

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОДЕЛИ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

*С.Б. Косицын, М.М. Бегичев*

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** В работе на примере мостовой фермы с жесткими узлами численно изучены вопросы устойчивости равновесия стержневых систем с учетом геометрической нелинейности и появления пластических деформаций материала. Рассмотрены различные модели материала: линейно упругий и упругопластический с диаграммами деформирования Прандтля и реальной. Показаны особенности потери устойчивости равновесия.

**Ключевые слова:** потеря устойчивости равновесия, хлопок, предельная точка, пластические деформации

## ANALYSIS OF STABILITY OF A TRUSS MODEL WITH HARD NODES BASED ON VARIOUS STRESS-STRAIN CURVES

*Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev*

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The stability of the equilibrium of rod systems is studied numerically taking into account the geometric nonlinearity using as an example a truss with rigid nodes. Various material models are used: linear elastic and elastoplastic with Prandtl and real stress-strain curves. The features of the loss of equilibrium stability are shown.

**Keywords:** loss of stability, buckling, limit point, plastic strain

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании любого инженерного сооружения (в том числе состоящего из стержневых или тонкостенных пространственных элементов) одной из наиболее важных задач является обеспечение устойчивости его равновесия при различных внешних воздействиях. Задачи устойчивости равновесия составляют достаточно сложный и мало изученный раздел строительной механики. Ряд конструкций (например, рамные каркасы зданий, элементы транспортных сооружений и др.) теряют устойчивость при появлении пластических деформаций материалов, что еще более усложняет задачу. В моменты, предшествующие потере устойчивости, а также в закри-

тическом состоянии, элементы конструкций имеют достаточно большие перемещения, которыми нельзя пренебрегать в расчетах, поэтому корректно поставленная задача устойчивости равновесия является геометрически нелинейной.

В настоящей работе на примере симметричной плоской восьмипанельной горизонтальной мостовой фермы с жесткими узлами (пролет фермы 44 м, высота 8,5 м), нагруженной одинаковыми вертикальными силами, приложенными в узлах нижнего пояса (рис. 1) в геометрически нелинейной постановке рассмотрены вопросы устойчивости равновесия. Стержни фермы – тонкостенные пространственные Н – образные. Геометрические характеристики поперечных сечений приведены в табл. 1.

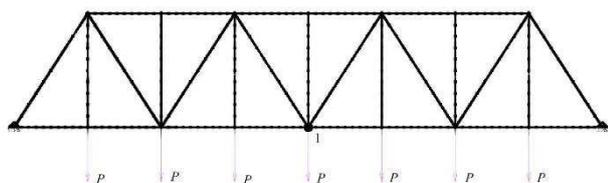


Рисунок 1. Расчетная модель мостовой фермы.

Модель фермы состоит из одномерных конечных элементов (их число 290), работающих на растяжение (сжатие) и изгиб. Элементы соединены в узлах жестко. В программном комплексе MSC.NASTRAN [1], при помощи которого произведены расчеты, их называют BEAM.

На рис. 1 изображены связи, наложенные на опорные узлы фермы. Ферма в программном комплексе MSC.NASTRAN рассматривается как пространственная система, однако в настоящей работе изучена лишь плоская потеря ее устойчивости.

Исследованы возможные сценарии потери устойчивости равновесия фермы. Материал стержней считался:

- линейно упругим (модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,3$ );
- упругопластическим согласно билинейной диаграмме, весьма близкой к диаграмме Прандтля (предел текучести и равный ему предел пропорциональности  $\sigma_T = \sigma_{пл} = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ );
- упругопластическим на основе реальной диаграммы пластичной стали (табл. 2, рис. 2).

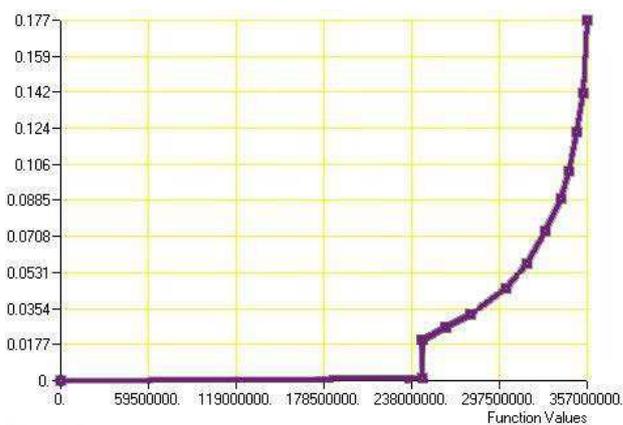


Рисунок 2. Реальная диаграмма деформирования материала ( $\sigma-\epsilon$ ).

