтовыми пружинами). Однако имеются и исключения – скажем, движение разных опор мостов обычно не задается «жестким». Похожая ситуация у российских атомщиков возникает с т.н. «транспортным порталом» - специальной конструкцией, опирающейся с одной стороны на здание реакторного отделения, а с другой стороны – на П-образную конструкцию (собственно портал), стоящую на отдельном фундаменте. Фундамент портала не связан жестко с фундаментом реакторного отделения, так что движение опор такой конструкции не является жестким. Еще один пример «нежесткого» движения опор – трубопровод, раскрепленный на разных отметках сооружения.

Исторически сложилось так, что когда, к примеру, в Стандартах [2, 3] говорится о «многоопорных системах», в реальности речь идет не о количестве опор, а именно о «многоопорных системах с нежестким движением опор». Этот нюанс терминологии полезно помнить.

Ситуации с жестким и нежестким движением опор различаются по важному признаку. В каждый момент времени можно определить квазистатическое перемещение всей системы «вместе с опорами» - как для жесткого, так и для нежесткого движения опор. Если движение опор жесткое, то принципиально важно, что это перемещение системы в целом тоже будет «жестким». Система получит перемещения (в общем случае включающие и повороты), но не получит деформаций – она будет двигаться как жесткое целое. Внутренние усилия при таких перемещениях будут нулевыми как раз из-за нулевых деформаций. Принципиально важно также отметить, что при нулевых деформациях нулевыми будут не только усилия, порождаемые жесткостью конструкций, но и усилия, порождаемые внутренним демпфированием в системе, независимо от его природы (к примеру, от того, вязкое или гистерезисное демпфирование рассматривается в расчетах).

Если движение опор нежесткое, то в каждый момент времени тоже можно вычислить квазистатическое (определяемое только жесткостью системы и перемещениями опор) движение системы вместе с опорами. Однако в этом движении система будет не только поступательно смещаться и поворачиваться как жестко целое, но еще и деформироваться. В общем случае эти деформации будут зависеть от времени, так что появятся внутренние усилия от внутреннего демпфирования (и от жесткости конструкций, разумеется).

При правильном моделировании должен реализоваться физически очевидный предельный переход: если в качестве специального частного случая «нежесткого» движения опор задать «жесткое» движение тех же опор, то в системе при квазистатических перемещениях вместе с опорами должны исчезнуть внутренние усилия - как от жесткостей конструкций, так и от внутреннего демпфирования.

Эти соображения представляются физически очевидными. Теперь вернемся к сути дискуссии о роли демпфирования в сейсмических нагрузках. Напомним о введенных в [1] обозначениях. Полный столбец абсолютных перемещений узлов системы U^+ состоит из двух частей: столбца U перемещений неопорных узлов и столбца U_b перемещений опорных узлов:

$$\left[U^+(t)\right]=\begin{bmatrix}U(t)\\ U_b(t)\end{bmatrix} \tag{1}$$

Вводится столбец R^+ квазистатических перемещений системы «вместе с опорами». Этот столбец также состоит из двух частей:

$$\left[R^+(t)\right]=\begin{bmatrix}R(t)\\ R_b(t)\end{bmatrix} \tag{2}$$

Выражение «вместе с опорами» означает, что $R_b=U_b$. В отличие от [1], будем в данной статье считать перемещение опор «нежестким». Поскольку это квазистатические перемещения, можно записать статическое уравнение равновесия для неопорных узлов в каждый момент времени

$$K\,R=-K_{sb}\,R_b \tag{3}$$

Здесь K_{sb} – верхний недиагональный блок полной матрицы жесткости K^+, связывающий неопорные узлы с опорными узлами; K – верхний диагональный блок полной матрицы жесткости системы K^+, относящийся к неопорным узлам.

