

ЛОКАЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСА

М.Л. Мозгалева¹, П.А. Акимов^{2,3,4,5,6}, Д.Ф. Семин¹

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ

⁴ Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

⁵ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается двухсеточный метод расчета строительных конструкций на основе использования гибридного дискретного вейвлет-базиса, причем соответствующее изложение проводится для простейших одномерных задач. Описаны аппроксимации сеточных функций в выбранном базисе и схема построения двухсеточного метода решения, рассмотрен одномерный пример решения краевой задачи строительной механики (численное решение краевой задачи о поперечном изгибе балки Бернулли).

Ключевые слова: двухсеточный метод, краевая задача, вейвлет-анализ, дискретный вейвлет-базис, численное решение, аппроксимация

LOCAL NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS WITH THE USE OF HYBRID DISCRETE WAVELET BASIS

Marina L. Mozgaleva¹, Pavel A. Akimov^{2,3,4,5,6}, Dmitry F. Semin¹

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

⁴ Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

⁵ Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁶ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to the two-grid method of structural analysis based on hybrid discrete wavelet basis (in particular, the simplest one-dimensional problems are under consideration). Approximations of the mesh functions in this basis, general idea of the two-grid method and one-dimensional numerical example of beam analysis are presented.

Keywords: two-grid method, boundary problem, wavelet analysis, discrete wavelet basis, numerical solution, approximation

ВВЕДЕНИЕ

Разработка, исследование и верификация методов расчета строительных конструкций остаются актуальными задачами, поскольку

в этом существует постоянная практическая необходимость. Так, например, характерной особенностью последних десятилетий в строительстве является все больший объем работ, связанный с реконструкцией и пере-

делкой старых зданий. Очевидно, что в соответствующих ситуациях существует опасность, что непроверенные корректным расчетом конструктивные изменения приведут к возникновению аварийной ситуации. Разумеется, существуют и другие тенденции, например, резкое увеличение строительства домов по индивидуальным проектам с использованием нестандартных строительных материалов и конструктивных решений, связанных с реальными условиями и желаниями заказчика. Еще одним фактором, стимулирующим развитие численных и численно-аналитических методов, в настоящее время являются особенности развития вычислительной техники. Это в первую очередь резкое увеличение парка высокопроизводительных персональных ЭВМ с развитым программным обеспечением. Следует также отметить и развитие математических средств, обеспечивающее повышение эффективности методов в значительной большей мере, чем даже непосредственно техническое развитие вычислительной техники (ЭВМ).

Известная история развития численных методов показывает, что основной тенденцией является построение алгоритмов, позволяющих рассчитывать сложные конструкции в целом, что приводит к громадным вычислительным схемам. В тоже время опасной с позиции прочности является состояние в небольшом количестве зон, при этом, как правило, известных. Это, прежде всего, места концентраций (углы, щели, трещины, местастыковок элементов конструкций и т.д.), локальных изменений в строительном объекте при его реконструкции (пробивка новых проходов, снос опор, мешающих функциональному назначению сооружения и т.д.) или конструкции локальных усилий (стойки, подкрепляющие балки, металлические стяжки и т.д.). Очевидно, что во всех перечисленных случаях требуется адекватное расчетное обоснование, связанное именно с вышеперечисленными локальными изменениями [1-3].

В свою очередь, локальный расчет при правильном выборе реализующих численных и численно-аналитических методов может привести к вычислительным схемам, характеризующимся относительно небольшим количеством неизвестных. Это позволяет проводить локальные расчеты с большой точностью без применения сверхмощных ЭВМ. Высокоэффективным, динамично развивающимся в настоящее время инструментарием для проведения такого рода исследований является вейвлет-анализ [4-36]. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. При этом зачастую оказывается возможным построить не только более высококачественную расчетную модель, но и внести некоторые обоснованные конструктивные изменения.

1. ГИБРИДНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ БАЗИС

Будем рассматривать следующие функции:

– отцовский вейвлет (рис. 1.1 α)

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \vee x \geq 1; \end{cases} \quad (1.1)$$

– первый материнский вейвлет (рис. 1.1 β)

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/3 \\ -1, & 2/3 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \vee 1/3 \leq x < 2/3 \vee x \geq 1; \end{cases} \quad (1.2)$$

– второй материнский вейвлет – вариант «французской шляпы» (рис. 1 γ)

$$\Psi_2(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1/3 \vee 2/3 \leq x < 1 \\ 2, & 1/3 \leq x < 2/3 \\ 0, & x < 0 \vee x \geq 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

