DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-128-140

ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ЧАСТЬ 1: ОДНОМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

М.Л. Мозгалева[1], П.А. Акимов[2,3,4,5,6]

[1] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[3] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
[4] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[5] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ
[6] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается двухсеточный метод расчета строительных конструкций на основе использования дискретного базиса Хаара (в частности, здесь рассматриваются простейшие одномерные задачи). Приведен краткий обзор публикаций последних лет российских и зарубежных специалистов, посвященных актуальным направлениям использования вейвлет-анализа в строительной механике, описаны аппроксимации сеточных функций в дискретных базисах Хаара нулевого и первого уровней (сеточная функция представляется в виде суммы, в которой одно слагаемое является ее аппроксимацией первого уровня, а второе слагаемое называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке первого уровня), построены проекторы на пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке первого уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, изложена схема построения двухсеточного метода, позволяющего получить решение краевых задач строительной механики, оперируя матричными операторами существенно меньшей размерности. Поясним, что в качестве дискретного аналога исходного операторного уравнения, определенного на заданном отрезке выступает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), сформированная в рамках метода конечных разностей или метода конечных элементов. Далее осуществляется переход к разрешающей СЛАУ, решаемой с использованием блочного метода Гаусса (производится соответственно прямой и обратный ход). В качестве характерного практически важного одномерного примера рассмотрено численное решение краевой задачи о поперечном изгибе балки Бернулли, лежащей на упругом основании, описываемом в рамках модели Винклера. Имеет место хорошая согласованность результатов, полученных предложенным методом и стандартным методом конечных разностей.

Ключевые слова: двухсеточный метод, метод конечных разностей, метод конечных элементов, вейвлет-анализ, дискретный базис Хаара, расчеты строительных конструкций, краевая задача, одномерные задачи

TWO-GRID METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS BASED ON DISCRETE HAAR BASIS PART 1: ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

Marina L. Mozgaleva[1], Pavel A. Akimov[2,3,4,5,6]

[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[3] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[4] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[5] Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

[6] Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to the two-grid method of structural analysis based on discrete Haar basis (in particular, the simplest one-dimensional problems are under consideration). A brief review of publications of recent years of Russian and foreign specialists devoted to the current trends in the use of wavelet analysis in construction mechanics is given. Approximations of the mesh functions in discrete Haar bases of zero and first levels are described (the mesh function is represented as the sum in which one term is its approximation of the first level, and the second term is so-called complement (up to the initial state) on the grid of the first level). Projectors are constructed for the spaces of vector functions of the original grid to the space of their approximation on the first-level grid and its complement (the detailing component) to the initial state. Basic scheme of the two-grid method is presented. This method allows solution of boundary problems of structural mechanics with the use of matrix operators of significantly smaller dimension. It should be noted that discrete analogue of the initial operator equation (defined on a given interval) is a system of linear algebraic equations (SLAE) constructed within finite difference method (FDM) or the finite element method (FEM). Next, the transition to the resolving SLAE is done. Block Gauss method is used for its direct solution (forward-backward algorithm is realized). We consider a numerical solution of the boundary problem of bending of the Bernoulli beam lying on an elastic foundation (within Winkler model) as a practically important one-dimensional sample. There is good consistency of the results obtained by the proposed method and by standard finite difference method.

Keywords: two-grid method, finite difference method, finite element method, wavelet analysis, discrete Haar basis, structural analysis, boundary problems, one-dimensional problems

1. О ПРИМЕНЕНИИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Следует сразу подчеркнуть, что в последние годы вейвлет-анализ [1] находит все более широкое применение в технических науках. Вместе с тем, в области строительной механике все еще наблюдается относительно небольшое число подобных исследований. В числе основных направлений исследований можно указать следующие: решение задач статики сооружений [2-9]; решение задач устойчивости сооружений [2,3]; решение задач динамики сооружений [10-12]; развитие метода конечных элементов [13,14]; выявление дефектов (зон разрушения, трещин и т.д.) в конструкциях, в том числе в рамках мониторинга состояния строительных конструкций, зданий и сооружений [15-27]; расчет связанных систем типа «сооружение – основание» [28]; развитие вероятностных методов в строительной механике и др. Заметим, что значительным успехом видятся достижения последних лет, касающиеся использования вейвлетов в численных и численно-аналитических методах решения различных операторных уравнений, в том числе эллиптических уравнений в частных производных, граничных интегральных уравнений, псевдодифференциальных уравнений и др., что представляется особенно важным, например, при решении задач теории упругости и пластичности (соответствующая подробная библиография приведена в [29]). В целом, методы, использующие вейвлет-анализ, характеризуются, как правило, многоуровневым характером и высоким качеством аппроксимации соответствующих операторов и функций.

В числе работ российских исследователей необходимо выделить публикации М.В. Жигалова [30-32], А.В. Крысько [30,33,34], В.А. Крысько [31,32,35] и В.В. Солдатова [30-33] ведется построение математических моделей сложных колебаний распределенных систем (в виде одно- и многослойных балок (спаянных и неспаянных), пластинок, сферических пологих и цилиндрических оболочек), а также разработка программного обеспечения, позволяющего осуществлять вейвлет-анализ сценариев перехода в хаос для таких систем. С.П. Копысов [36-39] и Ю.А. Сагдеева [36-39] разработали метод осреднения эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на вейвлет-преобразовании и методе конечных элементов для прогнозирования эффективных свойств и анализа осредненных решений уравнений для композитов с известными структурой и свойствами составляющих компонент.

Серия работ А.Б. Золотова, М.Л. Мозгалевой, П.А. Акимова и Д.Н. Алексеева посвящена разработке и изучению численных методов и алгоритмов исследования локального напряженно-деформированного состояния конструкций с помощью вейвлет-анализа (подробная библиография имеется в [29]). Так, например, в [9] решение представляется с позиции определения напряженно-деформированного состояния в заранее выделенной локальной зоне. На основе этих соображений строится оптимальная расчетная сетка, дающая качественную картину степени влияния напряженных состояний конструкции в различных областях друг на друга. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. Строится не только более качественная расчетная модель, но и вносятся некоторые конструктивные изменения. В [1] представлены разработанные специальные дискретные модели расчета конструкций, эффективные для применения локальных методов исследования и вейвлет-анализа; предложены методы вычисления фундаментальных функций для задач теории упругости с привлечением вейвлет-анализа; описаны методы дискретного вейвлет-анализа на основе базиса Хаара с позиций его использования в расчете конструкций; представлены алгоритмы синтеза и анализа по дискретному базису Хаара с выделением локальных и глобальных элементов; разработана методика получения локальных решений; решены практические примеры с введением локализованных сеток и многоуровневого представления решений в вейвлет-базисе Хаара.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Пусть задан отрезок длиной L. Нанесем на него одномерную сетку, состоящую из N узлов. Сеточную векторную функцию

$$\bar{u} = [u_1, ..., u_N]^T \tag{1.1}$$

можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_0} u_j^0 \overline{\Phi}_j^0 , \tag{1.2}$$

где
$$N_0 = N , \tag{1.3}$$

причем N – четное;

$$u_j^0 = u_j , \quad 1 \le j \le N ; \tag{1.4}$$

$$\overline{\Phi}_j^0(i) = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \ne j \end{cases} \tag{1.5}$$

– j-й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня,

$$1 \le j \le N_0 = N , \quad 1 \le i \le N .$$

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара 1-го уровня в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \overline{\Phi}_j^1 + \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \overline{\Psi}_j^1 , \tag{1.6}$$

где
$$N_1 = N/2 \tag{1.7}$$

$$u_j^1 = (\bar{u}, \overline{\Phi}_j^1), \quad v_j^1 = (\bar{u}, \overline{\Psi}_j^1), \quad 1 \le j \le N_1 ; \tag{1.8}$$

$$\bar{u}^1 = [u_1^1 \dots u_{N_1}^1]^{\mathrm{T}} ; \quad \bar{v}^1 = [v_1^1 \dots v_{N_1}^1]^{\mathrm{T}} ; \tag{1.9}$$

$$\overline{\Phi}_j^1 = \alpha(\overline{\Phi}_{2j-1}^0 + \overline{\Phi}_{2j}^0) \tag{1.10}$$

– j-й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара 1-го уровня, $1 \le j \le N_1$;

$$\overline{\Psi}_j^1 = \alpha(\overline{\Phi}_{2j-1}^0 - \overline{\Phi}_{2j}^0) \tag{1.11}$$

– j-й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара 1-го уровня, $1 \le j \le N_1$,

$$\alpha = 1/\sqrt{2} \tag{1.12}$$

– нормирующий коэффициент.
Исходя из представления (1.6) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке 1-го уровня, состоящей из N_1 – узлов, а второе слагаемое называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке 1-го уровня.
Преставление (1.6) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0, \tag{1.13}$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u} = \Phi_1 \bar{u}^1, \tag{1.14}$$

$$\bar{v}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1 = \Psi_1 \Psi_1^T \bar{u} = \Psi_1 \bar{v}^1, \tag{1.15}$$

где
$$\Phi_1 = [\bar{\Phi}_1^1, ..., \bar{\Phi}_{N_1}^1]; \tag{1.16}$$

$$\Psi_1 = [\bar{\Psi}_1^1, ..., \bar{\Psi}_{N_1}^1] \tag{1.17}$$

– матрицы размером $N \times N_1$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара 1-го уровня.
В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T; \quad P_\Psi = \Psi_1 \Psi_1^T \tag{1.18}$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке 1-го уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ДВУХСЕТОЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ

Пусть система линейных алгебраических уравнений порядка N

$$A\bar{u} = \bar{f} \tag{2.1}$$

является дискретным аналогом некоторого операторного уравнения, определенного на заданном отрезке.
Подставим в (2.1) выражение для u в виде (1.13). И умножим поочередно обе стороны равенства слева на Φ_1^{T} и Ψ_1^{T}, т.е.

$$\begin{aligned} \Phi_1^{\mathrm{T}} A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Phi_1^{\mathrm{T}} A \Psi_1 \bar{v}^1 = \Phi_1^{\mathrm{T}} \bar{f} \\ \Psi_1^{\mathrm{T}} A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_1^{\mathrm{T}} A \Psi_1 \bar{v}^1 = \Psi_1^{\mathrm{T}} \bar{f} \end{aligned} \tag{2.2}$$

или

$$\begin{aligned} A_{11}\bar{u}^1 + A_{12}\bar{v}^1 = \bar{f}_u \\ A_{21}\bar{u}^1 + A_{22}\bar{v}^1 = \bar{f}_v \end{aligned} \tag{2.3}$$

где
$$A_{11} = \Phi_1^{\mathrm{T}} A \Phi_1; \quad A_{12} = \Phi_1^{\mathrm{T}} A \Psi_1; \tag{2.4}$$

$$A_{21} = \Psi_1^{\mathrm{T}} A \Phi_1 \bar{u}^1; \quad A_{22} = \Psi_1^{\mathrm{T}} A \Psi_1 \bar{v}^1 \tag{2.5}$$

– блочные матрицы размером $N_1 \times N_1$;

$$\bar{f}_u = \Phi_1^{\mathrm{T}} \bar{f}, \quad \bar{f}_v = \Psi_1^{\mathrm{T}} \bar{f} \tag{2.6}$$

– векторы правой части размером N_1.
Находим решение системы (2.3), используя блочный метод Гаусса.
Расширенная матрица

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & \bar{f}_u \\ A_{21} & A_{22} & \bar{f}_v \end{array}\right] \tag{2.7}$$

Прямой ход

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & \bar{f}_u \\ 0 & A_{22}^1 & \bar{f}_v^1 \end{array}\right], \tag{2.8}$$

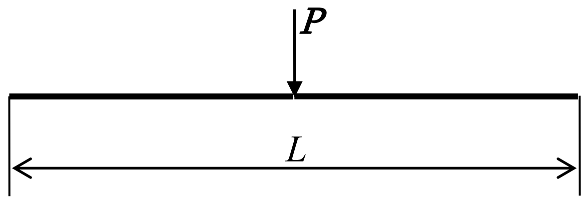

Рисунок 3.1. К постановке рассматриваемой краевой задачи.

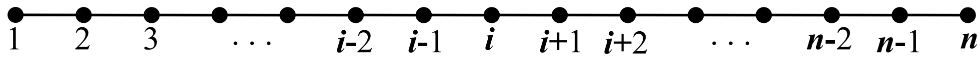

Рисунок 3.2. Дискретная аппроксимация области.

где
$$A_{22}^{1} = A_{22} - C_{21}A_{12}; \tag{2.9}$$
$$\bar{f}_v^{1} = \bar{f}_v - C_{12}\bar{f}_u; \tag{2.10}$$
$$C_{12} = A_{21}A_{11}^{-1}. \tag{2.11}$$

Обратный ход:

$$\begin{aligned} \bar{v}^{1} &= (A_{22}^{1})^{-1}\bar{f}_v^{1} \\ \bar{u}^{1} &= A_{11}^{-1}(\bar{f}_u - A_{12}\bar{v}^{1}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Тогда, следуя формулам (1.13)-(1.17), решение исходной задачи (2.1) получаем в виде:

$$\bar{u} = \Phi_1\bar{u}^{1} + \Psi_1\bar{v}^{1} \tag{2.13}$$

При этом следует отметить, что предложенный алгоритм позволяет получить решение. оперируя матричными операторами размерности $N_1 = N/2$.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА – ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ

Постановка задачи. В качестве модельного примера рассмотрим балку на упругом основании со следующими параметрами (рис. 3.1): L=8 м – длина; h=1.3 м, b=1 м – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E = 2560\cdot 10^4$ кН/м^2 – модуль упругости; $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке, $P_h = 100/h_b$; $k = 75\cdot 10^3$ кН/м^3 – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера;

$$\bar{k} = k\cdot b; \quad J = bh^3/12. \tag{3.1}$$

Определение прогиба балки Бернулли сводится, к решению следующей краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x), \quad 0 < x < L, \tag{3.2}$$
$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

где $$4\alpha^4 = \frac{\bar{k}}{EJ}; \quad F = \frac{P}{EJ}\delta(x - \frac{L}{2}). \tag{3.3}$$

Дискретное решение задачи. Разбиваем отрезок (0, L) на равные части с шагом h_b (рис. 3.2).

Если n – общее количество точек, то очевидно, что

$$h_b = L/(n-1). \tag{3.4}$$

Далее переходим от решения краевой задачи (3.2)-(3.3) к решению системы разностных уравнений вида

$$A\bar{y} = \bar{f}, \tag{3.5}$$

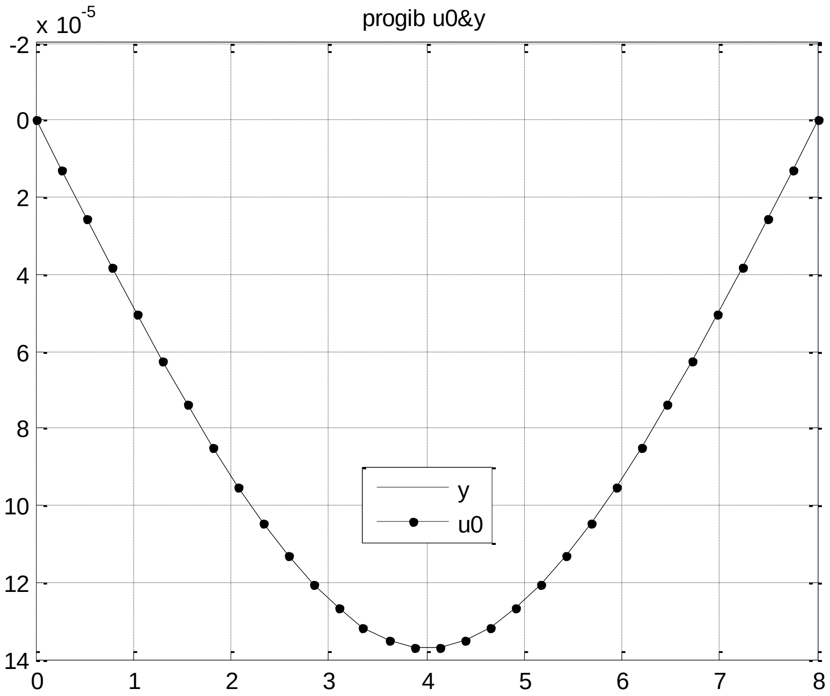

Рисунок 3.3. Сравнение результатов.

подробно представленных с учетом краевых условий (3.2) в виде:

$i=1$:

$$y_1 = f_1$$

$i=2$:

$$-2y_1 + (5+4h_b^4\alpha^4)y_2 - 4y_3 + y_4 = f_2$$

$2 < i < n-1$:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6+4h_b^4\alpha^4)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i$$

$i = n-1$:

$$y_{n-3} - 4y_{n-2} + (5+4h_b^4\alpha^4)y_{n-1} - 2y_n = f_{n-1}$$

$i=n$:

$$y_n = f_n \tag{3.6}$$

где $x_i = h_b(i-1)$; $y_i = y(x_i)$; (3.7)

$$f_i = \begin{cases} 0, & i=1 \\ h_b^4[F(x_i)/h_b], & 2 \le i \le n-1 \\ 0, & i=n \end{cases} \tag{3.8}$$

По результатам расчета при $N=32$ построены сравнительные графики прогибов. На рисунке 3 – сравнение непосредственного решения системы (3.6) y с $u0$, построенного по формуле (2.13). Аналогично можно показать хорошую согласованность и других параметров напряженно-деформированного состояния конструкции, определенных в соответствии с предложенным подходом и стандартным численным методом (в данном случае – методом конечных разностей) [40].

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы, Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2017 год, тема 7.1.1 «Разработ-

ка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Li B., Chen X.** Wavelet-based numerical analysis: A review and classification. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 81, 2014, pp. 14-31.
2. **Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y.** A wavelet method for bending of circular plate with large deflection. // Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 28, Iss. 1, 2015, pp. 83-90.
3. **Xie X., Jin G., Liu Z.** Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method. // International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 77, 2013, pp. 47-56.
4. **Zhang L., Wang J., Zhou Y.-H.** Large deflection and post-buckling analysis of non-linearly elastic rods by wavelet method. // International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 78, 2016, pp. 45-52.
5. **Zhong Y., Xiang J.** Construction of wavelet-based elements for static and stability analysis of elastic problems. // Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 24, Iss. 4, 2011, pp. 355-364.
6. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings 1623, 3, (2014, pp. 3-6.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // ACSR-Advances in Computer Science Research, Vol. 18, 2015, pp. 713-716.
8. **Aslami M., Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // Thin-Walled Structures, Vol. 98, Part B, 2015-2016, pp. 392-402.
9. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** Multilevel Wavelet-based Numerical Method of Local Structural Analysis for Three-dimensional Problem. // Procedia Engineering, Vol. 111, 2015, pp. 569-574.
10. **Joglekar D.M., Mitra M.** Analysis of flexural wave propagation through beams with a breathing crack using wavelet spectral finite element method. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vols. 76-77, 2016, pp. 576-591.
11. **Kaur H., Mittal R.C., Mishra V.** Haar wavelet solutions of nonlinear oscillator equations. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 38, Iss. 21-22, 1 2014, pp. 4958-4971.
12. **Spanos P.D., Kong F., Li J., Kougioumtzoglou I.A.** Harmonic wavelets based excitation–response relationships for linear systems: A critical perspective. // Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 44, 2016, pp. 163-173.
13. **Diaz L.A., Martin M.T., Vampa V.** Daubechies wavelet beam and plate finite elements. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 45, Iss. 3, 2009, pp. 200-209.
14. **He W.-Y., Ren W.-X.** Finite element analysis of beam structures based on trigonometric wavelet. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 51, 2012, pp. 59-66.
15. **Cao M., Cheng L., Su Z., Xu H.** A multi-scale pseudo-force model in wavelet domain for identification of damage in structural components. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 28, 2012, pp. 638-659.
16. **Cao M.-S, Xu W., Ren W.-X., Ostachowicz W., Sha G.-G., Pan L.-X.** A concept of complex-wavelet modal cur-

vature for detecting multiple cracks in beams under noisy conditions. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vols. 76-77, 2016, pp. 555-575.

17. **El-Gebeily M., Khulief Y.A.** Identification of wall-thinning and cracks in pipes utilizing vibration modes and wavelets. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 40, Iss. 9-10, 2016, pp. 5335-5348.
18. **Janeliukstis R., Rucevskis S., Wesolowski M., Chate A.** Multiple Damage Identification in Beam Structure Based on Wavelet Transform. // Procedia Engineering, Vol. 172, 2017, pp. 426-432.
19. **Li H., Yi T., Gu M., Huo L.** Evaluation of earthquake-induced structural damages by wavelet transform. // Progress in Natural Science, Vol. 19, Iss. 4, 2009, pp. 461-470.
20. **Liu Z., Jiang B., Tang L., Liu Y., Zhang C., Li Y.** Features of long-term health monitored strains of a bridge with wavelet analysis. // Theoretical and Applied Mechanics Letters, Vol. 1, Iss. 5, 2011, pp. 051006.
21. **Montanari L., Spagnoli A., Basu B., Broderick B.** On the effect of spatial sampling in damage detection of cracked beams by continuous wavelet transform. // Journal of Sound and Vibration, Vol. 345, 2015, pp. 233-249.
22. **Patel S.S., Chourasia A.P., Panigrahi S.K., Parashar J., Parvez N., Kumar M.** Damage Identification of RC Structures Using Wavelet Transformation. // Procedia Engineering, Vol. 144, 2016, pp. 336-342.
23. **Sannomaru S., Tanaka S., Yoshida K.-I., Bui T.Q., Okazawa S., Hagihara S.** Treatment of Dirichlet-type boundary conditions in the spline-based wavelet Galerkin method employing multiple point constraints. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 43, 2017, pp. 592-610.
24. **Silva C.M., Castro L.M.S.S.** Damage analysis of concrete structures using polynomial wavelets. // Advances in Engineering Software, Vol. 50, 2012, pp. 69-81.
25. **Solis M., Algaba M., Galvin P.** Continuous wavelet analysis of mode shapes differences for damage detection. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 40, Iss. 2, 2013, pp. 645-666.
26. **Tanaka S., Sannomaru S., Imachi M., Hagihara S. Okazawa S., Okada H.** Analysis of dynamic stress concentration problems employing spline-based wavelet Galerkin method. // Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 58, 2015, pp. 129-139.
27. **Zhang X., Gao R.X., Yan R., Chen X., Sun C., Yang Z.** Multivariable wavelet finite element-based vibration model for quantitative crack identification by using particle swarm optimization. // Journal of Sound and Vibration, Vol. 375, 2016, pp. 200-216.
28. **Guo J., Ding L., Luo H., Zhou C., Ma L.** Wavelet prediction method for ground deformation induced by tunneling. // Tunnelling and Underground Space Technology, Vol. 41, 2014, pp. 137-151.
29. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: Издательство МИСИ – МГСУ, 2014. – 632 с.
30. **Крысько А.В., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** Анализ хаотических колебаний распределенных систем в виде балок Эйлера-Бернулли с помощью вейвлет-преобразования. // Известия вузов. Авиационная техника, 2009, №4, с. 21-24.
31. **Крысько В.А., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** Вейвлет-анализ колебаний замкнутых цилиндрических оболочек. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, №4, вып. 1, с. 24-30.
32. **Крысько В.А., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** О выборе типа вейвлета при

изучении нелинейных колебаний балок с учетом поперечных сдвигов. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, №3(40), вып. 1, с. 14-22.
33. **Awrejcewicz J., Krysko A., Soldatov V.** On the wavelet transform application to a study of chaotic vibrations of the infinite length flexible panels driven longitudinally. // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2009, Vol. 19, Iss. 10, pp. 3347-3371.
34. **Axelsson O., Vassilevski P.** Algebraic multilevel preconditioning methods, I. // Num. Math., 1989, No. 56, pp. 157-177.
35. **Крысько В.А., Куцемако А.Н.** О сходимости метода Канторовича-Власова при исследовании нелинейных собственных колебаний прямоугольных пластин и оболочек. // «Исследования по теории пластин и оболочек», выпуск 11, 1975, с. 279-288.
36. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Вычислительные особенности двумерного вейвлет-осреднения в задачах многомасштабного анализа // Вычислительные методы и программирование, 2005, т. 6, №1, с. 1-8.
37. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Об одном методе определения эффективных упругих характеристик композитов с помощью вейвлет-преобразования // Интеллектуальные системы в производстве, 2007, т. 1, с. 49-61.
38. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Применение вейвлет-преобразования при численном осреднении дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. // Известия вузов. Математика, 2007, №7, с. 80-83.
39. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Численное определение осредненных характеристик композитов на основе МКЭ и вейвлет-преобразования. // Известия института математики и информатики УдГУ, 2006, т. 37, №3, с. 67-68.
40. **Мозгалева М.Л.** Двухсеточный метод решения краевых задач строительной механики на основе использования дискретного базиса Хаара. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций), Vol. 13, Iss. 1, 2017, pp. 69-85.

REFERENCES

1. **Li B., Chen X.** Wavelet-based numerical analysis: A review and classification. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 81, 2014, pp. 14-31.
2. **Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y.** A wavelet method for bending of circular plate with large deflection. // Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 28, Iss. 1, 2015, pp. 83-90.
3. **Xie X., Jin G., Liu Z.** Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method. // International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 77, 2013, pp. 47-56.
4. **Zhang L., Wang J., Zhou Y.-H.** Large deflection and post-buckling analysis of non-linearly elastic rods by wavelet method. // International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 78, 2016, pp. 45-52.
5. **Zhong Y., Xiang J.** Construction of wavelet-based elements for static and stability analysis of elastic problems. // Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 24, Iss. 4, 2011, pp. 355-364.
6. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings 1623, 3, (2014, pp. 3-6.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element

Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // ACSR-Advances in Computer Science Research, Vol. 18, 2015, pp. 713-716.

8. **Aslami M., Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // Thin-Walled Structures, Vol. 98, Part B, 2015-2016, pp. 392-402.
9. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** Multilevel Wavelet-based Numerical Method of Local Structural Analysis for Three-dimensional Problem. // Procedia Engineering, Vol. 111, 2015, pp. 569-574.
10. **Joglekar D.M., Mitra M.** Analysis of flexural wave propagation through beams with a breathing crack using wavelet spectral finite element method. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vols. 76-77, 2016, pp. 576-591.
11. **Kaur H., Mittal R.C., Mishra V.** Haar wavelet solutions of nonlinear oscillator equations. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 38, Iss. 21-22, 1 2014, pp. 4958-4971.
12. **Spanos P.D., Kong F., Li J., Kougioumtzoglou I.A.** Harmonic wavelets based excitation–response relationships for linear systems: A critical perspective. // Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 44, 2016, pp. 163-173.
13. **Diaz L.A., Martin M.T., Vampa V.** Daubechies wavelet beam and plate finite elements. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 45, Iss. 3, 2009, pp. 200-209.
14. **He W.-Y., Ren W.-X.** Finite element analysis of beam structures based on trigonometric wavelet. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 51, 2012, pp. 59-66.
15. **Cao M., Cheng L., Su Z., Xu H.** A multiscale pseudo-force model in wavelet domain for identification of damage in structural components. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 28, 2012, pp. 638-659.
16. **Cao M.-S, Xu W., Ren W.-X., Ostachowicz W., Sha G.-G., Pan L.-X.** A concept of complex-wavelet modal curvature for detecting multiple cracks in beams under noisy conditions. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vols. 76-77, 2016, pp. 555-575.
17. **El-Gebeily M., Khulief Y.A.** Identification of wall-thinning and cracks in pipes utilizing vibration modes and wavelets. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 40, Iss. 9-10, 2016, pp. 5335-5348.
18. **Janeliukstis R., Rucevskis S., Wesolowski M., Chate A.** Multiple Damage Identification in Beam Structure Based on Wavelet Transform. // Procedia Engineering, Vol. 172, 2017, pp. 426-432.
19. **Li H., Yi T., Gu M., Huo L.** Evaluation of earthquake-induced structural damages by wavelet transform. // Progress in Natural Science, Vol. 19, Iss. 4, 2009, pp. 461-470.
20. **Liu Z., Jiang B., Tang L., Liu Y., Zhang C., Li Y.** Features of long-term health monitored strains of a bridge with wavelet analysis. // Theoretical and Applied Mechanics Letters, Vol. 1, Iss. 5, 2011, pp. 051006.
21. **Montanari L., Spagnoli A., Basu B., Broderick B.** On the effect of spatial sampling in damage detection of cracked beams by continuous wavelet transform. // Journal of Sound and Vibration, Vol. 345, 2015, pp. 233-249.
22. **Patel S.S., Chourasia A.P., Panigrahi S.K., Parashar J., Parvez N., Kumar M.** Damage Identification of RC Structures Using Wavelet Transformation. // Procedia Engineering, Vol. 144, 2016, pp. 336-342.
23. **Sannomaru S., Tanaka S., Yoshida K.-I., Bui T.Q., Okazawa S., Hagihara S.** Treatment of Dirichlet-type boundary conditions in the spline-based wavelet Galerkin method employing multiple point constraints. // Applied Mathematical Modelling, Vol. 43, 2017, pp. 592-610.

24. **Silva C.M., Castro L.M.S.S.** Damage analysis of concrete structures using polynomial wavelets. // Advances in Engineering Software, Vol. 50, 2012, pp. 69-81.
25. **Solis M., Algaba M., Galvin P.** Continuous wavelet analysis of mode shapes differences for damage detection. // Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 40, Iss. 2, 2013, pp. 645-666.
26. **Tanaka S., Sannomaru S., Imachi M., Hagihara S. Okazawa S., Okada H.** Analysis of dynamic stress concentration problems employing spline-based wavelet Galerkin method. // Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 58, 2015, pp. 129-139.
27. **Zhang X., Gao R.X., Yan R., Chen X., Sun C., Yang Z.** Multivariable wavelet finite element-based vibration model for quantitative crack identification by using particle swarm optimization. // Journal of Sound and Vibration, Vol. 375, 2016, pp. 200-216.
28. **Guo J., Ding L., Luo H., Zhou C., Ma L.** Wavelet prediction method for ground deformation induced by tunneling. // Tunnelling and Underground Space Technology, Vol. 41, 2014, pp. 137-151.
29. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Mnogourovnevye Diskretnye i Diskretno-Kontinual'nye Metody Lokal'nogo Rascheta Stroitel'nyh Konstrukcij [Multilevel Discrete and Discrete-Continual Methods of Local Structural Analysis]. Moscow, MISI – MGSU Publishing House, 2014, 632 pages.
30. **Krysko A.V., Zhigalov M.V., Soldatov V.V.** Analiz Haoticheskih Kolebanij Raspredelennyh Sistem v Vide Balok Jejlera-Bernulli s Pomoshh'ju Vejvlet-Preobrazovanija [Analysis of Chaotic Oscillations of Distributed Systems in the Form of Euler-Bernoulli beams by Means of a Wavelet Transform]. // Izvestia vuzov. Aviatsionnaya Technika, No. 4, 2009, pp. 21-24.
31. **Krysko V.A., Zhigalov M.V., Soldatov V.V.** Vejvlet-Analiz Kolebanij Zamknutyh Cilindricheskih Obolochek [Wavelet Analysis of Oscillations of Closed Cylindrical Shells]. // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta, No. 4(1), 2009, pp. 24-30.
32. **Krysko V.A., Zhigalov M.V., Soldatov V.V.** O Vybore Tipa Vejvleta Pri Izuchenii Nelinejnyh Kolebanij Balok s Uchetom Poperechnyh Sdvigov [About the Choice of the Wavelet Type in the Study of Nonlinear Oscillations of Beams with Allowance for Transverse Shifts]. // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta, No. 3(1), 2009, pp. 14-22.
33. **Awrejcewicz J., Krysko A., Soldatov V.** On the wavelet transform application to a study of chaotic vibrations of the infinite length flexible panels driven longitudinally. // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2009, Vol. 19, Iss. 10, pp. 3347-3371.
34. **Axelsson O., Vassilevski P.** Algebraic multilevel preconditioning methods, I. // Num. Math., 1989, No. 56, pp. 157-177.
35. **Krysko V.A., Kutsemako A.N.** O Shodimosti Metoda Kantorovicha-Vlasova pri Issledovanii Nelinejnyh Sobstvennyh Kolebanij Prjamougol'nyh Plastin i Obolochek [About the Convergence of the Kantorovich-Vlasov Method for Studying of Nonlinear Natural Oscillations of Rectangular Plates and Shells]. // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek, No. 11, 1975, pp. 279-288.
36. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Vychislitel'nye Osobennosti Dvumernogo Vejvlet-osrednenija v Zadachah Mnogomasshtabnogo Analiza [Computational Specificity of Two-Dimensional Wavelet Averaging in Problems of Multiscale Analysis]. // Vichislitelniye Metodi

i Programmirovaniye, Tom 6(1), 2005, pp. 1-8.

37. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Ob Odnom Metode Opredelenija Jeffektivnyh Uprugih Harakteristik Kompozitov s Pomoshh'ju Vejvlet-Preobrazovanija [About One Method for Determining the Effective Elastic Parameters of Composites by Means of a Wavelet Transform]. // Intellektualniye sistemi v proizvodstve, No. 1, 2007, pp. 49-61.
38. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Primenenie Vejvlet-Preobrazovanija Pri Chislennom Osrednenii Differencial'nyh Uravnenij s Bystro Oscillirujushhimi Kojefficientami [The Application of the Wavelet Transform in the Numerical Averaging of Differential Equations with Rapidly Oscillating Coefficients]. // Izvestia vuzov. Matematika, No. 7, 2007, pp. 80-83.
39. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Chislennoe Opredelenie Osrednennyh Harakteristik Kompozitov na Osnove MKJe i Vejvlet-Preobrazovanija [Numerical Computing of Averaged Parameters of Composites Based on FEM and Wavelet Transform]. // Izvestia Instituta matematiki i informatiki UdGU, No. 37(3), 2006, pp. 67-68.
40. **Mozgaleva M.L.** Dvuhsetochnyj Metod Reshenija Kraevyh Zadach Stroitel'noj Me-haniki na Osnove Ispol'zovanija Diskretnogo Bazisa Haara [Two-Stage Grid Method of Solution of Boundary Problems of Structural Mechanics with the Use of Discrete Haar Basis. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Mezhdunarodniy zhurnal po rashetu grazhdanskikh i promishlennikh konstruktsiy, No. 13(1), 2017, pp. 69-85.

Акимов Павел Алексеевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета; главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26,тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(499) 183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA; Professor of Department of Applied Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building; Principal researcher of the Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com