Относительные перемещения X^+ введем как разницу между абсолютными перемещениями U^+ и квазистатическими перемещениями R^+:

$$X^{+}(t)=U^{+}(t)-R^{+}(t)=\begin{bmatrix}X(t)\\X_b(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U(t)-R(t)\\U_b(t)-R_b(t)\end{bmatrix} \tag{4}$$

Из принятого выше условия движения «вместе с опорами» следует, что

$$X_b(t)=0.$$

Повторим вывод уравнений движения из [1], учитывая на этот раз «нежесткость» движения опор. Как и в [1], уравнение движения рассматриваемой линейной системы в неподвижной системе координат и в абсолютных перемещениях имеет вид

$$\left[M^{+}\right]\left[\ddot{U}^{+}(t)\right]+\left[C^{+}\right]\left[\dot{U}^{+}(t)\right]+\left[K^{+}\right]\left[U^{+}(t)\right]=\left[Q^{+}(t)\right] \tag{5}$$

Нетривиальным здесь является только вектор внешних сил $Q(t)$. Физическая природа его проста: для всех узлов, не относящихся к опорным, его элементы равны нулю (на неопорные узлы внешние силы не действуют), а для опорных узлов внешние силы должны быть такими, чтобы обеспечить ранее заданное движение этих узлов [$U_b(t)$]. Таким образом,

$$\left[Q^{+}(t)\right]=\begin{bmatrix}0\\Q_b(t)\end{bmatrix} \tag{6}$$

Как мы увидим дальше, определять этот вектор более детально нам и не понадобится, поскольку движение опорных узлов известно до расчета системы (оно задано в качестве кинематического возбуждения).

Теперь начнем преобразовывать уравнение (5). Сначала используем разложение (4) полных перемещений U^{+} в сумму квазистатических перемещений R^{+} и относительных перемещений X^{+}. Относительные перемещения и их производные по времени оставим в левой части, а квазистатические перемещения и их производные по времени перенесем в правую часть уравнения:

$$\begin{gathered}\left[M^{+}\right]\left[\ddot{X}^{+}(t)\right]+\left[C^{+}\right]\left[\dot{X}^{+}(t)\right]+\left[K^{+}\right]\left[X^{+}(t)\right]=\\=\left[Q^{+}(t)\right]-\left[M^{+}\right]\left[\ddot{R}^{+}(t)\right]-\left[C^{+}\right]\left[\dot{R}^{+}(t)\right]-\left[K^{+}\right]\left[R^{+}(t)\right]\end{gathered} \tag{7}$$

Сразу сделаем следующий шаг – отбросим в матричной системе (7) последние уравнения, относящиеся к движению опорных узлов. Главное для нас – аккуратно учесть все члены в оставшихся уравнениях. В левой части (7) нижняя часть столбца относительных перемещений вместе с их производными по времени тождественно равна нулю – в матричных произведениях она не даст вклада в оставшиеся уравнения. Это означает, что в левой части (7) мы можем просто убрать верхний индекс «+» как во всех трех матрицах, так и в столбцах, на которые они умножаются. Это соответствует уменьшению размера матриц и столбцов. Теперь обратимся к правой части (7). В первом слагаемом верхняя часть столбца внешних сил [Q^{+}], как указывалось выше в формуле (6), равна нулю (неопорные узлы не нагружены внешними силами). Нижняя ненулевая часть столбца внешних сил Q_b при сокращении размера системы просто выбрасывается вместе с соответствующими уравнениями, так что этот слагаемый в правой части после сокращения системы исчезает. Последний слагаемый в правой части (7) после отбрасывания последних уравнений тоже окажется равен нулю в силу квазистатического уравнения равновесия (3) – читатель может сам расписать это матричное произведение по блокам. Остальные слагаемые в правой части (7) придется просто честно расписать по правилам матричного умножения. В итоге получится новое матричное уравнение движения с уменьшенными размерами всех матриц и столбцов:

$$\begin{gathered}[M]\left[\ddot{X}(t)\right]+[C]\left[\dot{X}(t)\right]+[K]\left[X(t)\right]=\\=-\left([M]\left[\ddot{R}\right]+\left[M_{sb}\right]\left[\ddot{R}_b\right]\right)-\left([C]\left[\dot{R}\right]+\left[C_{sb}\right]\left[\dot{R}_b\right]\right)\end{gathered} \tag{8}$$

Пока преобразования были чисто формальными и потому математически точными. Несложно показать, что они с точностью до обозначений соответствуют формулам, приведенным в статье В.А.Семенова и др. [5]. Для полной аналогии достаточно выразить квазистатические перемещения неопорных узлов R через перемещения опорных узлов R_b с использованием уравнения (3):

$$R = T\,R_b;\quad T = -K^{-1}K_{sb} \tag{9}$$

После этого уравнение движения (8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&[M]\left[\ddot{X}(t)\right]+[C]\left[\dot{X}(t)\right]+[K]\left[X(t)\right]=\\&=-([M][T]+[M_{sb}])\left[\ddot{R}_b\right]-([C][T]+[C_{sb}])\left[\dot{R}_b\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Это уравнение по форме полностью соответствует уравнению из [5].

Но с этого места как раз и начинаются разногласия. Автор этих строк убежден и продолжает настаивать на том, что в случае «жесткого» перемещения опор R_b последний слагаемый в круглых скобках в правой части (8) должен быть равен нулю. В.А.Семенов соглашается с этим для частного случая, когда демпфирование пропорционально жесткости. Но автор уверен, что на самом деле пропорциональность демпфирования жесткости здесь не причем. Дело в принципе: если перемещения опор R_b жесткие, то и перемещения неопорных узлов R, как указывалось в начале статьи, тоже жесткие. В этом случае в последнем слагаемом в круглых скобках в правой части (8) мы видим просто первые строки матричного произведения полной матрицы демпфирования $[C^+]$ на полный столбец жестких скоростей (состоящий из жестких скоростей как неопорных, так и опорных узлов). Это матричное произведение равно нулю по физическим соображениям в силу самого определения внутреннего демпфирования – еще до рассмотрения любых механизмов и моделей демпфирования.

Автор предлагает читателю ввести в любую реальную модель многоопорной системы любое множество вязких демпферов с любыми параметрами (не пропорциональными параметрам жесткости) между любыми узлами, расписать матрицу демпфирования через вязкости введенных демпферов и убедиться в том, что при жестких перемещениях опор второй слагаемый в круглых скобках в правой части (8) всегда равен нулю.

Таким образом, само по себе уравнение (8) при физичных моделях демпфирования, как и положено, обеспечивает тот самый предельный переход от нежесткого движения к жесткому движению опор, о котором говорилось выше. К уравнению (8) (и к уравнению (10) как к его следствию) у автора претензий нет – претензии появляются на следующем шаге. В.А.Семенов после вывода аналога уравнения (10) еще до предельного перехода к жесткому движению опор вводит в правую часть уравнения (10) рэлеевскую модель демпфирования, т.е. известное конкретное выражение для матрицы демпфирования

$$[C^+] = \alpha\,[M^+] + \beta\,[K^+] \tag{11}$$

Именно после этого за счет нефизичности модели Рэлея, о которой автор писал в [1], оказывается, что предельный переход к жесткому движению опор уже «испорчен». Второй слагаемый в круглых скобках в правой части (8) даже после перехода к жесткому движению опор теперь в ноль не обращается из-за работы матрицы масс в (11) на жестких перемещениях (в этом, собственно, и заключается нефизичность модели Рэлея). Как следствие, в наиболее распространенных случаях жесткого движения опор при сейсмических расчетах типичных сооружений возникают дополнительные составляющие сейсмической нагрузки, которые требуют изменения армирования и пр. По мнению автора этих строк, это чисто паразитический эффект, связанный только с нефизичностью модели Рэлея. Его ничего не стоит избежать в случае жесткого движения опор, просто вычеркнув второй слагаемый в круглых скобках из правой части (8) до конкретизации модели внутреннего демпфирования. Рэлеевскую модель демпфирования при желании можно использовать, но только в левой части уравнения движения (8). Таким образом, отсутствие демпфирования в правых частях уравнений движения в Стандартах [2,3] – вовсе не «наследие старины» (в отличие от отсутствия недиагонального блока матрицы масс в первом слагаемом в правой части (8)); оно физически обосновано для типичного случая, когда движение опор «жесткое».

Но что делать в тех не очень частых случаях, когда движение опор все-таки нежесткое (см. примеры, приведенные выше)? Ведь в этих случаях демпфирование действительно физически влияет на нагрузки в правой части уравнения движения! Автор считает, что использовать модель Рэлея в правой части (8) и в таких случаях тоже некорректно; он в подобных случаях обращается к расчету в частотном диапазоне (это расчет с использованием преобразования Фурье; не путать с линейно-спектральным расчетом!), где материальное демпфирование задается комплексным модулем упругости. Влияние демпфирования на нагрузки в таком случае действительно существует и учитывается в расчетах, но не по модели Рэлея. Но количество таких случаев, повторим, не очень велико – сейчас важнее решить, что мы делаем в массовых типовых расчетах с жестким движением опор. Именно об этом идет дискуссия.

Автор готов свернуть дискуссию и публично извиниться перед оппонентами в том случае, если кто-то продемонстрирует на любом примере ненулевой вклад внутреннего демпфирования в динамические нагрузки в правой части уравнения движения при жестком движении опор, используя любую физичную модель демпфирования (например, некую систему вязких демпферов, пластичных демпферов и т.п.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тяпин А.Г.** О роли демпфирования в динамических нагрузках в расчетах на сейсмические воздействия // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. №1. (В печати),
2. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.
3. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE/SEI 4-16. Reston, Virginia, USA. 2017.
4. **Тяпин А.Г.** Платформенные модели в задачах учета взаимодействия сооружений с основанием при расчетах на сейсмические воздействия. – М.: АСВ, 2015. – 208 с.
5. **Семенов В.А., Лебедев В.Л., Солдатов А.Ю.** Об учете демпфирования при расчетах пространственных сооружений на сейсмические воздействия // Справочник. Инженерный журнал, 2013, №5, с. 12-20.

REFERENCES

1. **Tiapin A.G.** O Roli Dempfirovaniia v Dinamicheskikh Nagruzkakh v Raschetakh Na Seismicheskie Vozdeistviia [On the Role of Damping in Dynamic Loads in Seismic Analysis]. // Seismostoikoe stroitel'stvo, Bezopasnost' sooruzhenii, 2018, No. 1 (In press).
2. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.
3. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE/SEI 4-16. Reston, Virginia, USA. 2017.
4. **Tiapin A.G.** Platformennye Modeli v Zadachakh Ucheta Vzaimodeistviia Sooruzhenii s Osnovaniem pri Raschetakh na Seismicheskie Vozdeistviia [Platform Models in Problems of Accounting for the Interaction of Structures with a Foundation in

Seismic Analysis]. Moscow, ASV, 2015, 208 pages.

5. **Semenov V.A., Lebedev V.L., Soldatov A.Iu.** Ob Uchete Dempfirovaniia pri Raschetakh Prostranstvennykh Sooruzhenii na Seismicheskie Vozdeistviia [About Allowance for Damping in Seismic Analysis of Spatial Structures]. // Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal, 2013, No. 5, pp. 12-20.

Тяпин Александр Георгиевич, доктор технических наук; главный специалист, АО «Атомэнергопроект»; Россия, 121352, Москва, Славянский бульвар, 1-119, тел.+7(985)998-33-21, e-mail: atyapin@bvcp.ru.

Alexander G. Tyapin, Doctor of Technical Sciences, Chief Specialist, JSC “Atomenergoproject”; 1-119, Slavyanskyi Bulvar, Moscow, 121352, Russia;
phone +7(985)998-33-21, e-mail: atyapin@bvcp.ru.