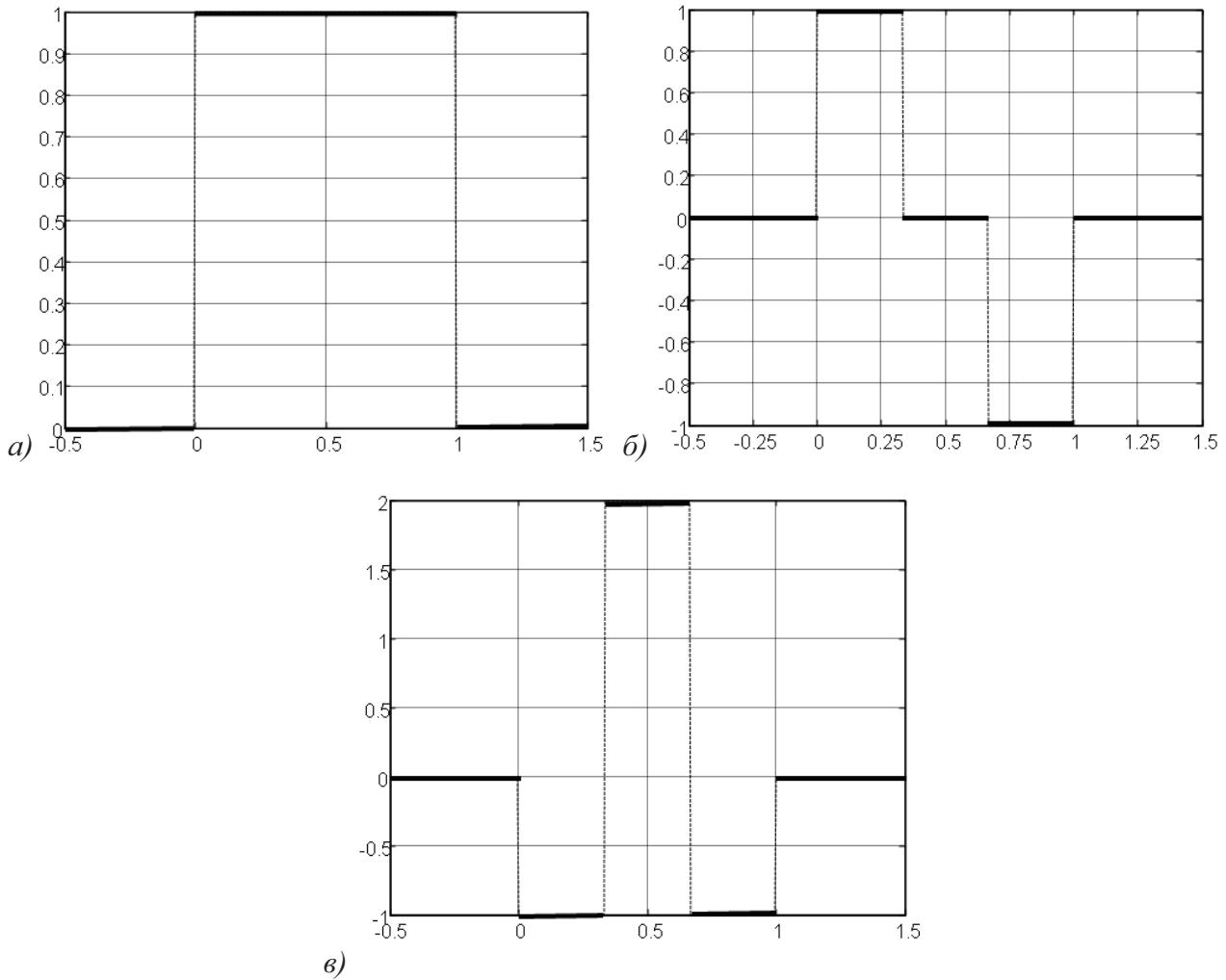


Рисунок 1.1. Функции гибридного дискретного базиса.

Матрица перехода с одного уровня на следующий уровень имеет ту же структуру, что и в базисе Хаара [12,18-21,26,27,30,31]

$$Q_G = \begin{bmatrix} Q & & \\ & \ddots & \\ & & Q \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где в случае Хаара

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

а в рассматриваемом случае

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & & \\ & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Обозначим семейство дискретных функций: $\{\bar{\psi}_j^p\}$, $j = 1, 2, \dots, N_p$, $p = 1, \dots, M$, M – количество уровней, $N = 3^M$ – размерность пространства,

$$\bar{\psi}_j^p = [\bar{\psi}_{1,j}^p \quad \bar{\psi}_{2,j}^p]^T, \quad 1 \leq p < M; \quad (1.7)$$

$$\psi_{1,j}^p(i) = \alpha_{1,p} \Psi_1 \left(\frac{i-0.5}{3^p} - (j-1) \right); \quad (1.8)$$

$$\psi_{2,j}^p(i) = \alpha_{2,p} \Psi_2 \left(\frac{i-0.5}{3^p} - (j-1) \right); \quad (1.9)$$

$$\bar{\psi}_1^M = [\bar{\psi}_{1,1}^M \quad \bar{\psi}_{2,1}^M \quad \bar{\phi}_1^M]^T, \quad (1.10)$$

где $\phi_1^M(i) = \alpha_M \Phi\left(\frac{i-0.5}{3^M}\right)$. (1.11)

где $N_p = N/3^p$ – количество $\bar{\psi}_{1,j}^p$ и $\bar{\psi}_{2,j}^p$ на p -ом уровне;

$$\alpha_p = 1/\sqrt{3^p}, \quad \alpha_{1,p} = 1/\sqrt{2^p}, \quad \alpha_{2,p} = 1/\sqrt{6^p}$$

(1.12)

– нормирующие множители.

Заметим, что поскольку $1/3$ не имеет конечного точного значения, для корректного вычисления используется выражение

$$\frac{i-0.5}{3^p} \quad \text{вместо} \quad \frac{i-1}{3^p}.$$

Представленная таким образом совокупность $\{\bar{\psi}_j^p\}$ является базисом в N -мерном векторном пространстве. Причем, такой базис будет ортонормированный.

Пусть задан вектор $\bar{u} \in R^N$, $\bar{u} = \{u_i\}_{1 \leq i \leq N}$.

Представим его разложение в базисе Хаара

$$\bar{u} = \sum_{p=1}^M \left(\sum_{j=1}^{N_p} (v_j^p \bar{\psi}_{1,j}^p + w_j^p \bar{\psi}_{2,j}^p) \right) + u_1^M \bar{\phi}_1^M, \quad (1.11)$$

где соответственно имеем

$$\begin{aligned} v_j^p &= (\bar{\psi}_{1,j}^p, \bar{u}), \quad w_j^p = (\bar{\psi}_{2,j}^p, \bar{u}), \\ u_1^M &= (\bar{\phi}_1^M, \bar{u}), \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \quad p = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

(1.12)

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим пример сеточного разбиения для $N = 9 = 3^2$, т.е. $M = 2$. Тогда расположение узлов по уровням можно представить в виде, представленном на рис. 2.1.

Формирование коэффициентов разложения на первом уровне ($k = 1, 2, 3$)

$$u_k^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{3k-2}^0 + u_{3k-1}^0 + u_{3k}^0) = \sqrt{3} \tilde{u}_k^0; \quad (2.1)$$

$$\tilde{u}_k^0 = \frac{1}{3} (u_{3k-2}^0 + u_{3k-1}^0 + u_{3k}^0) \quad (2.2)$$

– среднее значение;

$$\begin{aligned} v_k^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{3k-2}^0 - u_{3k}^0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} 2h \frac{u_{3k}^0 - u_{3k-2}^0}{2h} = \\ &- \sqrt{2} h (D_0 u^0)_{3k-1}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} w_k^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (-u_{3k-2}^0 + 2u_{3k-1}^0 - u_{3k}^0) = \\ &- \frac{1}{\sqrt{6}} h^2 \frac{u_{3k-2}^0 - 2u_{3k-1}^0 + u_{3k}^0}{h^2} = -\frac{h^2}{\sqrt{6}} (D^2 u^0)_{3k-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формирование коэффициентов разложения на втором уровне:

$$u_k^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_1^1 + u_2^1 + u_3^1); \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1^1 - u_3^1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} 6h \frac{u_3^1 - u_1^1}{6h} = \\ &- \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} 6h \frac{\tilde{u}_3^0 - \tilde{u}_1^0}{6h} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} 6h (D_0 \tilde{u}^0)_2; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} w_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (-u_1^1 + 2u_2^1 - u_3^1) = \\ &- \frac{1}{\sqrt{6}} (3h)^2 \frac{u_1^1 - 2u_2^1 + u_3^1}{(3h)^2} = \\ &- \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} (3h)^2 \frac{\tilde{u}_1^0 - 2\tilde{u}_2^0 + \tilde{u}_3^0}{(3h)^2} = \\ &- \frac{(3h)^2}{\sqrt{2}} (D^2 \tilde{u}^0)_2; \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для осреднения (редукции) полагаем

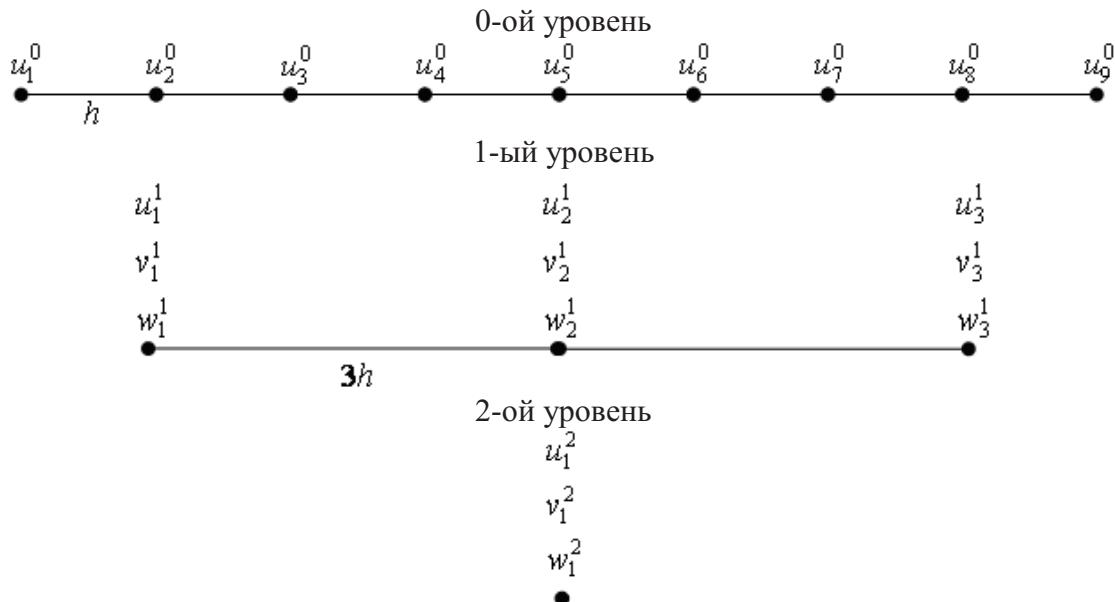


Рисунок 2.1. Схема осреднения сеточной функции.

$$(D_0 u^0)_{3k-1} = (D_0 \tilde{u}^0)_2, \quad k = 1, 2, 3; \quad (2.8)$$

$$(D^2 u^0)_{3k-1} = (D^2 \tilde{u}^0)_2, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

При этом можно отметить следующие зависимости

$$\begin{cases} (D_0 u^0)_{3k-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}h} v_k^1 \\ (D^2 u^0)_{3k-1} = -\frac{\sqrt{6}}{h^2} w_k^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_0 \tilde{u}^0)_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 6h} v_1^2 \\ (D^2 \tilde{u}^0)_2 = -\frac{\sqrt{2}}{(3h)^2} w_1^2; \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} v_k^1 = \frac{1}{3\sqrt{3}} v_1^2 \\ w_k^1 = \frac{1}{3^2 \sqrt{3}} w_1^2, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ СЕТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть задан отрезок длиной L . Нанесем на него одномерную сетку, состоящую из N узлов. Сеточную векторную функцию $\bar{u} = [u_1 \dots u_N]^T$ можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_0} u_j^0 \bar{\Phi}_j^0, \quad (3.1)$$

где $\bar{\Phi}_j^0$ – j -й вектор единичного базиса нулевого уровня, $1 \leq j \leq N_0 = N$;

$$\bar{\Phi}_j^0(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq N; \quad u_j^0 = u_j,$$

$$1 \leq j \leq N; \quad N_0 = N = 3^M. \quad (3.2)$$

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе первого уровня в следующем виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 + \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_{1,j}^1 + \sum_{j=1}^{N_1} w_j^1 \bar{\Psi}_{2,j}^1, \quad (3.3)$$

где соответственно имеем

$$u_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_j^1), \quad v_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{1,j}^1), \quad w_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{2,j}^1), \quad 1 \leq j \leq N_1; \quad N_1 = N/3; \quad (3.4)$$

$$\bar{u}^1 = [u_1^1 \dots u_{N_1}^1]^T; \quad (3.5)$$

$$\bar{v}^1 = [v_1^1 \dots v_{N_1}^1]^T; \quad (3.6)$$

$$\bar{w}^1 = [w_1^1 \dots w_{N_1}^1]^T; \quad (3.7)$$

$$\bar{\Phi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{3j-2}^0 + \bar{\Phi}_{3j-1}^0 + \bar{\Phi}_{3j}^0); \quad (3.8)$$

– j -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса первого уровня, $1 \leq j \leq N_1$;

$$\bar{\Psi}_{1,j}^1 = \alpha_1(\bar{\Phi}_{3j-2}^0 - \bar{\Phi}_{3j}^0); \quad (3.9)$$

$$\bar{\Psi}_{2,j}^1 = \alpha_2(-\bar{\Phi}_{3j-2}^0 + 2\bar{\Phi}_{3j-1}^0 - \bar{\Phi}_{3j}^0) \quad (3.10)$$

– j -е детализирующие векторы дискретного базиса первого уровня, $1 \leq j \leq N_1$;

$$\alpha = 1/\sqrt{3}; \quad \alpha_1 = 1/\sqrt{2}; \quad \alpha_2 = 1/\sqrt{6}. \quad (3.11)$$

Исходя из представления (3.3) сеточная функция \bar{u} представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке первого уровня, состоящей из N_1 узлов, а второе и третье слагаемые называются детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке первого уровня. Представление (3.3) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0 + \bar{w}_1^0; \quad (3.12)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u} = \Phi_1 \bar{u}^1; \quad (3.13)$$

$$\bar{v}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_{1,j}^1 = \Psi_{1,1} \Psi_{1,1}^T \bar{u} = \Psi_{1,1} \bar{v}^1; \quad (3.14)$$

$$\bar{w}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} w_j^1 \bar{\Psi}_{2,j}^1 = \Psi_{2,1} \Psi_{2,1}^T \bar{u} = \Psi_{2,1} \bar{w}^1, \quad (3.15)$$

где соответственно имеем

$$\Phi_1 = [\bar{\Phi}_1^1 \dots \bar{\Phi}_{N_1}^1]; \quad (3.16)$$

$$\Psi_{1,1} = [\bar{\Psi}_{1,1}^1 \dots \bar{\Psi}_{1,N_1}^1]; \quad (3.17)$$

$$\Psi_{2,1} = [\bar{\Psi}_{2,1}^1 \dots \bar{\Psi}_{2,N_1}^1] \quad (3.18)$$

– матрицы размером $N \times N_1$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса первого уровня.

В силу ортонормированности базиса операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T; \quad (3.19)$$

$$P_{\Psi,1} = \Psi_{1,1} \Psi_{1,1}^T; \quad P_{\Psi,2} = \Psi_{2,1} \Psi_{2,1}^T \quad (3.20)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке первого уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

4. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ДВУХСЕТОЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ

Пусть система линейных алгебраических уравнений порядка N

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (4.1)$$

является дискретным аналогом некоторого операторного уравнения, определенного на заданном отрезке.

Подставим в (4.1) выражение для u в виде (3.12). И умножим поочередно обе стороны равенства слева на Φ_1^T , $\Psi_{1,1}^T$ и $\Psi_{2,1}^T$, т.е. [...]

$$\Phi_1^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Phi_1^T A \Psi_{1,1} \bar{v}^1 + \Phi_1^T A \Psi_{2,1} \bar{w}^1 = \Phi_1^T \bar{f}$$

$$\Psi_{1,1}^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_{1,1}^T A \Psi_{1,1} \bar{v}^1 + \Psi_{1,1}^T A \Psi_{2,1} \bar{w}^1 = \Psi_{1,1}^T \bar{f}$$

$$\Psi_{2,1}^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_{2,1}^T A \Psi_{1,1} \bar{v}^1 + \Psi_{2,1}^T A \Psi_{2,1} \bar{w}^1 = \Psi_{2,1}^T \bar{f}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} A_{1,1}\bar{u}^1 + A_{1,2}\bar{v}^1 + A_{1,3}\bar{w}^1 &= \bar{f}_u \\ A_{2,1}\bar{u}^1 + A_{2,2}\bar{v}^1 + A_{2,3}\bar{w}^1 &= \bar{f}_v \\ A_{3,1}\bar{u}^1 + A_{3,2}\bar{v}^1 + A_{3,3}\bar{w}^1 &= \bar{f}_w, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где соответственно имеем

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \Phi_1^T A \Phi_1; & A_{1,2} &= \Phi_1^T A \Psi_{1,1}; \\ A_{1,3} &= \Phi_1^T A \Psi_{2,1}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= \Psi_{1,1}^T A \Phi_1; & A_{2,2} &= \Psi_{1,1}^T A \Psi_{1,1}; \\ A_{2,3} &= \Psi_{1,1}^T A \Psi_{2,1}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} A_{3,1} &= \Psi_{2,1}^T A \Phi_1; & A_{3,2} &= \Psi_{2,1}^T A \Psi_{1,1}; \\ A_{3,3} &= \Psi_{2,1}^T A \Psi_{2,1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

– блочные матрицы размером $N_1 \times N_1$

$$\bar{f}_u = \Phi_1^T \bar{f}; \quad \bar{f}_v = \Psi_{1,1}^T \bar{f}; \quad \bar{f}_w = \Psi_{2,1}^T \bar{f} \quad (4.6)$$

– векторы правой части размером N_1 .

Находим решение системы (4.2), используя блочный метод Гаусса.

Расширенная матрица

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \bar{f}_u \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \bar{f}_v \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \bar{f}_w \end{array} \right]$$

Выполняем прямой ход. Первый шаг:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \bar{f}_u \\ 0 & A_{2,2}^1 & A_{2,3}^1 & \bar{f}_v^1 \\ 0 & A_{3,2}^1 & A_{3,3}^1 & \bar{f}_w^1 \end{array} \right],$$

где соответственно имеем

$$\begin{aligned} A_{2,2}^1 &= A_{2,2} - C_{2,1}A_{1,2}; & A_{2,3}^1 &= A_{2,3} - C_{2,1}A_{1,3}; \\ \bar{f}_v^1 &= \bar{f}_v - C_{2,1}\bar{f}_u; & C_{2,1} &= A_{2,1}A_{1,1}^{-1}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} A_{3,2}^1 &= A_{3,2} - C_{3,1}A_{1,2}; & A_{3,3}^1 &= A_{3,3} - C_{3,1}A_{1,3}; \\ \bar{f}_w^1 &= \bar{f}_w - C_{3,1}\bar{f}_u; & C_{3,1} &= A_{3,1}A_{1,1}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Второй шаг:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \bar{f}_u \\ 0 & A_{2,2}^1 & A_{2,3}^1 & \bar{f}_v^1 \\ 0 & 0 & A_{3,3}^2 & \bar{f}_w^2 \end{array} \right],$$

где соответственно имеем

$$\begin{aligned} A_{3,3}^2 &= A_{3,3}^1 - C_{3,2}A_{2,3}^1; & \bar{f}_w^2 &= \bar{f}_w^1 - C_{3,2}\bar{f}_v^1; \\ C_{3,2} &= A_{3,2}^1(A_{2,2}^1)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выполняем обратный ход:

$$\begin{aligned} \bar{w}^1 &= (A_{3,3}^2)^{-1}\bar{f}_w^2 \\ \bar{v}^1 &= (A_{2,2}^1)^{-1}(\bar{f}_v^1 - A_{2,3}^1\bar{v}^1) \\ \bar{u}^1 &= A_{1,1}^{-1}(\bar{f}_u - A_{1,2}\bar{v}^1 - A_{1,3}\bar{w}^1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тогда, следуя формулам (3.12)-(3.15), решение исходной задачи (4.1) получаем в виде:

$$\bar{u} = \Phi_1^T \bar{u}^1 + \Psi_{1,1}^T \bar{v}^1 + \Psi_{2,1}^T \bar{w}^1, \quad (4.11)$$

при этом следует отметить, что предложенный алгоритм позволяет получить решение, оперируя матричными операторами размерности

$$N_1 = N / 3.$$

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА – ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ

В качестве модельного примера рассмотрим балку на упругом основании со следующими параметрами (рис. 5.1a): $L = 8$ м – длина; $h = 1.3$ м, $b = 1$ м – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м² – модуль упругости; $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке,

$$P_h = 100/h_b;$$

$k = 75 \cdot 10^3$ кН/м³ – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера;

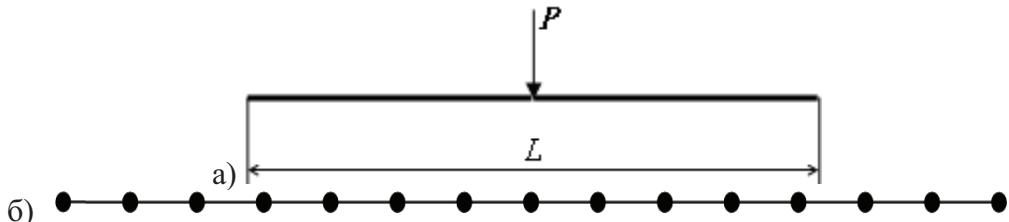


Рисунок 5.1. К постановке задачи.

$$\bar{k} = kb, \quad J = bh^3 / 12.$$

Определение прогиба балки Бернулли сводится к решению краевой задачи:

$$y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x), \quad 0 < x < L; \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \text{ — краевые условия, (5.2)}$$

где соответственно имеем

$$4\alpha^4 = \bar{k} / EJ; \quad F = (P/(EJ))\delta(x - L/2). \quad (5.3)$$

Для получения дискретного решения задачи разбиваем отрезок $(0, L)$ на равные части с шагом h_b (рис. 5.1б). Если n — общее количество точек, то очевидно, что

$$h_b = L/(n-1). \quad (5.4)$$

Далее переходим от решения краевой задачи (5.1)-(5.2) к решению системы разностных уравнений $A\bar{y} = \bar{f}$, подробно представленных с учетом краевых условий (5.2) в виде:

$$i = 1: \quad y_1 = f_1$$

$$i = 2:$$

$$-2y_1 + (5 + 4h_b^4\alpha^4)y_2 - 4y_3 + y_4 = f_2$$

$$2 < i < n-1:$$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 4h_b^4\alpha^4)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i$$

$$i = n-1:$$

$$y_{n-3} - 4y_{n-2} + (5 + 4h_b^4\alpha^4)y_{n-1} - 2y_n = f_{n-1}$$

$$i = n: \quad y_n = f_n,$$

(5.5)

где соответственно имеем

$$\begin{aligned} x_i &= h_b(i-1); \quad y_i = y(x_i); \\ f_i &= \begin{cases} 0, & i = 1 \vee i = n \\ h_b^4[F(x_i)/h_b], & 2 \leq i \leq n-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

По результатам расчета при $N = 27$ построены сравнительные графики прогибов. На рис. 5.2 приведено сравнение непосредственного решения системы (5.5) y и $u0$, построенного по формуле (4.11). Следует отметить, что получено полное совпадение результатов.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016-2017 годы, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

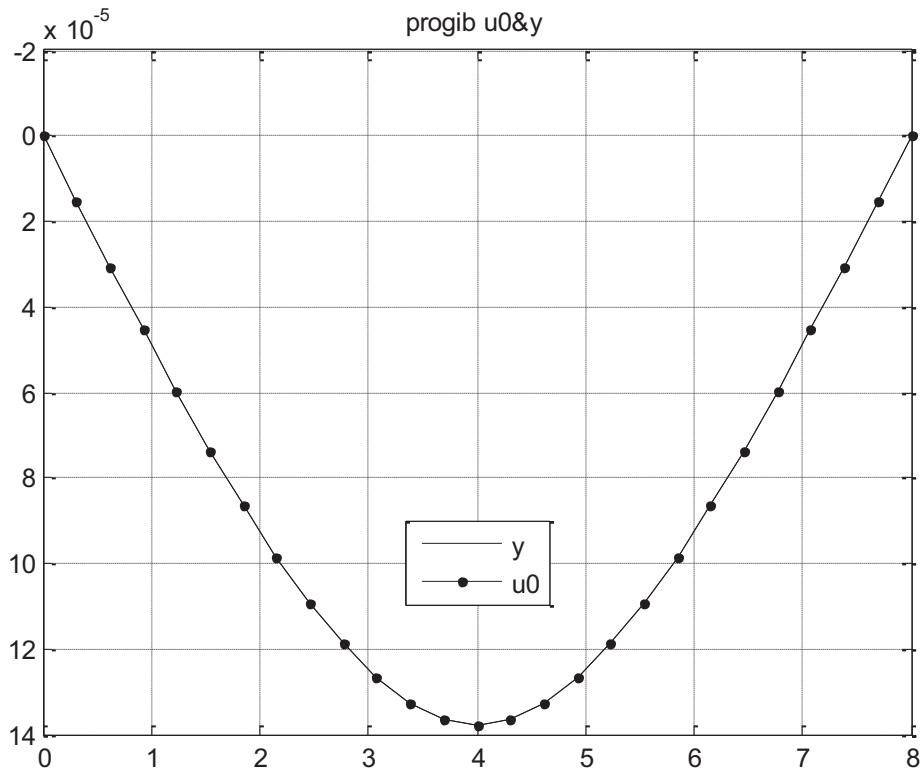


Рисунок 5.2. Сравнение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Двухсосточечный метод расчета строительных конструкций на основе использования дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 128-139.
2. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** Theoretical Foundations of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 2924-2927.
3. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** About Verification of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 3013-3016.
4. **Al-Bayati A.Y., Ibraheem K.I., Ghatheth A.I.** A Modified Wavelet Algorithm to Solve BVPs with An Infinite Number of Boundary Conditions. // Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 4, No. 2, 2011.
5. **Alvarez Diaz L., Vampa V., Martin M.T.** The Construction of Plate Finite Elements Using Wavelet Basis Functions. // Revista Investigacion Operacional, Vol. 30, No. 3, 2009, pp. 193-204.
6. **Amaratunga K., Williams J.R., Qian S., Weiss J.** Wavelet-Galerkin Solutions for One-Dimensional Partial Differential Equations. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
7. **Awrejcewicz J., Krysko A.V.** Wavelets-based Analysis of Parametric Vibrations of Flexible Plates. // International Applied Mechanics. Vol. 39, No. 9, 2003, pp. 997-1028.
8. **Cattani C.** Haar Wavelet Spline. // J. Interdisciplinary Math. 4, 2001, pp. 35-47.
9. **Chen X., Yang S., Ma J., He Z.** The Construction of Wavelet-Finite Element and its Application. // Finite Elements in Analysis and Design, 40, 2004, pp. 541-554.

10. **Daubechies I.** Recent Results in Wavelet Applications. // J. Electron. Imaging, 1998, 7, pp. 719-724.
11. **Fazal-i-Haq, Arshed A.** Numerical Solution of Fourth Order Boundary-Value Problems Using Haar Wavelets. // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, N. 63, pp. 3131-3146.
12. **Fazal-i-Haq, Imran A., Siraj-ul-Islam.** A Haar Wavelets Based Numerical Method for Eightorder Boundary Problems. // International Journal of Mathematical and Computer Sciences, 6, 1, 2010, pp. 25-31.
13. **Glabisz W.** The Use of Walsh-Wavelets Packets in Linear Boundary Value Problems. // Comput. and Struct., 82, 2004, pp. 131-141.
14. **Glowinski R., Pan T.W., Wells R.O. Jr., Zhou X.** Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains. // Journal of Computational Physics, Volume 126, Issue 1, 1996, pp. 41-50.
15. **Gomes S., Cortina E.** Convergence Estimates for the Wavelet Galerkin Method. // Siam J. Numer. Anal., 33-1, 1996, pp. 149-161.
16. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Multivariable Wavelet Based Finite Element Method and its Application to Thick Plates. // Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, pp. 821-833.
17. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Spline Wavelet Finite-Element Method in Structural Mechanics. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66, 2006, pp. 166-190.
18. **Hariharan G.** Solving Finite Length Beam Equation by the Haar Wavelet Method. // International Journal of Computer Applications, Volume 9, No. 1, 2010, pp. 27-34.
19. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Approach to Linear Stiff Systems. // Mathematics and Computers in simulation, Vol. 64, 2004, pp. 561-567.
20. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Direct Method for Solving Variational Problems. // Mathematics and computers in simulation, 64, 2004, pp. 569-585.
21. **Hsiao C.H., Wang W.J.** Haar Wavelet Approach to Nonlinear Stiff Systems. // Math. Comput. Simulat, 57, 2001, pp. 347-353.
22. **Jaffard S.** Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. // SIAM J. Numer. Anal., 29, 1992, pp. 965-98.
23. **Jang G.-W., Kim J.E., Kim Y.Y.** Multiscale Galerkin Method Using Interpolation Wavelets for Two-Dimensional Elliptic Problems in General Domains. // Int. J. Numer. Meth. Eng. N2, 2004, T.59, pp. 225-253.
24. **Ko J., Kurdila A.J.** A Class of Finite Element Methods Based on Orthonormal Compactly Supported Wavelets. // Computational Mechanics, 1995, 16(4), pp. 235-244.
25. **Ko J., Kurdila A.J., Pilant M.S.** Triangular Wavelet Based Finite Elements Via Multivalued Scaling Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 146, 1997, pp. 1-17.
26. **Lepik U.** Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 2007, 56, 1, pp. 28-46.
27. **Lepik U.** Numerical Solution Of Differential Equations Using Haar Wavelets. // Math. and Comp. Simulation Vol. 68, 2005, pp. 127-143.
28. **Ma J., Xue J.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam Element. // Finite Element in Analysis and Design, 2003, 39, pp. 965-975.
29. **Ma J., Xue J., Yang S., He Z.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam element. // Finite Elements in Analysis and Design, 39, 2003, pp. 965-975.
30. **Majak J., Pohlak M., Eerme M.** Application of the Haar Wavelet Based Discretization Technique to Orthotropic Plate and Shell Problems. // Mechanics of Composite Materials, 45(6), 2009, pp. 631-642.
31. **Majak J., Pohlak M., Eerme M., Lepikult T.** Weak formulation based Haar wavelet method for solving differential

- equations. // Applied Mathematics and Computation, 211(2), 2009, pp. 488-494.
32. **Monasse P., Perrier V.** Orthonormal Wavelet Bases Adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions. // SIAM J. Math. Anal., 29(4), 1998, p. 1040-1065.
33. **Naldi G., Venini P.** Wavelet Analysis of Structures: Statics, Dynamics and Damage Identification. // Meccanica, 32, 1997, pp. 223-230.
34. **Qian S., Weiss J.** Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations. // J. Comput. Phys., 106, 1993, pp. 155-175.
35. **Vampa V., Alvarez Diaz L., Martin M.T.** Daubechies Wavelet Beam Element. // Meccanica Computacional, 26, 2007, pp. 654-666.
36. **Xu J., Shann W.** Galerkin Wavelets Methods for Two-Point Boundary Value Problems. // Numer. Math., 63, 1992, pp. 123-144.
- Solve BVPs with An Infinite Number of Boundary Conditions. // Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 4, No. 2, 2011.
5. **Alvarez Diaz L., Vampa V., Martin M.T.** The Construction of Plate Finite Elements Using Wavelet Basis Functions. // Revista Investigacion Operacional, Vol. 30, No. 3, 2009, pp. 193-204.
6. **Amaratunga K., Williams J.R., Qian S., Weiss J.** Wavelet-Galerkin Solutions for One-Dimensional Partial Differential Equations. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
7. **Awrejcewicz J., Krysko A.V.** Wavelets-based Analysis of Parametric Vibrations of Flexible Plates. // International Applied Mechanics. Vol. 39, No. 9, 2003, pp. 997-1028.
8. **Cattani C.** Haar Wavelet Spline. // J. Interdisciplinary Math. 4, 2001, pp. 35-47.
9. **Chen X., Yang S., Ma J., He Z.** The Construction of Wavelet-Finite Element and its Application. // Finite Elements in Analysis and Design, 40, 2004, pp. 541-554.
10. **Daubechies I.** Recent Results in Wavelet Applications. // J. Electron. Imaging, 1998, 7, pp. 719-724.
11. **Fazal-i-Haq, Arshed A.** Numerical Solution of Fourth Order Boundary-Value Problems Using Haar Wavelets. // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, N. 63, pp. 3131-3146.
12. **Fazal-i-Haq, Imran A., Siraj-ul-Islam.** A Haar Wavelets Based Numerical Method for Eightorder Boundary Problems. // International Journal of Mathematical and Computer Sciences, 6, 1, 2010, pp. 25-31.
13. **Glabisz W.** The Use of Walsh-Wavelets Packets in Linear Boundary Value Problems. // Comput. and Struct., 82, 2004, pp. 131-141.
14. **Glowinski R., Pan T.W., Wells R.O. Jr., Zhou X.** Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains. // Journal of Computational Physics, Volume 126, Issue 1, 1996, pp. 41-50.
15. **Gomes S., Cortina E.** Convergence Estimates

REFERENCES

1. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** Dvukhse-tochnyy Metod Rascheta Stroitelnykh Konstruktsiy na Osnove Ispolzovaniya Diskretnogo Bazisa Khaara. Chast 1: Odnomernyye Problemy [Two-Grid Method of Structural Analysis Based on Discrete Haar Basis. Part 1: One-Dimensional Problems]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 128-139
2. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** Theoretical Foundations of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 2924-2927.
3. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** About Verification of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 3013-3016.
4. **Al-Bayati A.Y., Ibraheem K.I., Ghatheth A.I.** A Modified Wavelet Algorithm to

- for the Wavelet Galerkin Method. // Siam J. Numer. Anal., 33-1, 1996, pp. 149-161.
16. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Multivariable Wavelet Based Finite Element Method and its Application to Thick Plates. // Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, pp. 821-833.
 17. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Spline Wavelet Finite-Element Method in Structural Mechanics. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66, 2006, pp. 166-190.
 18. **Hariharan G.** Solving Finite Length Beam Equation by the Haar Wavelet Method. // International Journal of Computer Applications, Volume 9, No. 1, 2010, pp. 27-34.
 19. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Approach to Linear Stiff Systems. // Mathematics and Computers in simulation, Vol. 64, 2004, pp. 561-567.
 20. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Direct Method for Solving Variational Problems. // Mathematics and computers in simulation, 64, 2004, pp. 569-585.
 21. **Hsiao C.H., Wang W.J.** Haar Wavelet Approach to Nonlinear Stiff Systems. // Math. Comput. Simulat, 57, 2001, pp. 347-353.
 22. **Jaffard S.** Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems. // SIAM J. Numer. Anal., 29, 1992, pp. 965-98.
 23. **Jang G.-W., Kim J.E., Kim Y.Y.** Multiscale Galerkin Method Using Interpolation Wavelets for Two-Dimensional Elliptic Problems in General Domains. // Int. J. Numer. Meth. Eng. N2, 2004, T.59, pp. 225-253.
 24. **Ko J., Kurdila A.J.** A Class of Finite Element Methods Based on Orthonormal Compactly Supported Wavelets. // Computational Mechanics, 1995, 16(4), pp. 235-244.
 25. **Ko J., Kurdila A.J., Pilant M.S.** Triangular Wavelet Based Finite Elements Via Multivalued Scaling Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 146, 1997, pp. 1-17.
 26. **Lepik U.** Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 2007, 56, 1, pp. 28-46.
 27. **Lepik U.** Numerical Solution Of Differential Equations Using Haar Wavelets. // Math. and Comp. Simulation Vol. 68, 2005, pp. 127-143.
 28. **Ma J., Xue J.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam Element. // Finite Element in Analysis and Design, 2003, 39, pp. 965-975.
 29. **Ma J., Xue J., Yang S., He Z.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam element. // Finite Elements in Analysis and Design, 39, 2003, pp. 965-975.
 30. **Majak J., Pohlak M., Eerme M.** Application of the Haar Wavelet Based Discretization Technique to Orthotropic Plate and Shell Problems. // Mechanics of Composite Materials, 45(6), 2009, pp. 631-642.
 31. **Majak J., Pohlak M., Eerme M., Lepikult T.** Weak formulation based Haar wavelet method for solving differential equations. // Applied Mathematics and Computation, 211(2), 2009, pp. 488-494.
 32. **Monasse P., Perrier V.** Orthonormal Wavelet Bases Adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions. // SIAM J. Math. Anal., 29(4), 1998, p. 1040-1065.
 33. **Naldi G., Venini P.** Wavelet Analysis of Structures: Statics, Dynamics and Damage Identification. // Meccanica, 32, 1997, pp. 223-230.
 34. **Qian S., Weiss J.** Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations. // J. Comput. Phys., 106, 1993, pp. 155-175.
 35. **Vampa V., Alvarez Diaz L., Martin M.T.** Daubechies Wavelet Beam Element. // Meccanica Computacional, 26, 2007, pp. 654-666.
 36. **Xu J., Shann W.** Galerkin Wavelets Methods for Two-Point Boundary Value Problems. // Numer. Math., 63, 1992, pp. 123-144.

Локальное численное решение краевых задач строительной механики с использованием гибридного дискретного вейвлет-базиса

матики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Shosse, Moscow, 129337, Russia;
phone/fax: +7(499) 183-59-94;
E-mail: KafedralIPM@mgsu.ru.

Акимов Павел Алексеевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук; главный научный секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета; главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; email: akimov@raasn.ru,
pavel.akimov@gmail.com.

Семин Дмитрий Федорович, аспирант кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26; тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: KafedralIPM@mgsu.ru.

Marina L. Mozgaleva, Dr.Sc., Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia;
phone/fax: +7(499) 183-59-94;
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr.Sc., Professor; Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA; Professor of Department of Applied Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building; Principal researcher of the Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63;
fax: +7 (495) 650-27-31;
E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com

Dmitry F. Semin, Ph.D. Student, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe