DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-58-65

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫГИБА ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

П.П. Гайджуров
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, РОССИЯ

Аннотация: Для большепролетных железобетонных балочных конструкций разработана методика определения выгиба, обусловленного предварительным напряжением стального каната на бетон. Выполнены числовые эксперименты по исследованию влияния различных схем криволинейной раскладки предварительно напряженной арматуры без сцепления с бетоном на распределение разгружающего усилия вдоль траектории армирования.

Ключевые слова: метод конечных элементов, предварительное напряжение бетона, матрицы жесткостей ферменного, комбинированного и плоского полилинейного конечных элементов

FINITE ELEMENT MODELING OF CAMBER OF PRESTRESSED CONCRETE BEAMS

Peter P. Gaigerov
Donskoy State Technical University, Rostov-on-Don, RUSSIA

Abstract: For large-span reinforced concrete beam structures developed by the method of determining the camber due to the prestressing of a steel rope on the concrete. Performed numerical experiments to study the impact of various schemes layout prestressed reinforcement without bonding with concrete on the distribution of the relief efforts along the path of the reinforcement.

Keywords: finite element method, pre-stressing concrete, the stiffness matrix of the truss, combined and plane multilinear finite elements

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время расчет на прочность и жесткость большепролетных предварительно напряженных железобетонных конструкций осуществляется методом конечных элементов [1-7] в сочетании со схемами распределенного (встроенного) или дискретно-связанного армирования [8]. Общим для обеих схем армирования является моделирование бетонного массива в зависимости от размерности задачи объемными или плоскими конечными элементами (КЭ) и армирующих элементов – стержневыми (ферменными или балочными) КЭ. При реализации расчетов по схеме распределенного армирования узлы конечно-элементных сеток объемных (плоских) и стержневых КЭ, как правило, не совпадают. При этом сначала с помощью процедуры автоматического определения пересечения стержневых и объемных (плоских) КЭ формируются условия кинематических связей в соответствующих узлах сетки, так называемых «родительских доменах (parent domains)». После чего методом адресного объединения жесткостей объемных (плоских) и стержневых КЭ формируются матрицы жесткости «родительских доменов», размерность которых совпадает с размерностью объемных (плоских) КЭ. Более точной и вместе с тем более затратной в плане вычислительных ресурсов является схема дискретно-связанного армирования. В данном случае узлы объемных (плоских) и стержневых КЭ должны совпадать, что при криволинейной раскладке арматуры не поз-

воляет использовать регулярные прямолинейные сетки КЭ.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В строительной практике широкое распространение получила технология преднапряжения большепролетных железобетонных балок с помощью тросов, заключенных в пластиковую оболочку («монострендов») [9, 10]. Предлагаемая в [11] концепция моделирования передачи усилия от «моностренда» бетону основана на численном решении плоской линейно упругой задачи прикладной теории упругости. Расчетная схема включает трос, моделируемый шарнирно-стержневыми (ферменными) КЭ с двумя степенями свободы в узле (рис. 1), и податливые опоры, в качестве которых используем комбинированные КЭ пружинного типа (рис. 2). Результирующую составляющую от давления нескольких параллельно расположенных напрягаемых тросов на бетон можно определить, как сумму усилий от отдельных тросов.

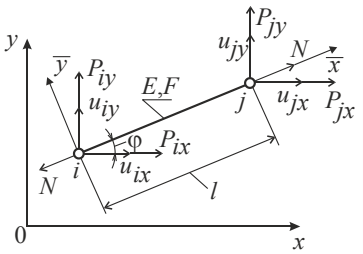

Рисунок 1. Ферменный КЭ.

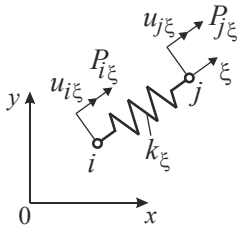

Рисунок 2. Комбинированный КЭ.

Уравнение равновесия для ферменного КЭ в глобальных осях x, y представим в виде

$$[h]_a \{u\}_a = \{p\}_a,$$

где матрица жесткости

$$[h]_a = \frac{EF}{l} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & -\cos^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi \\ -\cos^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ -\cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix};$$

векторы узловых перемещений и сил –

$$\{u\}_a = \{u_{ix}\, u_{iy}\, u_{jx}\, u_{jy}\}^T;$$

$$\{p\}_a = \{p_{ix}\, p_{iy}\, p_{jx}\, p_{jy}\}^T;$$

E – модуль упругости материала троса; F – площадь поперечного сечения КЭ. Геометрические параметры φ и l определяем по значениям координат узлов КЭ.

Для вычисления продольной силы в локальных осях $\bar{x}$, $\bar{y}$ (рис. 1) используем выражение

$$N = \frac{EF}{l}[-\cos\varphi \quad -\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad \sin\varphi]\{u\}.$$

Уравнение равновесия для пружинного КЭ запишем в виде

$$[h]_b \{u\}_b = \{p\}_b,$$

где в зависимости от ориентации КЭ имеем:

– локальная ось КЭ ξ совпадает с осью x

$$[h]_b = k_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \{u\}_b = \{u_{ix}\ 0\ u_{jx}\ 0\}^T; \\ \\ \{p\}_b = \{p_{ix}\ 0\ p_{jx}\ 0\}^T; \end{matrix}$$

– локальная ось КЭ ξ совпадает с осью y

$$[h]_b = k_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \{u\}_b = \{0\ u_{iy}\ 0\ u_{jy}\}^T; \quad \{p\}_b = \{0\ p_{iy}\ 0\ p_{jy}\}^T.$$

Здесь k_y, k_x коэффициенты жесткости, соответствующие ориентациям пружины вдоль осей x и y.

На рис. 3 и 4 показа последовательность построения расчетной схемы для анализа передачи усилия предварительного натяжения троса P_{pr}, помещенного в канал диаметром Δ_c, на бетон. В данной расчетной схеме трение между тросом и стенками канала не учитывается, поэтому рассматривается ½ части балки при соответствующих граничных условиях. В результате расчета определяем усилия F_1, F_2, … F_n в комбинированных КЭ, которые используем в последующем анализе плоского напряженно-деформированного состояния балки, моделируемой плоскими 4-х узловыми КЭ (рис. 5) в соответствии со схемой дискретно-связанного армирования.

Уравнение равновесия для плоского 4-х узлового КЭ (рис. 6) в глобальных осях z_1, z_2 представим в виде

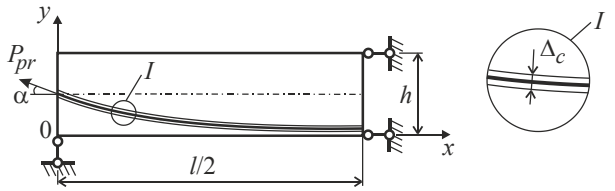

Рисунок 3. Расчетная схема ½ части балки.

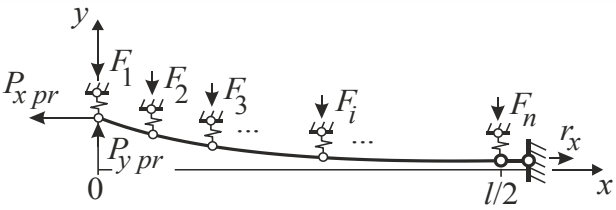

Рисунок 4. Конечно-элементная модель «моностренда».

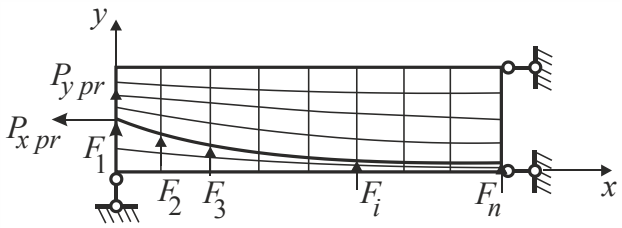

Рисунок 5. Конечно-элементная модель балки при обжатии бетона.

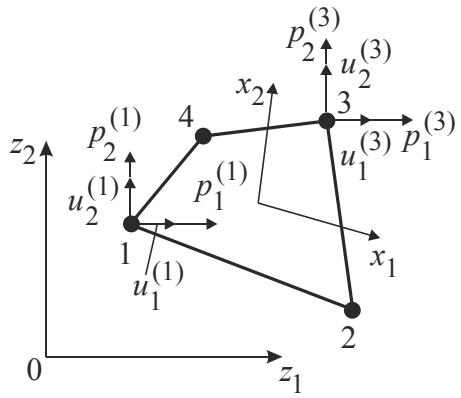

Рисунок 6. Плоский 4-х узловой КЭ.

$$[h]\{u\} = \{p\},$$

где $[h]$ – матрица жесткости КЭ размерностью 8×8; $\{u\}$, $\{p\}$ – векторы-столбцы узловых перемещений и узловых сил, имеющие структуру:

$$\underset{(8\times1)}{\{u\}} = \{u_1^{(1)}\, u_2^{(1)}\, u_1^{(2)}\, u_2^{(2)} \ldots u_1^{(8)}\, u_2^{(8)}\}^T,$$

$$\underset{(8\times1)}{\{p\}} = \{p_1^{(1)}\, p_2^{(1)}\, p_1^{(2)}\, p_2^{(2)} \ldots p_1^{(8)}\, p_2^{(8)}\}^T.$$

В принятых обозначениях $u_l^{(k)}$ и $p_l^{(k)}$ нижний индекс соответствует номеру оси z_l, ($l = 1,2$), а верхний индекс (k) – номеру узла КЭ ($k = 1,2,3,4$). Обозначения осей z_1, z_2 и x, y эквивалентны.

Для случая, когда перемещения u_1 и u_2 в произвольной точке КЭ задаются в глобальных осях z_l, а деформации ε_{ij} $(i,j = 1,2)$ определяются в местных «сопутствующих» в общем случае неортогональных осях x_r,

($r=1,2$) матрицу жесткости вычисляем по формуле [12]:

$$\underset{(8\times8)}{[h]} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[D]^T[E][D]\left|J\right|dx_1\,dx_2$$

где t – толщина КЭ; $\left|J\right|$ – определитель матрицы Якоби; $[E]$ – матрица упругости материала;

$$\underset{(3\times8)}{[D]}=[[D]_1[D]_2[D]_3[D]_4]$$

– блочная матрица; субматрица и ее компоненты:

$$\underset{(3\times2)}{[D]_k} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix} \quad (k=1,2,3,4);$$

$$d_{11} = c_{1k}[z_{1,1}+(z_{1,12}+z_{1,1}c_{2k})x_2];$$
$$d_{12} = c_{1k}[z_{2,1}+(z_{2,12}+z_{2,1}c_{2k})x_2];$$
$$d_{21} = c_{2k}[z_{1,2}+(z_{1,12}+z_{1,2}c_{1k})x_1];$$
$$c_{21} = p_{2k}[z_{1,2}+(z_{1,12}+z_{1,2}c_{1k})x_1];$$
$$d_{22} = c_{2k}[z_{2,2}+(z_{2,12}+z_{2,2}c_{1k})x_1];$$
$$d_{31} = z_{1,1}c_{2k}+z_{1,2}c_{1k}; \quad d_{32} = z_{2,1}c_{2k}+z_{2,2}c_{1k}.$$

Здесь c_{1k} и c_{2k} – элементы матрицы координат узлов КЭ в местных осях

$$\underset{(2\times4)}{[c]} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$z_{l,j} = \frac{\partial z_l}{\partial x_j},\ z_{l,ij} = \frac{\partial z_l}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

– компоненты тензора преобразования координат. Индексы i, j, l изменяются в диапазоне от 1 до 2. Интегрирование в выражении $[h]$ выполняем численно по формуле Гаусса.

Процедура вычисления напряжений в узлах КЭ представляет следующую последовательность:

1. Формируем массив $\underset{(4\times3)}{[r]}$ – статически эквивалентной нагрузки в узлах КЭ:

$$r_{nm} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\sigma_{ij}^{k}(1+c_{1n}x_1^k)(1+c_{2n}x_2^k),$$

$$n=1,2,\ldots,4; \quad \begin{cases} \text{при } m=1 \Rightarrow i=1,\ j=1; \\ \text{при } m=2 \Rightarrow i=2,\ j=2; \\ \text{при } m=3 \Rightarrow i=1,\ j=2. \end{cases}$$

где x_1^k, x_2^k – значения локальных координат в точках интегрирования; σ_{ij}^k – компоненты тензора напряжений в точках интегрирования.

2. Формируем массив узловых напряжений

$$\underset{(4\times3)}{[\Omega]}=\underset{(4\times4)}{[\psi]}^{-1}\underset{(4\times3)}{[r]},$$

где фундаментальная матрица плоского 4-х узлового КЭ

$$\underset{(4\times4)}{[\psi]} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\{\varphi\}^T\{\varphi\}\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{\varphi\} = \{\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_4\}^T$$

– вектор-столбец полилинейных функций формы КЭ.

Для сглаживания скачков поля напряжений выполняем осреднение напряжений в смежных узлах конечно-элементной сетки.

ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

С целью демонстрации возможностей разработанной методики выполним численные эксперименты, в которых используем дискретно-связанную конечно-элементную модель балки пролетом 10 м, имеющей прямо-

угольное поперечное сечение 0,4×0,8 м. Усилие преднапряжения арматуры 170 т. Механические константы бетона: модуль упругости $3{,}04 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона 0,17, удельный вес 2200 кг/м^3.

На рис. 7-9 приведены графики траектории армирования $y(x)$ и разгружающего усилия $F(x)$ для трех схем (параболическая, сплайновая, трапецеидальная) раскладки напрягаемой арматуры на ½ части балки.

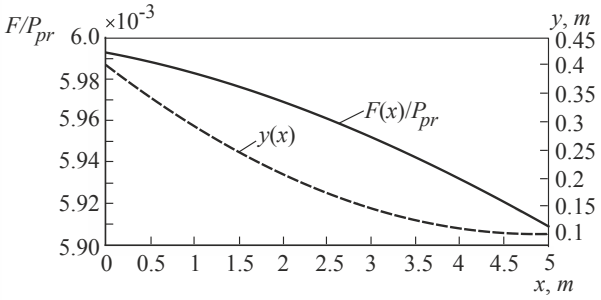

Рисунок 7. Графики $y(x)$ и $F(x)$ для параболической траектории армирования.

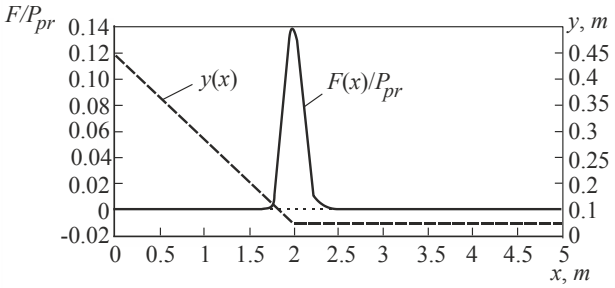

Рисунок 8. Графики $y(x)$ и $F(x)$ для трапецеидальной траектории армирования.

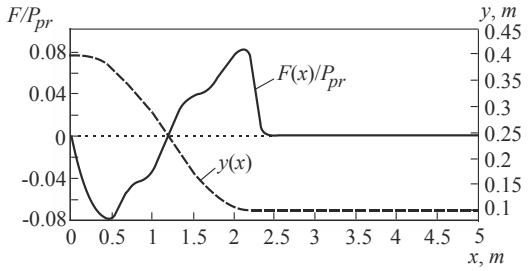

Рисунок 9. Графики $y(x)$ и $F(x)$ для сплайновой траектории армирования.

Результаты конечно-элементного моделирования для исследуемых схем раскладки преднапряженной арматуры в виде контрастных картин распределения полей продольных напряжений σ_x и вертикальных перемещений u_2 показаны на рис. 10-12.

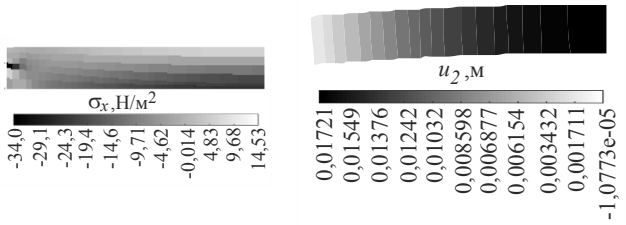

Рисунок 10. Распределение полей σ_x и u_2 в ½ части балки при параболической схеме преднапряжения.

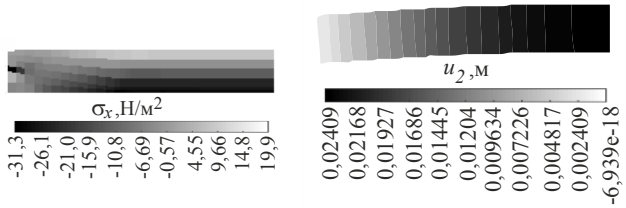

Рисунок 11. Распределение полей σ_x и u_2 в ½ части балки при трапецеидальной схеме преднапряжения.

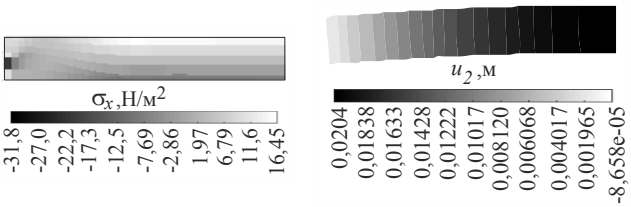

Рисунок 12. Распределение полей σ_x и u_2 в ½ части балки при сплайновой схеме преднапряжения.

Как видно из представленных данных для всех схем раскладки экстремальные значения σ_x локализуются в зоне анкеровки преднапряженной арматуры. Сопоставление значений выгиба балки, полученных с помощью конечно-элементного моделирования и упрощенного расчета [10] представлено в таблице 1.

Таблица 1. Сопоставление значений выгиба балки, полученных с помощью конечно-элементного моделирования и упрощенного расчета.

Схема предварительного напряжения	Значения выгиба балки, м	
	МКЭ	Упрощенная методика [10]
Параболическая	0,0172	0,00940
Трапецеидальная	0,0241	0,00934
Сплайновая	0,0204	0,00954

Анализируя эти данные, приходим к выводу, что упрощенная методика дает заниженные значения выгиба. Причем при конечно-элементном анализе значение выгиба более существенно зависит от схемы раскладки преднапряженной арматуры, чем при упрощенном расчете.

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика численного расчета выгиба большепролетных железобетонных балок с преднапряжением арматуры на бетон, позволяющая для схем криволинейного армирования без сцепления с бетоном реалистично моделировать разгружающий эффект.
2. Установлено, что значения выгиба балки, вычисленные по предлагаемой методике в 1,8…2,6 раза больше величин, полученных по упрощенной методике. Занижение реального значения выгиба не позволяет в полной мере реализовать преимущества предварительного напряжения балочной конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенко С.В.** Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона (проблемы, опыт, возможные решения и рекомендации, компьютерные модели, информационные технологии). – К.: Изд. «Факт», 2004. – 206 с.
2. **Joshuva N.R., Saibabu S., Eapen Sakaria P., Lakshmikandhan K.N., Sivakumar P.** Finite element analysis of reinforced and pre-tensioned concrete beams. // International journal of emerging technology and advanced engineering, Vol. 4, Iss. 10, 2014, pp. 449-457.
3. **Kote P.B., Patil S.P., Sangle K. Keshav**. Finite element analysis of pre-stressed beam. // International journal of foundation and research in science & engineering, Vol. 1, Iss. 3, 2014, pp. 40-48.
4. **Kwak H.-G., Filippou F.C.** Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Department of civil engineering university of Cflifornia Berkeley, California, November 1990, 120 pages.
5. **Фиалко С.Ю.** Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций. // Инженерно-строительный журнал, №5, 2014, с. 27-36.
6. **Прокопович А.А.** Сопротивление изгибу железобетонных конструкций с различными условиями сцепления продольной арматуры с бетоном. – Самара, НФК «Сенсоры. Модули. Систем», 2000. – 296 с.
7. **Дзюба И.С., Ватин Н.И., Кузнецов В.Д.** Монолитное большепролетное ребристое перекрытие с постнапряжением. // Инженерно-строительный журнал, №1, 2008, с. 5-12.
8. **Лукин А.В., Модестов В.С.** Конечно-элементное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, №3(201), 2014, с. 35-46.
9. **Гибшман Е.Е., Гибшман М.Е.** Теория и расчет предварительно напряженных

железобетонных мостов. – М.: Изд. Автотрансиздат, 1963. – 396 с.
10. **Портаев Д.В.** Расчет и конструирование монолитных преднапряженных конструкций гражданских зданий. – М.: АСВ, 2011. – 248 с.
11. **Гайджуров П.П., Аль-Джабоби Сами Фахль, Аль-Хадж Махмуд Абдо Хаса.** Конечно-элементное моделирование передачи усилия натяжения стального каната на бетон. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, №2, 2017, с. 73-78.
12. **Гайджуров П.П., Исхакова Э.Р.** Билинейный четырехузловой конечный элемент для решения двумерных задач теории упругости. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, №4, 2011, с. 7-13.

REFERENCES

1. **Gorodetskiy A.S., Laborer L.G., Gorodetsky D.A., Laznik M.V., Yusi-Penco S.V.** Raschet i Proektirovanie Konstrukcij Vysotnyh Zdanij iz Monolitnogo Zhelezobetona (Problemy, Opyt, Vozmozhnye Reshenija i Rekomendacii, Komp'juternye Modeli, Informacionnye Tehnologii) [Calculation and design of structures of high-rise buildings of reinforced concrete (problems, experiences, possible solutions and recommendations, computer models, information technologies)]. Kiev, “Fact”, 2004, 206 pages.
2. **Joshuva N.R., Saibabu S., Eapen Sakaria P., Lakshmikandhan K.N., Sivakumar P.** Finite element analysis of reinforced and pre-tensioned concrete beams. // International journal of emerging technology and advanced engineering, Vol. 4, Iss. 10, 2014, pp. 449-457.
3. **Kote P.B., Patil S.P., Sangle K. Keshav**. Finite element analysis of pre-stressed beam. // International journal of foundation and research in science & engineering, Vol. 1, Iss. 3, 2014, pp. 40-48.
4. **Kwak H.-G., Filippou F.C.** Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Department of civil engineering university of Cflifornia Berkeley, California, November 1990, 120 pages.
5. **Fialko S.Yu.** Chetyrehuzlovoj Konechnyj Jelement Dlja Modelirovanija Povedenija Tonkostennyh Zhelezobetonnyh Konstrukcij [Four-node finite element for modeling the behavior of thin-walled concrete structures]. // Inzhenerno-Stroitelniy Zhurnal, No. 5, 2014, pp. 27-36.
6. **Prokopovich A.A.** Soprotivlenie Izgibu Zhelezobetonnyh Konstrukcij s Razlichnymi Uslovijami Sceplenija Prodol'noj Armatury s Betonom [Bending strength of reinforced concrete structures with different conditions of coupling for the longitudinal reinforcement to the concrete]. Samara, NFK “Sensors. Modules. Systems”, 2000, 296 pages.
7. **Dzyuba I.S., Vatin N.I., Kuznetsov V.D.** Monolithic Long-Span Ribbed Slab by Postradiation. // Inzhenerno-Stroitelniy Zhurnal, No. 1, 2008, pp. 5-12.
8. **Lukin, A.V., Modestov V.S.** Konechno-Jelementnoe Modelirovanie i Analiz Naprjazhenno-Deformirovannogo Sostojanija Zhelezobetonnyh Konstrukcij [Finite element modeling and analysis of stress-strain state of reinforced concrete structures]. // Scientific-technical Bulletin of SPbSPU. Physics and mathematics, 2014, No. 3(201), pp. 35-46.
9. **Gibshman E.E., Hirshman M.E.**
10. Teorija i Raschet Predvaritel'no Naprjazhennyh Zhelezobetonnyh Mostov [Theory and design of prestressed concrete bridges]. Moscow, Autotransmit, 1963, 396 pages.
11. **Portaev D.V.** Raschet i konstruirovanie monolitnyh prednaprjazhennyh konstrukcij grazhdanskih zdanij [Calculation and design of monolithic prestressed structures for civil buildings]. Moscow, ASV Publishing House, 2011, 248 pages.

12. **Gaigerov P. P., Al-Jabobi Themselves Fahl, Al-Hajj Mahmoud Abdo Hasa**. Konechno-jelementnoe Modelirovanie Peredachi Usilija Natjazhenija Stal'nogo Kanata na Beton [Finite element modeling of the transmission of the tension force of the steel rope on the concrete]. // Izvestia vuzov. Severo-Kavkazsky Regionn. Technichheskie Nauki, No. 2, 2017, pp. 73-78.
13. **Gaigerov P.P., Iskhakova E.R.** Bilinejnyj Chetyrehuzlovoj Konechnyj Jelement Dlja Reshenija Dvumernyh Zadach Teorii Uprugosti [Bilinear four-node finite element for solving two-dimensional problems of elasticity theory]. // Izvestia vuzov. Severo-Kavkazsky Regionn. Technichheskie Nauki, No. 4, 2011, pp. 7-13.

Гайджуров Петр Павлович, профессор, доктор технических наук; профессор кафедры «Техническая механика» Донского государственного технического университета; 344000, Россия, г. Ростов-на-Дону, площадь Гагарина, д. 1; тел. 8(800)100-19-30;
факс: +7(863)232-79-53; e-mail: gpp-161@yandex.ru

Peter. P. Gaigerov, Professor, Dr.Sc.; Professor of Department of Technical Mechanics, Don State Technical University; Gagarin square 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia; phone 8(800)100-19-30;
fax +7(863)232-79-53; e-mail: gpp-161@yandex.ru.