Таблица 1. Геометрические характеристики поперечных сечений пространственных  $H$  – образных элементов фермы.

Элемент	Размеры листов	Площадь листов	Площадь общая	Момент инерции $J_z$	Момент инерции $J_y$	Момент инерции $J_{кр}$
	мм	мм <sup>2</sup>				
Пояс верхний / нижний	420×12	5040	0,023440	9,65261	3,24514	2,72228
	460×20	9200				
	460×20	9200				
	Сумма	23440				
Раскос восходящий / нисходящий	440×10	4400	0,012800	4,96307	1,23517	0,450507
	420×10	4200				
	420×10	4200				
	Сумма	12800				
Стойка / подвеска	436×10	4360	0,010120	3,58151	2,76843	0,434578
	240×18	2880				
	240×18	2880				
	Сумма	10120				

*Таблица 2. Числовые значения диаграммы деформирования материала.*

№ точки	$\sigma$	$\varepsilon$
	$10^8 \text{ Н/м}^2$	
1	0	0
2	2,4500	0,001225
3	2,4516	0,020000
4	2,6100	0,026500
5	2,7800	0,032400
6	3,0200	0,045600
7	3,1600	0,057500
8	3,2900	0,073600
9	3,3900	0,089200
10	3,4500	0,103000
11	3,5000	0,122000
12	3,5400	0,141000
13	3,5700	0,177000

## 2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ

Проанализируем результаты классического линейного расчета мостовой фермы с жесткими узлами, выполненного на основе процедуры решения проблемы собственных значений [2]

$$(\mathbf{K}_{nm}^{ik} - \lambda \mathbf{G}_{nm}^{ik}) \bar{\mathbf{Z}}_k^m = 0. \quad (1)$$

Здесь обозначено:  $\mathbf{K}_{nm}^{ik}$  – компоненты матрицы жесткостей на начальном этапе нагружения;  $\mathbf{G}_{nm}^{ik}$  – составляющие матрицы начальных напряжений;  $\bar{\mathbf{Z}}_k^m$  – компоненты собственного вектора, определяющие форму потери устойчивости;  $\lambda$  – собственное значение (масштабный фактор),  $\lambda_1$  является запасом устойчивости по отношению к действующей нагрузке.

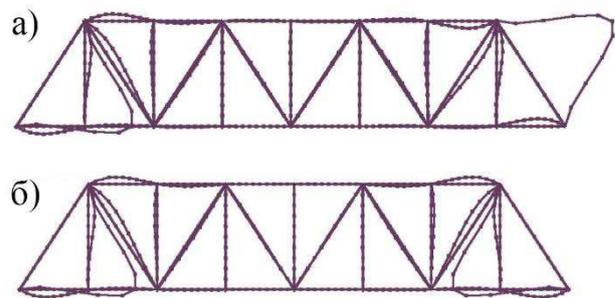
В (1) и в дальнейшем использовано соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу.

Критический параметр оказался двукратным с точностью до четырех значащих цифр. Найденные его величины составили

$$P_{kr1} = \lambda_1 \cdot P_{max} = 0,018965 \cdot (1 \cdot 10^8) = 1,8965 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

$$P_{kr2} = \lambda_2 \cdot P_{max} = 0,018968 \cdot (1 \cdot 10^8) = 1,8968 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Формы потери устойчивости показаны на рис. 3 в соответствующем масштабе.



*Рисунок 3. Двукратные формы потери устойчивости мостовой фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий); а) первая (кососимметричная); б) вторая (симметричная).*

## 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ

Рассмотрим результаты геометрически нелинейного расчета мостовой фермы с жесткими узлами. Материал стержней фермы считался бесконечно линейно упругим. В среднем узле нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) приложена дополнительная возмущающая горизонтальная сила  $0,001P$  с целью выявления возможных несимметричных равновесных форм в процессе потери устойчивости. Для решения геометрически нелинейной задачи запишем нелинейные алгебраические уравнения в приращениях для отдельного шага по аналогии с фундаментальной монографией Дж. Одена [2]:

Анализ устойчивости равновесия модели фермы с жесткими узлами на основе различных диаграмм деформирования материала

$$\mathbf{K}_{nm}^{ik} \Delta \bar{\mathbf{Z}}_k^m = \Delta \bar{\mathbf{P}}_n^i. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta \bar{\mathbf{Z}}_k^m$  – составляющие приращений неизвестных обобщенных перемещений;  $\Delta \bar{\mathbf{P}}_n^i$  – элементы вектора приращения параметра узловой нагрузки;  $\mathbf{K}_{nm}^{ik}$  – компоненты касательной матрицы жесткостей системы нелинейных уравнений:

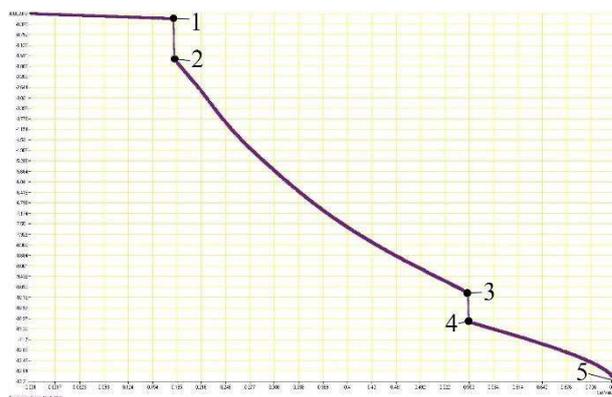
$$\mathbf{K}_{nm}^{ik} = \tilde{\mathbf{K}}_{nm}^{ik} + \mathbf{G}_{nm}^{ik} + \mathbf{C}_{nm}^{ik} + \mathbf{R}_{nm}^{ik}. \quad (3)$$

Здесь обозначено:  $\tilde{\mathbf{K}}_{nm}^{ik}$  – компоненты матрицы приращений жесткостей;  $\mathbf{G}_{nm}^{ik}$  – составляющие матрицы начальных напряжений;  $\mathbf{C}_{nm}^{ik}$  – элементы матрицы начальных поворотов;  $\mathbf{R}_{nm}^{ik}$  – компоненты матрицы начального нагружения.

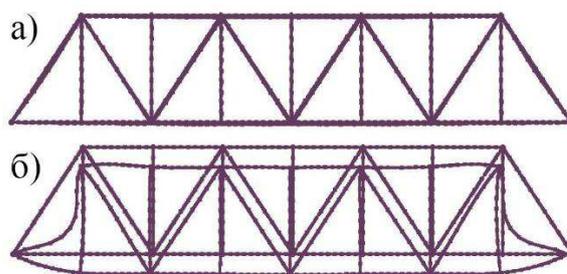
Для анализа решения нелинейной задачи устойчивости равновесия необходимо построить диаграмму равновесных состояний. Диаграмму строят посредством шаговой процедуры, на каждом шаге которой методом Ньютона – Рафсона решают систему нелинейных алгебраических уравнений (2). С целью поиска предельных точек использована процедура Arc-Length метода в варианте Крисфилда [3].

Кривая состояний равновесия для средней точки нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) изображена на рис. 4.

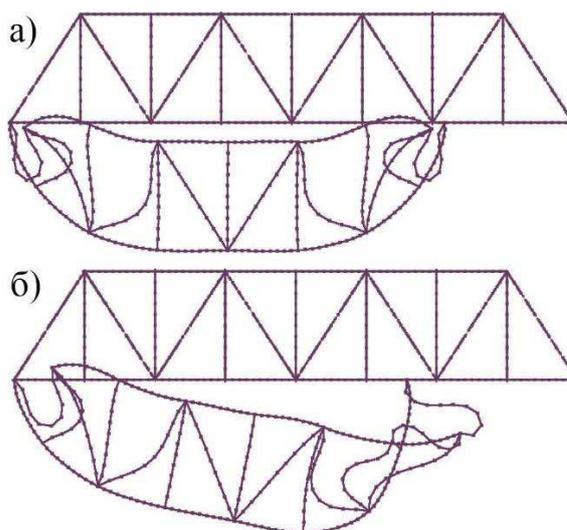
Анализ результатов расчета показал, что потеря устойчивости фермы произошла хлопком из точки 1 (рис. 4) на восходящую часть кривой равновесных состояний (точка 2 на рис. 4). После этого при более высокой нагрузке произошла вторичная потеря устойчивости хлопком из точки 3 в точку 4 (рис. 4). И, наконец, еще одна потеря устойчивости произошла в предельной точке (точка 5 на рис. 4). Формы равновесия, соответствующие точкам 1, 2, 3, 4 и 5 рис. 4, изображены на рис. 5, 6 и 7 соответственно.



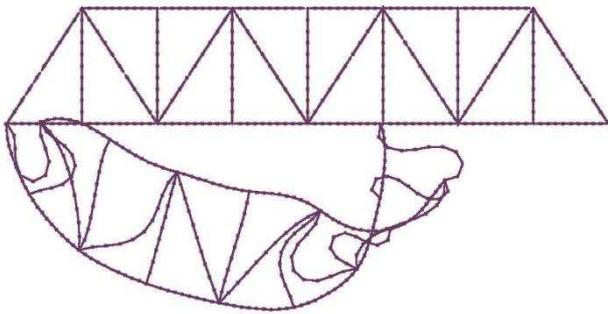
*Рисунок 4. Кривая равновесных состояний «прогиб – нагрузка» для средней точки нижнего пояса фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий).*



*Рисунок 5. Формы равновесия фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий) при первом хлопке; а) до хлопка; б) после хлопка.*



*Рисунок 6. Формы равновесия фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий) при втором хлопке; а) до хлопка; б) после хлопка.*



**Рисунок 7.** Форма равновесия фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий) в предельной точке (5)

Величины критических параметров:

$$P_{kr1}=0,1805 \cdot P_{max}=0,1805 \cdot (1 \cdot 10^7)=1,805 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

$$P_{kr2}=0,5515 \cdot P_{max}=0,5515 \cdot (1 \cdot 10^7)=5,515 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

$$P_{kr3}=0,7369 \cdot P_{max}=0,7369 (1 \cdot 10^7)=7,369 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

#### 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БИЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА, БЛИЗКОЙ К ДИАГРАММЕ ПРАНДТЛЯ

Проанализируем результаты геометрически нелинейного расчета мостовой фермы с жесткими узлами, изготовленной из упругопластического материала с билинейной диаграммой, близкой к диаграмме Прандтля. Учет пластических деформаций произведен по теории пластического течения [4, 5]. Поверхность текучести принята в соответствии с критерием текучести Хубера – Мизеса [4, 5]. Кривая равновесных состояний для средней точки нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) изображена на рис. 8.

Анализ результатов расчета показал, что потеря устойчивости фермы произошла в предельной точке (точка 1 на рис. 8) с появлением пластических деформаций в крайних (портальных) раскосах (на рис. 9 отмечены эти пластические деформации). Только в этих раскосах напряжения достигли предела

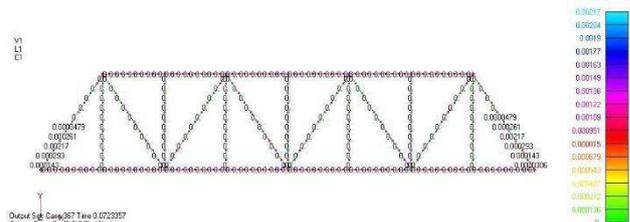
текучести. Дальнейшее увеличение нагрузки на ферму стало уже невозможным. Величина критического параметра составила

$$P_{kr1}=0,0723357 \cdot P_{max}=$$

$$=0,0723357 \cdot (1 \cdot 10^7)=0,723357 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$



**Рисунок 8.** Кривая равновесных состояний «прогиб – нагрузка» для средней точки нижнего пояса фермы с жесткими узлами (материал – упругопластический с билинейной диаграммой).



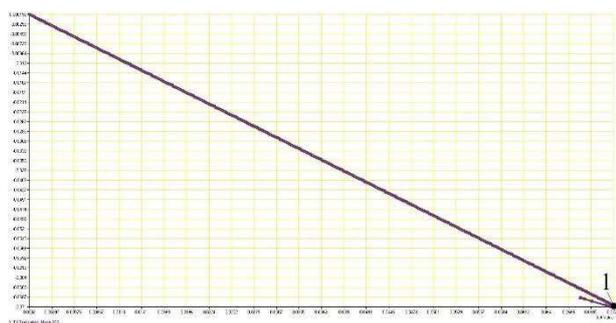
**Рисунок 9.** Пластические деформации в стержнях фермы с жесткими узлами (материал – упругопластический с билинейной диаграммой) при потере устойчивости равновесия.

#### 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕАЛЬНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

Рассмотрим результаты геометрически нелинейного расчета мостовой фермы с шар-

нирными узлами, изготовленной из упруго-пластического материала с реальной диаграммой деформирования, показанной на рис. 2. Числовые значения характерных точек диаграммы приведены в табл. 2. Поверхность текучести при этом расширялась изотропно (изотропное упрочнение).

Кривая равновесных состояний для средней точки нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) изображена на рис. 10.



*Рисунок 10. Кривая равновесных состояний для средней точки нижнего пояса фермы с жесткими узлами (материал – упругопластический с реальной диаграммой).*

Результаты расчета показали, что потеря устойчивости фермы произошла в предельной точке (точка 1 на рис. 10) с появлением пластических деформаций в порталных раскосах. Только в них напряжения достигли предела текучести. После потери устойчивости увеличение нагрузки на ферму стало уже невозможно. Найденное значение критического параметра составило

$$P_{kr1} = 0,0722999 \cdot P_{max} = 0,0722999 \cdot (1 \cdot 10^7) = 0,722999 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

## 6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ

Критические нагрузки для конструкций типа мостовых ферм с жесткими узлами и стержнями, выполненными из упруго-пластических материалов, вследствие снижения

жесткости систем при сжатии после появления пластических деформаций оказались в 2,5 раза ниже аналогичной нагрузки для фермы со стержнями из неограниченно линейно упругого материала. Так, если для фермы со стержнями из линейно упругого материала (геометрически нелинейная постановка задачи) при первом хлопке  $P_{kr1} = 1,805 \cdot 10^6$  Н, то для ферм со стержнями из упругопластических материалов с билинейной и реальной диаграммами деформирования (геометрически и физически нелинейные постановки задач) аналогичные нагрузки при потере устойчивости в предельных точках составили соответственно  $P_{kr1} = 0,723357 \cdot 10^6$  Н и  $P_{kr1} = 0,722999 \cdot 10^6$  Н. При этом вид диаграммы деформирования материала (билинейная или реальная) на величину критического параметра повлиял незначительно (критические параметры совпали с точностью до трех значащих цифр). Линейный бифуркационный анализ (решение проблемы собственных значений) дал более чем двукратную величину критического параметра ( $P_{kr1} = 1,89654 \cdot 10^6$  Н и  $P_{kr2} = 1,89683 \cdot 10^6$  Н совпали с точностью до четырех значащих цифр), которая на 5% выше критического значения, полученного из геометрически нелинейного решения упругой задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Копанев Д.Б.** Решение задач нелинейной статики в MSC.Patran-Nastran. Руководство пользователя – М.: 1999. – 85 с.
2. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
3. **Crisfield M.A.** A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Trough”. // Computers & Structures, 1981, Vol. 13, Number 1, pp. 55-62.
4. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

5. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

Maxim M. Begichev, Ph.D., Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; e-mail: noxonius@mail.ru.

## REFERENCES

1. **Kopanev D.B.** Resheniye zadach nelineynoy statiki v MSC.Patran-Nastran. Rukovodstvo polzovatelya [Solving the problems of nonlinear statics in MSC.Patran-Nastran. User guide]. Moscow, 1999, - 85 pages.
2. **Oden Dzh.** Konechnyye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred [Finite Elements in Nonlinear Mechanics of Continuous Media]. Moscow, Mir, 1976, 465 pages.
3. **Crisfield M.A.** A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Trough”. // Computers & Structures, 1981, Vol. 13, Number 1, pp. 55-62.
4. **Kachanov L.M.** Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969, 420 pages.
5. **Zenkevich O.** Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir, 1975, 543 pages.

---

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Российского университета транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Российского университета транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; e-mail: noxonius@mail.ru

Sergey B. Kosytsyn, Dr.Sc., Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru